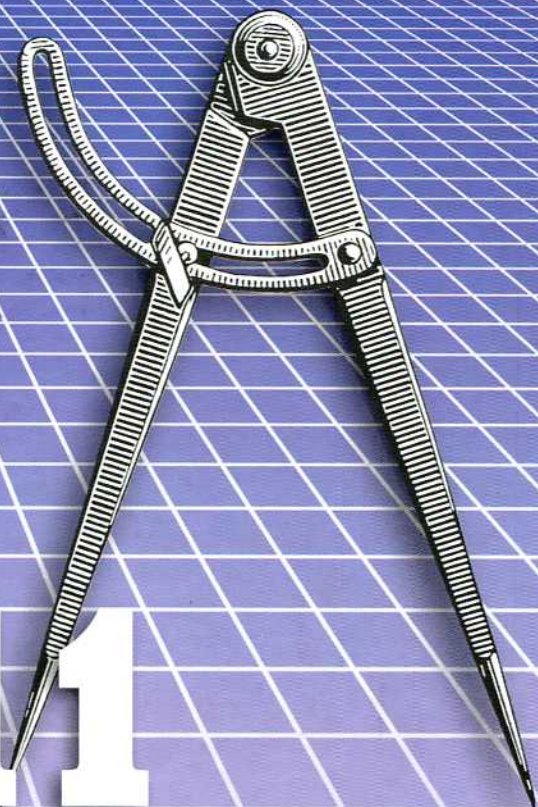


Б.Г.ЗИВ

Задачи к урокам геометрии



7-11

дидактические материалы

Б. Г. ЗИВ

**Задачи к урокам
геометрии
для 7-11 классов**

пособие для учителей,
школьников и абитуриентов

Издание 10-е

VICTORY

**ПЕТРОГЛИФ
Санкт-Петербург**

УДК 373.167.1:51

ББК 22.1я721

З 59

Рекомендовано кабинетом математики
Санкт-Петербургского
Университета Педагогического Мастерства
в качестве учебного пособия для средней школы

- Зив Б. Г.**
3 59 Задачи к урокам геометрии. 7-11 классы. — СПб.: «Петроглиф»,
«Виктория плюс», 2016. — 608 с.: илл. — ISBN 978-5-98712-011-8,
ISBN 978-5-91673-003-6

Книга известного петербургского математика, методиста и педагога Бориса Германовича Зива составлена на основе весьма популярных дидактических материалов, изданных ранее издательством «Просвещение», но со значительными доработками и изменениями. Рекомендована учителям общеобразовательных школ, может быть использована на факультативных и кружковых занятиях в обычных классах и в классах с углубленным изучением математики.

ISBN 978-5-98712-011-8 (Петроглиф)
ISBN 978-5-91673-003-6 (Виктория плюс)

© Зив Б. Г., 2012
© «Петроглиф», 2012

Предисловие

Вы держите в руках уникальную книгу. Если Вы начинающий учитель математики — немедленно вынимайте деньги — остальную часть предисловия прочитаете дома, в спокойной обстановке. Впрочем, опытный преподаватель и вовсе не станет читать предисловие — фамилия Автора, стоящая на обложке, является абсолютной гарантией качества. Если же — и тут Вам можно только посочувствовать — Вы не являетесь учителем, или не привыкли доверять рекламным заверениям, читайте дальше.

Данный сборник содержит полный набор задач для уроков и контрольных заданий по всему курсу геометрии с 7 по 11 классы. Кроме того, здесь Вы найдете диктанты, обширные работы на повторение и даже задачи олимпиадного характера. Все контрольные задания — в книге представлены по четыре варианта каждого — имеют одинаковый уровень сложности, рассчитанный на проверку усвоения пройденного материала средним учеником. Совсем иное дело задачи к уроку — тут Вы получите истинное удовольствие. Охвачены все темы курса — в строгом соответствии с действующими учебниками:

Варианты 1 и 2 рассчитаны на совсем слабого ученика — это минимальный уровень, за который можно поставить «три».

Варианты 3 и 4 — базовый уровень, короче — «четверка».

Варианты 5 и 6 достаточно сложны — их следует предлагать наиболее способным учащимся.

Варианты 7 и 8 вполне можно использовать для кружковой работы. Попробуйте решить их сами и, если Вам будет сопутствовать успех, Вы получите истинное эстетическое удовольствие.

Если же какую-то задачу Вам не удастся решить, не расстраивайтесь — решения, которые приводит Автор, изложены настолько четко, что Вы легко в них разберетесь. Таким образом, если Вы станете счастливым обладателем этой Книги, Вам не потребуется перерывать десятки решебников в поисках подходящей задачи. У Вас теперь есть все, что необходимо для того, чтобы научиться или научить решать любые задачи по геометрии.

Учитель-методист физико-математического
лицея №366 Санкт-Петербурга

Владимир Гольдич

От автора

Основная цель данной книги — помочь учителям организовать работу с учащимися по решению геометрических задач в классе и дома с учетом их индивидуальных особенностей и уровня подготовки. Книга состоит из 5 глав, каждая из которых содержит необходимый задачный материал по курсу 7-11 классов. Каждая глава содержит следующие разделы:

1. *Задачи для работы на уроке и дома*, сгруппированные по четырем уровням сложности — от простейших до достаточно сложных, — которые можно использовать и для работы в классах с углубленным изучением математики.
2. *Контрольные задания* в четырех вариантах, составленные из наиболее типичных задач соответствующих тем (звездочками отмечены дополнительные задачи для наиболее сильных учеников).
3. *Устные задачи* ко всем основным темам курса.
4. *Работы на повторение*, в том числе и для подготовки к экзаменам в 9 и 11 классах.

В конце книги приведены ответы, даны указания к задачам, могущим вызвать затруднения, и помещены решения наиболее сложных задач.

Книга ориентирована на изучение геометрии по учебникам под редакцией Л. С. Атанасяна для 7-9 и 10-11 классов, но может с успехом использоваться и при работе по другим учебникам. Книга может быть полезна и учащимся для их самостоятельной работы дома.

При составлении материала для 7-х и 8-х классов непосредственное участие принимал нижегородский учитель *Вениамин Михайлович Мейлер*.

Автор выражает искреннюю благодарность методисту Санкт-Петербургского Университета педагогического мастерства Владимиру Борисовичу Некрасову за весьма ценные замечания и советы по содержанию рукописи.

Б. Г. Зив

7 класс

ЗАДАЧИ ДЛЯ УРОКА

Параграф	Тема
1	Прямая и отрезок
2	Луч и угол
3	Сравнение отрезков и углов
4	Измерение отрезков и углов
5	Перпендикулярные прямые, смежные и вертикальные углы
6	Треугольник
7	Первый признак равенства треугольников
8	Медианы, биссектрисы и высоты треугольника. Свойства равнобедренного треугольника
9	Второй и третий признаки равенства треугольников
10*	Равенство треугольников
11	Окружность
12	Построение циркулем и линейкой
13	Признаки параллельности двух прямых
14	Практические способы построения параллельных прямых. Аксиома параллельных прямых и следствия из нее
15	Теоремы об углах, образованных двумя параллельными прямыми и секущей. (Свойства параллельных прямых)
16	Параллельные прямые
17	Теорема о сумме углов треугольника. Остроугольный, прямоугольный и тупоугольный треугольники
18	Теорема о соотношении между сторонами и углами треугольника
19	Неравенство треугольников
20	Сумма двух острых углов прямоугольного треугольника. Прямоугольный треугольник с углом в 30°
21	Признаки равенства прямоугольных треугольников
22	Перпендикуляр и наклонная. Расстояние от точки до прямой. Расстояние между параллельными прямыми
23*	Множество точек, равноудаленных от данной прямой
24	Построение треугольника по трем элементам
25*	Более сложные случаи построения треугольников
26	Итоговое повторение

* Задачи предназначены для классов с углубленным изучением математики

ЗАДАЧИ ДЛЯ УРОКА

§ 1. Прямая и отрезок

1. (Рис. 1)

1. Пересекаются ли отрезки AB и CD ?
2. Пересекаются ли прямые AB и CD ?
3. Отметьте точку M так, чтобы она лежала на прямой CD , но не лежала ни на отрезке AB , ни на отрезке CD .
4. Отметьте точку N , которая лежит на прямой CD между точками A и B . Как вы назовете такую точку?

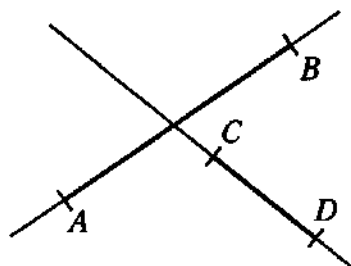


Рис. 1

2. (Рис. 2)

1. Пересекает ли прямая KL отрезок EF ?
2. Пересекает ли прямая KL прямую EF ?
3. Отметьте точку A , которая лежит на прямой EF , но не лежит на прямой KL .
4. Существуют ли точки, которые одновременно лежат на отрезке EF и прямой LK ?

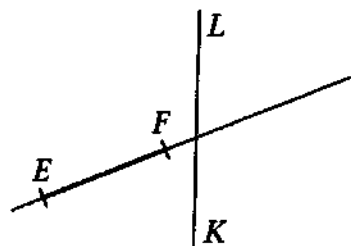


Рис. 2

3. (Рис. 3)

1. Сколько существует различных отрезков с концами в точках A , B , C и D ?
2. Пересекаются ли прямые AB и CD ?
3. Какая из точек, A или D , лежит между точками B и C ?
4. Отметьте точку M , которая лежит на прямой AD , но не лежит на отрезке BC .
5. Проведите прямую, проходящую через точку E , которая пересекает прямые AB и BC , но не пересекает отрезок AD .

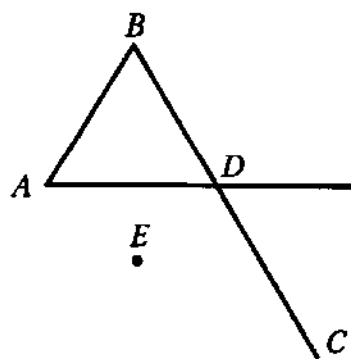


Рис. 3

4. (Рис. 4)

1. Сколько существует различных отрезков с концами в точках E , F , M и N ?
2. Пересекаются ли прямые EN и FM ?
3. Какая из точек, A или N , лежит между точками E и F ?
4. Отметьте точку B , которая лежит на отрезке MN , но не лежит на прямой EF .
5. Проведите прямую, проходящую через точку A , которая пересекает прямые EF и MN , но не пересекает отрезок FM .

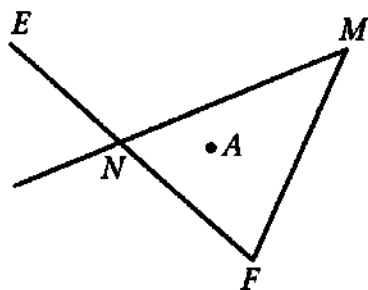


Рис. 4

5.

1. Начертите две пересекающиеся прямые и расположите на них два отрезка, не имеющие общих точек.
2. Сколько точек надо взять между точками A и B , чтобы вместе с отрезком AB получилось шесть различных отрезков?
3. Даны отрезок AB , точка E , не лежащая на прямой AB , и точка C , лежащая на прямой AB . Каково взаимное положение прямой EC и отрезка AB ?
4. Можно ли провести прямую, не проходящую через точку A , так, чтобы она пересекала одновременно прямые AB , AC и AD (рис. 5)?

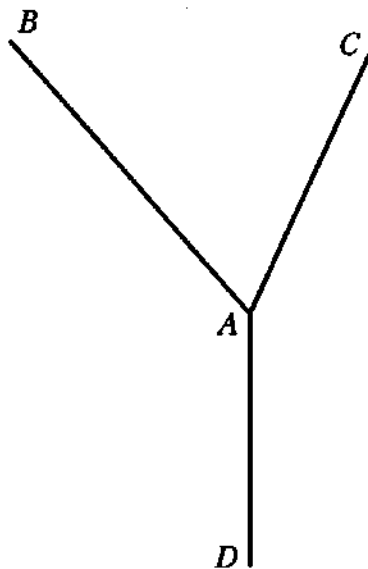


Рис. 5

6.

1. Начертите две пересекающиеся прямые и расположите на них два непересекающихся отрезка так, чтобы точка пересечения прямых принадлежала одному из них.
2. Проведите прямую, которая пересекает некоторые из указанных на рисунке 6 отрезков, так, чтобы вместе с данными отрезками образовалось шесть отрезков.
3. Дана прямая EF , $A \notin EF$, $B \notin EF$. Может ли прямая AB не пересекать отрезок EF ?
4. Может ли прямая, не проходящая через точку O , одновременно пересекать прямые OA , OB , OC и OD (рис. 7)?

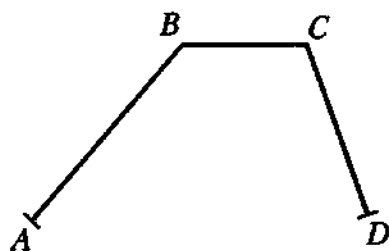


Рис. 6

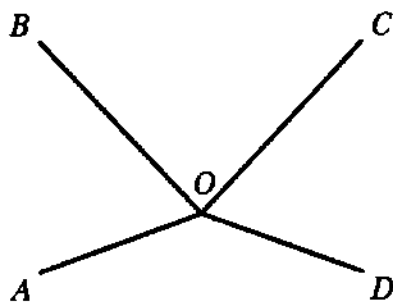


Рис. 7

7.

1. Сколько различных прямых можно провести через четыре точки? Сделайте чертежи.
2. По рисунку 8 определите число отрезков с концами в обозначенных точках.

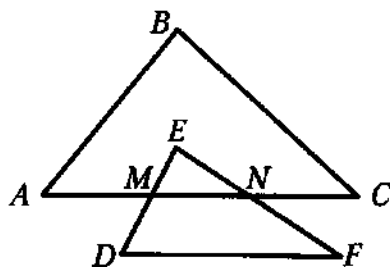


Рис. 8

8.

1. Сколько точек пересечения могут иметь четыре попарно пересекающиеся прямые? Для каждого случая сделайте рисунок.
2. По рисунку 9 определите число отрезков с концами в обозначенных точках.

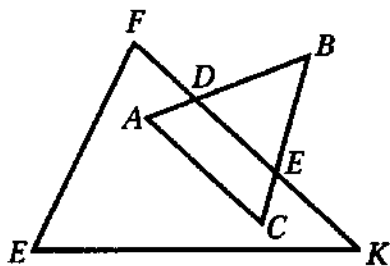


Рис. 9

§ 2. Луч и угол

1.

1. 1) Сколько лучей с началом в точке O изображено на рисунке 10?
 - 2) Сколько углов изображено на этом рисунке?
 - 3) Постройте луч OM так, чтобы угол AOM был развернутым.
2. Начертите угол. Отметьте точку M , которая лежит на стороне угла, точку N , лежащую во внутренней области угла, и точку E , принадлежащую его внешней области.

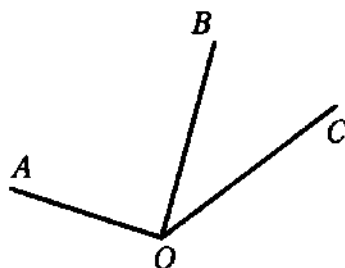


Рис. 10

2.

1. 1) Сколько лучей с началом в точке O изображено на рисунке 11?
 - 2) Сколько углов изображено на этом рисунке?
 - 3) Начертите луч OA так, чтобы угол AON был развернутым.
2. Начертите угол. Изобразите отрезок: а) все точки которого лежат во внутренней области угла; б) все точки которого лежат во внешней области угла; в) часть точек которого лежит во внутренней области угла.

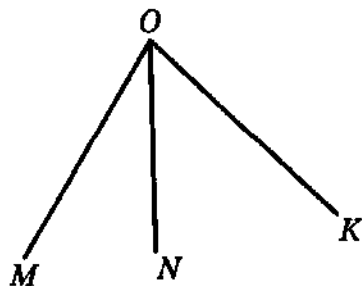


Рис. 11

3.

1. 1) Сколько неразвернутых и сколько развернутых углов изображено на рисунке 12?
- 2) Проведите лучи с началом в точке B , один из которых пересекал бы луч AC , а другой не пересекал бы его.
2. Даны угол MEF и точка A , лежащая в его внутренней области (рис. 13). Проведите луч с началом в точке E так, чтобы образовались два угла, такие, что точка A не принадлежала бы их внутренним областям.

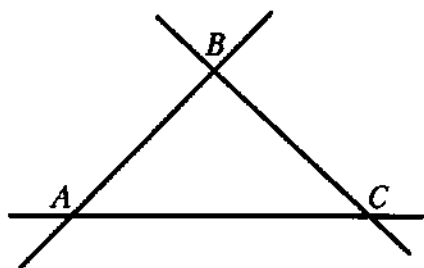


Рис. 12

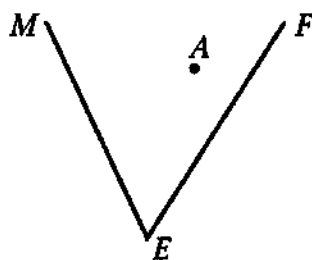


Рис. 13

4.

1. 1) Сколько неразвернутых и сколько развернутых углов изображено на рисунке 14?
- 2) Начертите луч CD , проведите два луча с началом в точке A , один из которых пересекал бы луч CD , а другой не пересекал бы его.
2. Даны угол EKL и точка M , не лежащая в его внутренней области (рис. 15). Проведите из точки K луч так, чтобы образовалось еще два угла, такие, что точка M не лежала бы в их внутренней области.

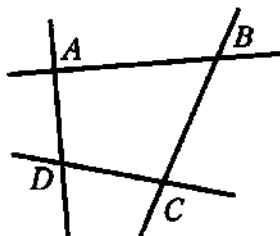


Рис. 14

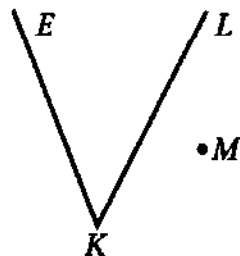


Рис. 15

5.

1. Сколько неразвернутых и сколько развернутых углов изображено на рисунке 16?
2. С началом в точке E (рис. 17) проведите лучи, один из которых пересекает луч CA , а другой не пересекает луч BC . Рассмотрите возможные варианты.
3. Дан неразвернутый угол ABC . Проведите лучи с началом в точке B , чтобы образовались при этом шесть углов, из которых один был бы развернутым.

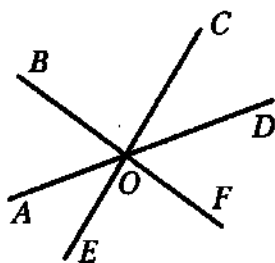


Рис. 16

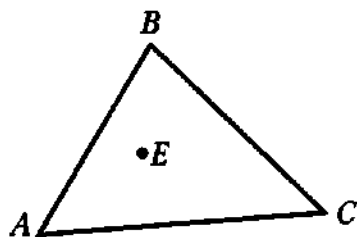


Рис. 17

6.

1. Сколько неразвернутых и сколько развернутых углов изображено на рисунке 18?
2. С началом в точке E проведите лучи, один из которых пересекает луч BC , а другой не пересекает луч AC (рис. 19). Рассмотрите возможные варианты.
3. Через заданную точку проведите столько прямых, чтобы при их пересечении образовалось шесть углов.

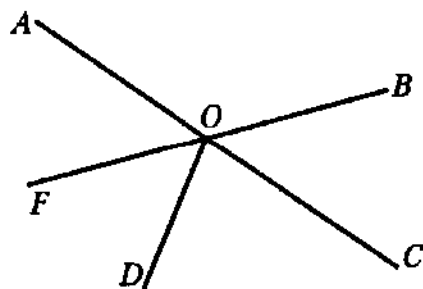


Рис. 18

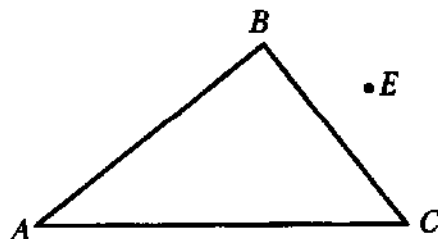


Рис. 19

7.

Углы AOB , BOC , COD , DOE и EOA имеют общую вершину O . Прямая a , не проходящая через точку O , пересекает не менее двух лучей, которые являются сторонами этих углов. Рассмотрите все возможные случаи. Сделайте чертежи.

8.

Углы MAF , FAK , KAP , PAQ , QAM имеют общую вершину A . Прямая m , не проходящая через точку A , пересекает не более трех лучей, которые являются сторонами этих углов. Рассмотрите все возможные случаи. Сделайте рисунки.

§ 3. Сравнение отрезков и углов

1.

1. На рисунке 20 $CB = BE$, $DE > AC$. Сравните отрезки AB и DB .
2. На рисунке 21 $\angle AOB = \angle DOC$. Есть ли еще на рисунке равные углы?

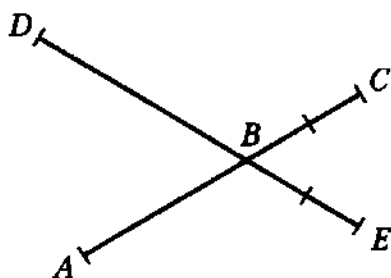


Рис. 20

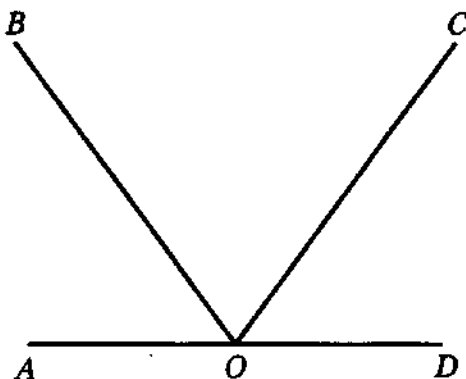


Рис. 21

2.

1. На рисунке 22 $EO = NO$, $OK > OL$. Сравните отрезки EK and NL .
2. На рисунке 23 $\angle MOL = \angle KON$. Есть ли еще на рисунке равные углы?

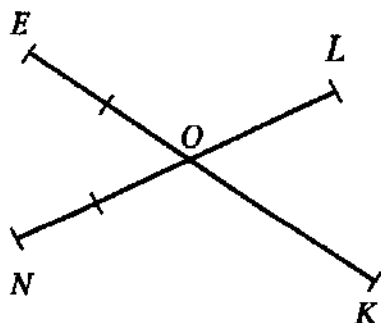


Рис. 22

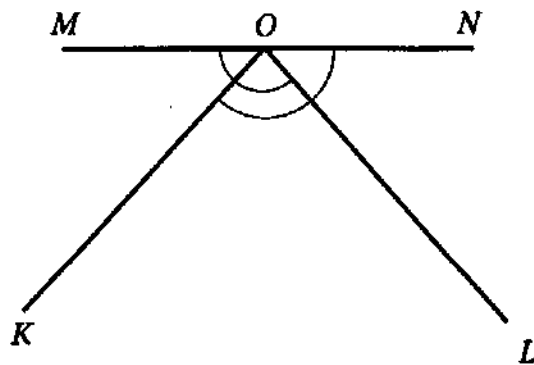


Рис. 23

3.

1. На прямой a от точки A в одном направлении отложены два отрезка AB и AC ($AC > AB$). От точки C на этой прямой отложите такой отрезок CE , чтобы $AC = BE$. Что вы можете сказать о длине отрезка CE ?
2. $\angle AOC = \angle BOD$, OM — биссектриса $\angle AOB$ (рис. 24). Докажите, что OM — биссектриса $\angle COD$.

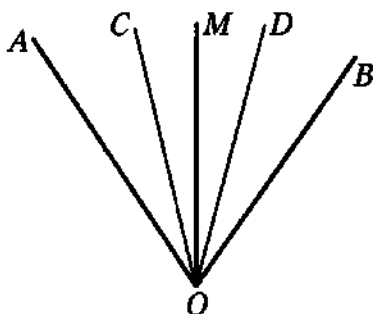


Рис. 24

4.

1. На прямой m от точки A отложены два отрезка так, что $AC > AB$ и точка A лежит между точками B и C . От точки C отложен отрезок CM так, что $BM = AC$. Сравните отрезки MC и AB .
2. На рисунке 25 $\angle AOC = \angle BOC$ и $\angle AOE = \angle BOF$. Является ли луч OC биссектрисой угла EOF ?

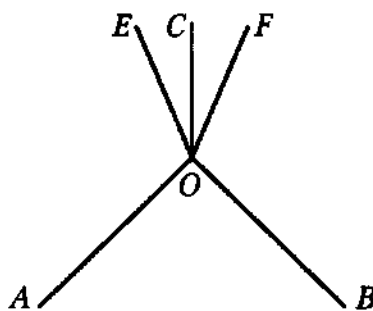


Рис. 25

5.

1. Если на прямой даны точки A , B , C и D (точка C лежит между A и B) так, что $AB = CD$, то является ли середина отрезка AD также серединой отрезка BC ? Обоснуйте ответ.
2. На рисунке 26 OB — луч, принадлежащий внутренней области угла AOC . Как нужно провести луч OE , чтобы $\angle AOC = \angle BOE$? Покажите на рисунках возможные варианты.

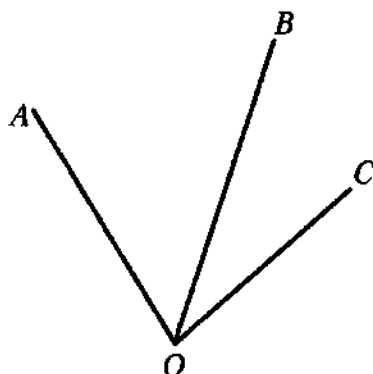


Рис. 26

6.

1. AB и AC — отрезки одной прямой (A лежит между точками B и C), точка M — середина отрезка AB , N — середина AC . Верно ли, что $BC = 2MN$? Ответ обоснуйте.
2. На рисунке 27 OC — луч, принадлежащий внутренней области угла AOB . Как нужно провести луч OD , чтобы $\angle AOD = \angle COB$? Покажите на рисунке возможные варианты.

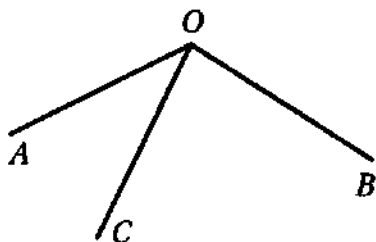


Рис. 27

7.

1. На прямой a от точки A отложены два отрезка AB и AC , причем $AB < AC < 1,99AB$. Сравните отрезки BC и AB . Ответ обоснуйте.
2. На рисунке 28 $\angle AOC = \angle BOD$, OM и ON — биссектрисы углов AOB и COD . Сравните углы MON и AOC .

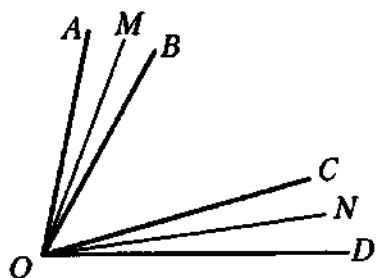


Рис. 28

8.

1. На прямой m от точки A отложены два отрезка AB и AC , причем $0,51AB < AC < AB$. Сравните отрезки BC и AC . Ответ обоснуйте.
2. На рисунке 29 OM и ON — биссектрисы углов AOB и COD , $\angle MON = \angle AOC$. Сравните углы AOC и BOD .

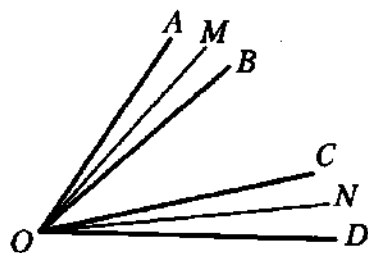


Рис. 29

§ 4. Измерение отрезков и углов

1.

1. На прямой m лежат точки M, N, K , причем $MN = 85$ мм, $NK = 1,15$ дм. Какой может быть длина отрезка MK в сантиметрах?
2. $\angle AOB = 90^\circ$. Проведите луч OC так, чтобы угол AOC равнялся 45° (рассмотрите два случая).
 - 1) Чему равен угол COB ? 2) Каким углом: острым, тупым или развернутым — является угол COB ?
 - 3) Является ли луч OC биссектрисой угла AOB ?

2.

1. Точки A, B и C лежат на прямой a , причем $AB = 5,7$ м, $BC = 730$ см. Какой может быть длина отрезка AC в дециметрах?
2. $\angle AOB = 120^\circ$. Проведите луч OC так, чтобы угол AOC равнялся 60° (рассмотрите два случая).
 - 1) Чему равен угол COB ? 2) Каким углом: острым, тупым или развернутым — является угол COB ?
 - 3) Является ли луч OC биссектрисой угла AOB ?

3.

1. На отрезке MN , равном 8 дм, лежат точки A и B по разные стороны от середины C отрезка MN , $CA = 7$ см, $CB = 0,24$ м. Найдите длины отрезков AN и BN в дециметрах.
2. $\angle AOB = 80^\circ$. Луч OC делит этот угол на два угла так, что $\angle AOC = 4\angle COB$.
 - 1) Найдите эти углы. 2) Найдите угол DOB , если луч OD проведен так, что OA — биссектриса угла DOB . Каким углом: острым или тупым — является этот угол?

4.

1. Точка M — середина отрезка EF , длина которого равна 1,2 м. От точки M , по разные стороны от нее, отложены два отрезка $MP = 1,6$ дм и $MQ = 40$ см. Найдите длины отрезков EP и QF в сантиметрах.
2. $\angle AOB = 100^\circ$, луч OE делит этот угол на два угла так, что $\angle BOE = 3\angle AOE$.
 - 1) Найдите эти углы. 2) Найдите угол FOF , если луч OF проведен так, что OE — биссектриса угла FOF . Каким углом: острым или тупым — является этот угол?

5.

1. На отрезке AB , равном 192 дм, дана точка C , такая, что $AC : CB = 1 : 3$. На отрезке AC отложен отрезок CD , равный $\frac{1}{12}BC$. Найдите расстояние между серединами отрезков AD и CB .
2. Угол AOB расположен во внутренней области угла COD . OE и OF — биссектрисы углов COA и BOD соответственно. Объясните, почему угол EOF прямой, если $\angle COD + \angle AOB = 180^\circ$.

6.

1. На прямой отложены два равных отрезка AC и CB . На отрезке CB дана точка D , такая, что $5CD = 4DB$. Найдите длину отрезка, концами которого являются середины отрезков AC и DB , если $CD = 12$ м.
2. Угол AOB принадлежит внутренней области угла COD ; $\angle COD = 140^\circ$, а $\angle AOB = 100^\circ$. Найдите угол, образованный биссектрисами углов AOC и BOD , если луч OB принадлежит внутренней области угла AOD .

7.

1. Длина отрезка AB равна 14 см. Найдите на прямой AB все такие точки D , для которых $DA = 3DB$.
2. Прямой угол разделен лучом, исходящим из его вершины, на два угла, такие, что половина одного угла равна трети другого. Найдите эти углы.

8.

1. Длина отрезка AB равна 12 см. Найдите на прямой AB все такие точки M , для которых $MA = 2MB$.
2. Прямой угол двумя лучами, исходящими из его вершины, разделен на три угла, один из которых равен разности двух других углов. Найдите величину большего из этих углов.

§ 5. Перпендикулярные прямые, смежные и вертикальные углы

1.

- Смежные углы относятся как 4 : 1. Найдите эти углы.
- На рисунке 30 прямые a и b перпендикулярны, $\angle 1 = 40^\circ$. Найдите углы 2, 3 и 4.

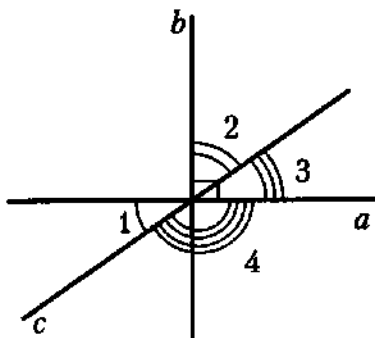


Рис. 30

2.

- Один из смежных углов больше другого на 40° . Найдите эти углы.
- На рисунке 31 прямые a и b перпендикулярны, $\angle 1 = 130^\circ$. Найдите углы 2, 3 и 4.

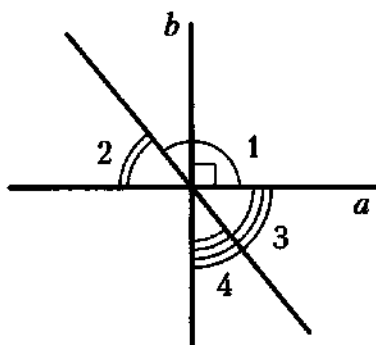


Рис. 31

3.

- Из точки O проведены лучи OA , OB и OC , причем $OB \perp OA$ (рис. 32). Угол, образованный биссектрисами углов AOB и BOC , равен 75° . Найдите углы AOB , BOC и AOC .
- При пересечении двух прямых образовалось четыре угла меньше развернутого. Найдите эти углы, зная, что один из них на 60° больше половины другого.

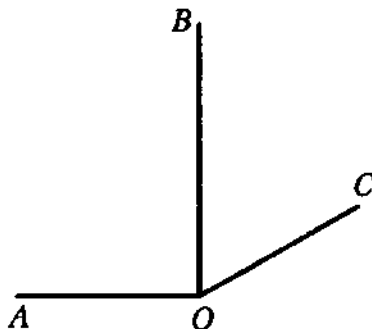


Рис. 32

4.

1. Из точки O проведены лучи OA , OB и OC (рис. 33), причем $OB \perp OA$. Угол, образованный биссектрисами углов AOB и BOC , равен 20° . Найдите углы AOB , AOC и COB .
2. При пересечении двух прямых образовались четыре угла меньше развернутого. Найдите эти углы, зная, что градусные меры двух из них относятся как $4 : 5$.

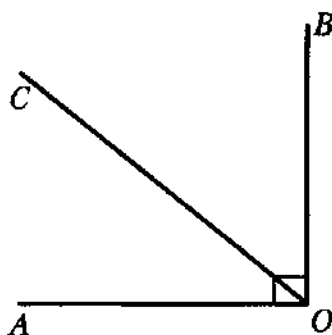


Рис. 33

5.

1. Даны два угла AOB и BOC с общей вершиной. Стороны одного угла перпендикулярны к сторонам другого (рис. 34). Найдите эти углы, если разность между ними равна прямому углу.
2. Углы AOB и BOC смежные, OM — биссектриса угла AOB , луч ON принадлежит внутренней области угла BOC и перпендикулярен OM . Является ли ON биссектрисой угла BOC ? Почему?

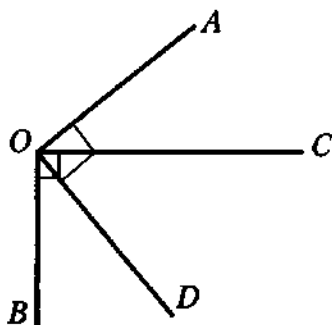


Рис. 34

6.

1. Два равных тупых угла имеют общую сторону, а две другие стороны взаимно перпендикулярны. Найдите величину тупого угла.
2. Из вершины развернутого угла проведены два луча, которые делят его на три равные части. Покажите, что биссектриса среднего угла перпендикулярна сторонам развернутого угла.

7.

Докажите, что сумма каждых трех углов, не прилежащих один к другому и образуемых тремя прямыми, проходящими через одну точку, равна двум прямым углам.

8.

Докажите, что сумма каждых пяти углов, не прилежащих один к другому и образуемых пятью прямыми, проходящими через одну точку, равна двум прямым углам.

§ 6. Треугольник

1.

1. $\triangle MEP = \triangle ABC$, $\angle E = 45^\circ$. Найдите угол B .
2. На рисунке 35 $BD = DC$. Сравните периметры треугольников ABC и ABD .

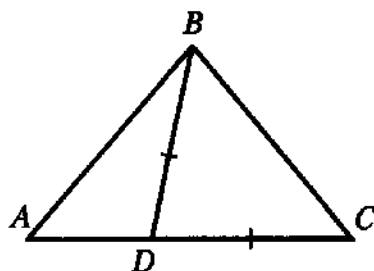


Рис. 35

2.

1. $\triangle APC = \triangle MFB$, $\angle P = \angle M$, $FB = 17$ см. Найдите AC .
2. На рисунке 36 $ED = DK$. Сравните периметры треугольников DFK и EFK .

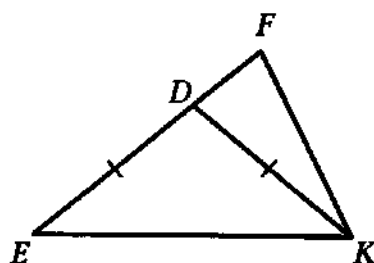


Рис. 36

3.

1. $\triangle ABC = \triangle ADC$, $\angle ABC = 70^\circ$ (рис. 37). Найдите $\angle MDC$.
2. На рисунке 38 $AB = BC = AC$, $AD = CD$. Периметр треугольника ABC равен 36 см, а периметр треугольника ADC равен 40 см. Найдите длины сторон этих треугольников.

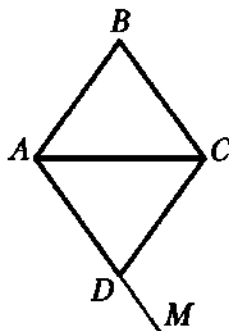


Рис. 37

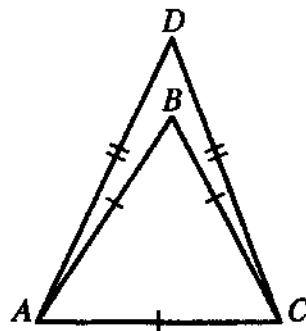


Рис. 38

4.

1. На рисунке 39 $\triangle ABD = \triangle CDB$, $\angle FAB = 160^\circ$. Найдите $\angle BCD$.
2. На рисунке 40 $AB = BC$ и $BC = BD = DC$. Периметр треугольника ABC равен 42 см, $AC = 12$ см. Найдите периметр треугольника BDC .

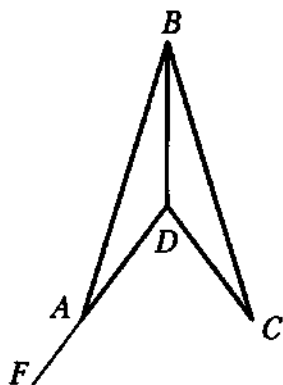


Рис. 39

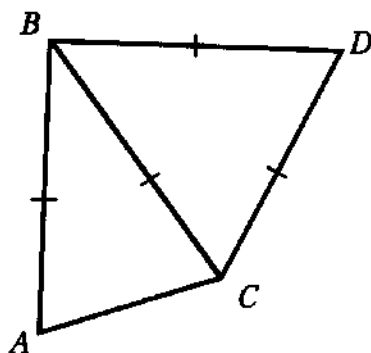


Рис. 40

5.

1. На рисунке 41 $\triangle ABD = \triangle CBD$, $AD = DC$, $\angle ABC = 110^\circ$, $\angle BAD = 90^\circ$. Найдите угол ABD и докажите, что $BC \perp CD$.
2. В треугольнике ABC $AB = BC$, $AC = 8$ см, $E \in BC$, причем $BE = EC$. Точка E делит периметр треугольника ABC на две части, из которых одна больше другой на 2 см. Найдите AB .

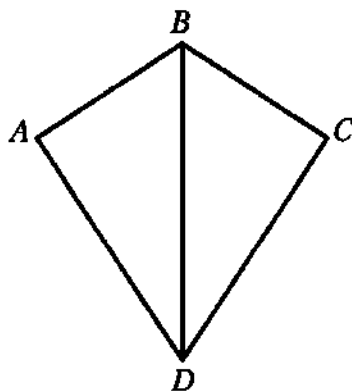


Рис. 41

6.

1. На рисунке 42 $\triangle ABE = \triangle ECD$, $\angle ABE = \angle CDE$, $AE = 7$ см, $AB \perp AC$. Найдите AC и $\angle ECD$.
2. В треугольнике ABC $AB = BC = 12$ мм. Точка M лежит на стороне BC , причем $BM = MC$. Точка M делит периметр треугольника ABC на две части, из которых одна меньше другой на 3 мм. Найдите сторону AC .

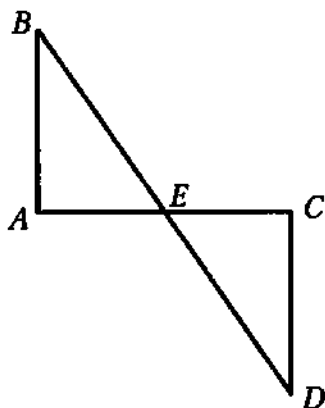


Рис. 42

7.

1. В треугольнике ABC $AB = AC$. Внутри треугольника выбрана точка O так, что $\angle AOB = \angle AOC$, $\angle AOB = 120^\circ$. Докажите, что AO — биссектриса угла BAC , и найдите угол BOC .
2. На рисунке 43 $\triangle ABC = \triangle ADC$, $AB = CD = 20$ см, $BO = DO = 5$ см. Периметр треугольника ABC равен 50 см. Найдите периметр треугольника AOC , если AO больше AC на 15 см.

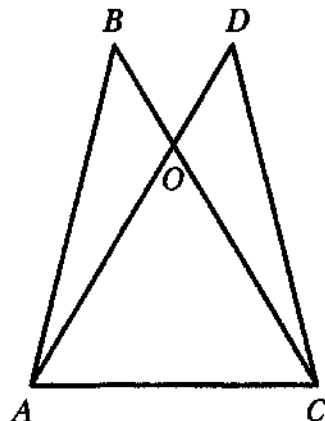


Рис. 43

8.

1. В треугольнике ABC выбрана точка O так, что $\triangle AOB = \triangle COB$, $OA = OC$, $\angle AOC = 140^\circ$. Докажите, что BO — биссектриса угла ABC , и найдите угол AOB .
2. На рисунке 44 $\triangle AOM = \triangle FOE$, $\angle AMO = \angle EFO$. Периметр треугольника OEF равен 40 см, $AF = 20$ см. Найдите периметр треугольника AEF .

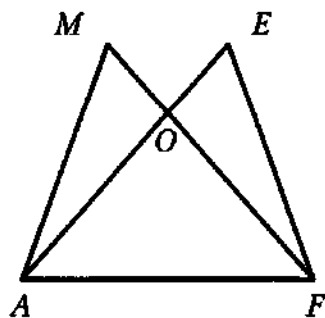


Рис. 44

§ 7. Первый признак равенства треугольников

1.

1. На рисунке 45 $BD = AC$, $OB = OC$. Докажите, что $\triangle AOB = \triangle COD$.
2. На рисунке 46 $OA = OC$, $\angle 1 = \angle 2$. Докажите, что $AB = BC$.

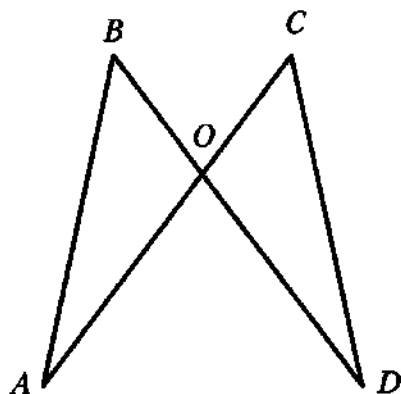


Рис. 45

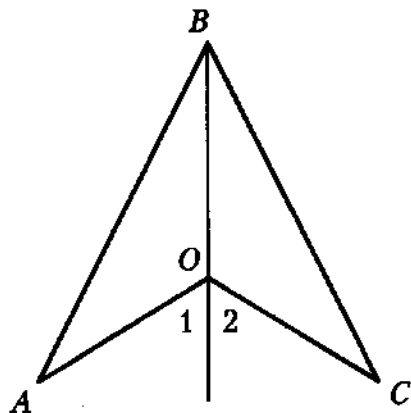


Рис. 46

2.

1. На рисунке 47 $AA_1 = CC_1$, $BC = B_1C_1$, $BC \perp AC$, $B_1C_1 \perp A_1C_1$. Докажите, что $\triangle ACB = \triangle A_1C_1B_1$.
2. На рисунке 48 $AB = BC$, $\angle 1 = \angle 2$. Докажите, что $\angle ADB = \angle CDB$.

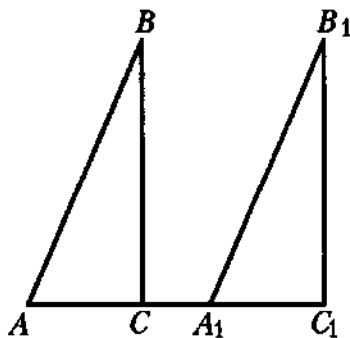


Рис. 47

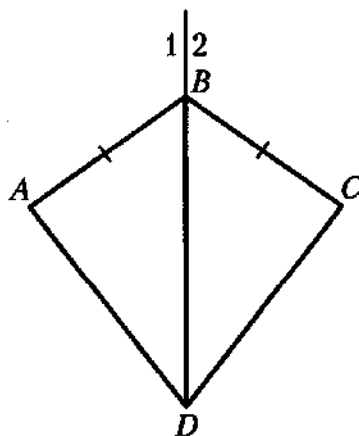


Рис. 48

3.

1. На рисунке 49 $\angle BDC = \angle BEA$, $AD = EC$, $BD = BE$. Докажите, что $\triangle ABD = \triangle BEC$. Чему равен $\angle BAD$, если $\angle BCE = 40^\circ$?
2. На рисунке 50 $AB = AD$, $AC = AE$ и $\angle BAD = \angle CAE$. Равны ли отрезки BC и DE , углы $\angle MCA$ и $\angle KEA$?

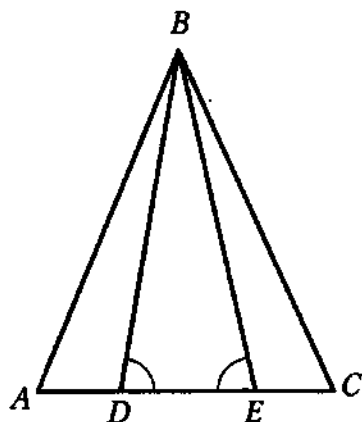


Рис. 49

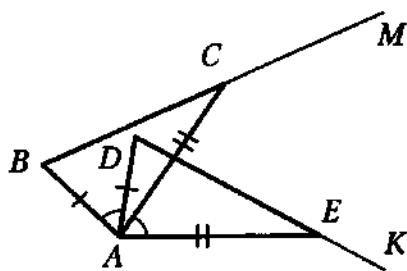


Рис. 50

4.

1. На рисунке 51 $\angle ABE = \angle ECD$, $BE = CE$ и $BK = LC$. Докажите, что $\triangle BEK = \triangle ELC$. Чему равен $\angle ELC$, если $\angle BKE = 110^\circ$?
2. На рисунке 52 $AC = BC = DC = EC$, $AC \perp CD$ и $BC \perp EC$.
1) Докажите, что $AB = DE$.
2) Сравните периметры треугольников ABD и EBD .

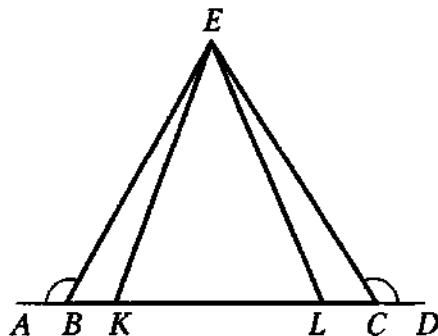


Рис. 51

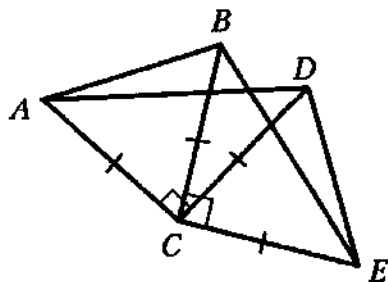


Рис. 52

5.

1. На рисунке 53 $OA = OC$ и $\angle AOB = \angle BOC$. Докажите, что $\triangle ABK = \triangle CBK$.
2. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AC = A_1C_1$, $AB = A_1B_1$ и $\angle A = \angle A_1$, $D \in BC$ и $DC = 2BD$, $D_1 \in B_1C_1$ и $D_1C_1 = 2B_1D_1$. Докажите, что $AD = A_1D_1$.

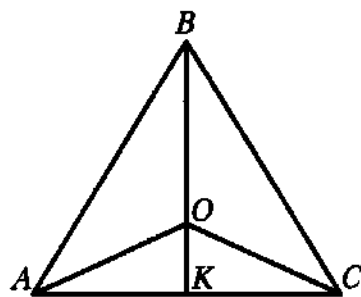


Рис. 53

6.

1. На рисунке 54 $OA = OC$ и $\angle AOD = \angle COD$. Докажите, что $\triangle ABD = \triangle CBD$.
2. Даны треугольники DEF и $D_1E_1F_1$, точки M и M_1 лежат соответственно на сторонах DF и D_1F_1 , причем $DM = 3MF$ и $D_1M_1 = 3M_1F_1$, $DE = D_1E_1$, $EM = E_1M_1$ и $\angle DEM = \angle D_1E_1M_1$. Докажите, что $EF = E_1F_1$.

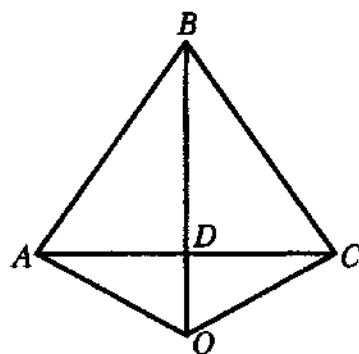


Рис. 54

7.

На рисунке 55 $CO = OD$ и $AO = OB$, M — середина отрезка AB . Докажите, что $MC = MD$.

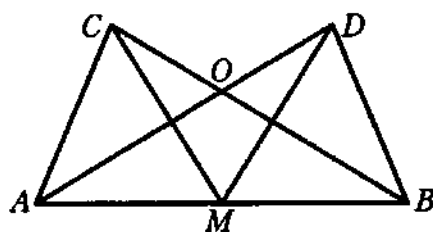


Рис. 55

8.

На рисунке 56 $AO = OB$, $OD = OC$ и $DE = CF$. Докажите, что $AE = BF$.

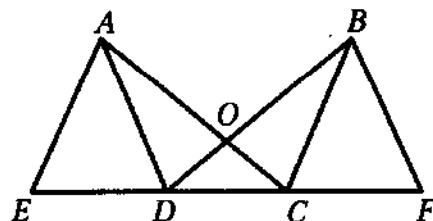


Рис. 56

§ 8. Медианы, биссектрисы и высоты треугольника. Свойства равнобедренного треугольника

1.

1. Проведите общую для всех изображенных на рисунке 57 треугольников высоту. Для какого из треугольников эта высота расположена вне его?
2. На рисунке 58 $AB = BC$, BE — медиана треугольника ABC . $\angle ABE = 40^\circ 30'$. Найдите $\angle ABC$ и $\angle FEC$.

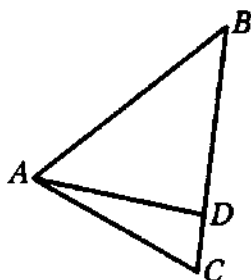


Рис. 57

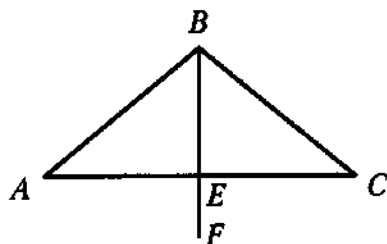


Рис. 58

2.

1. Проведите общую высоту для всех изображенных на рисунке 59 треугольников. Для каких треугольников эта высота лежит внутри треугольника?
2. На рисунке 60 $AB = BC$, $\angle FEC = 90^\circ$, $AE = 10$ дм, $\angle ABC = 130^\circ 30'$. Найдите AC и $\angle EBC$.

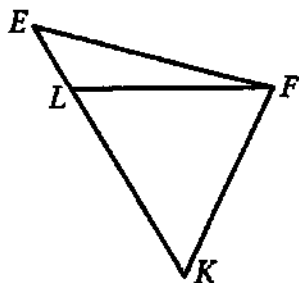


Рис. 59

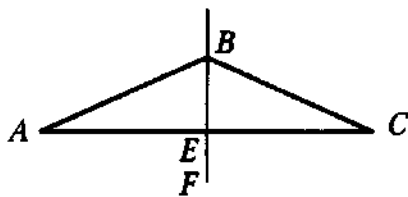


Рис. 60

3.

1. На рисунке 61 $\angle ADB = \angle CDB$, $AD = DC$. Докажите, что $\angle BAC = \angle BCA$ и $BD \perp AC$.
2. На рисунке 62 $AB = BC$ и $AO = OC$, OK — биссектриса треугольника BOC . Найдите угол AOK .

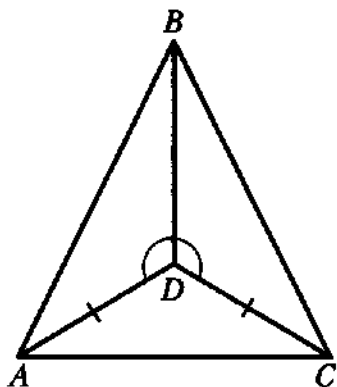


Рис. 61

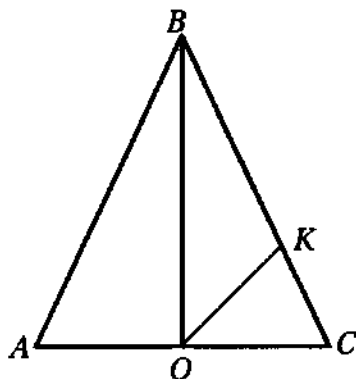


Рис. 62

4.

1. На рисунке 63 $AD = DC$, $\angle ADB = \angle CDB$. Докажите, что $\angle BAC = \angle BCA$ и $AM = MC$.
2. На рисунке 64 $AB = BC$, OM — биссектриса треугольника AOB , $\angle MOC = 135^\circ$. Докажите, что $\angle ABO = \angle OBC$.

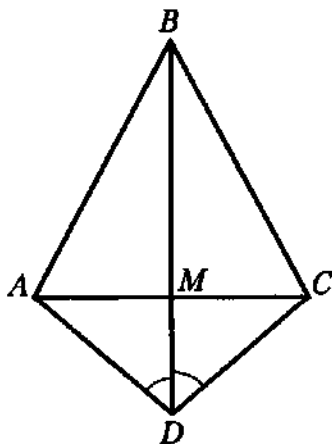


Рис. 63

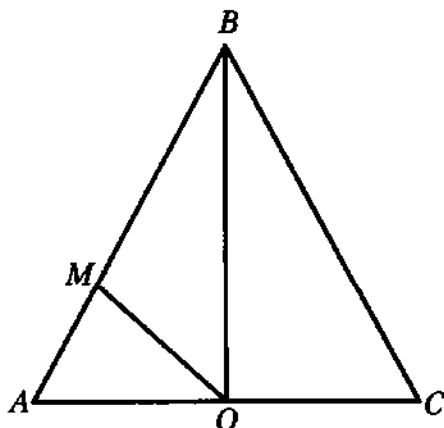


Рис. 64

5.

1. На рисунке 65 $AB = BC$ и $AE = FC$. Докажите, что $\angle AEC = \angle AFC$.
2. В треугольнике ABC на продолжении стороны BC за точку C отложен отрезок CD , равный CA , и точки A и D соединены отрезком, CE — биссектриса треугольника ACB , а CF — медиана треугольника ACD . Докажите, что $CF \perp CE$.

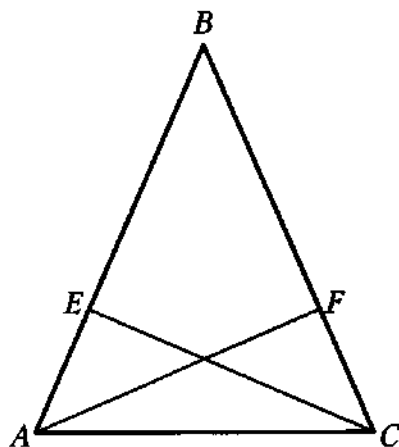


Рис. 65

6.

1. На рисунке 66 $AE = EC$ и $BE = ED$. Докажите, что $\angle ACD = \angle CAB$.
2. На отрезке AC по разные стороны от него построены два равнобедренных треугольника ABC и ADC . Вершины этих треугольников соединены прямой BD . Докажите, что $BD \perp AC$.

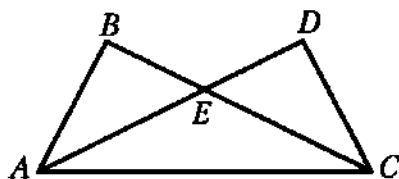


Рис. 66

7.

В треугольнике ABC $AB = BC = AC$. На его сторонах взяты точки M , P и K так, что $AM : MB = BP : PC = CK : KA = 1 : 3$. Докажите, что $\triangle MPK$ равносторонний.

8.

Стороны равностороннего треугольника ABC продлены на отрезки AM , CP и BK так, что $MA : AB = PC : AC = BK : CB = 2 : 1$. Докажите, что треугольник MPK равносторонний.

§ 9. Второй и третий признаки равенства треугольников

1.

1. На рисунке 67 $AB = BC$, $AK = KC$, $\angle AKE = \angle PKC$. Докажите, что $\triangle AKE = \triangle PKC$.
2. На рисунке 68 $AB = BC$ и $AD = DC$. Докажите, что BD — биссектриса угла ABC .

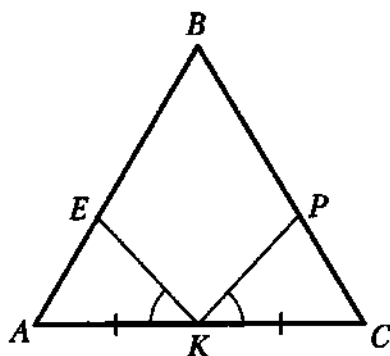


Рис. 67

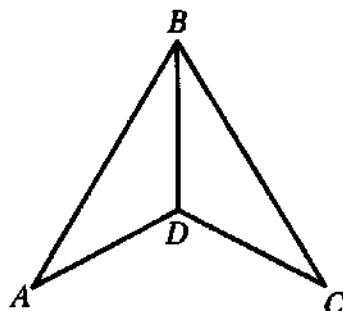


Рис. 68

2.

1. На рисунке 69 $AB = BC$, $MA = PC$, $\angle AMO = \angle OPC$. Докажите, что $\triangle AMO = \triangle OPC$.
2. На рисунке 70 $AB = CD$, $BC = AD$. Докажите, что $\angle 1 = \angle 2$.

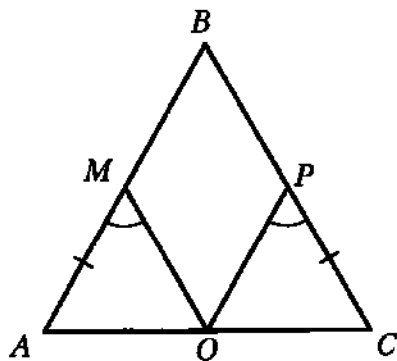


Рис. 69

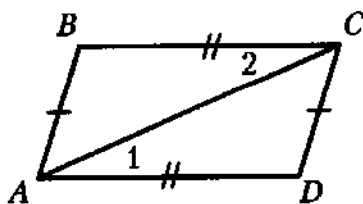


Рис. 70

3.

1. На рисунке 71 $AM = MC$, $AE = DC$, $\angle BDA = \angle FEC$. Докажите, что $AB = FC$.
2. На стороне AC как на основании построены по одну сторону от нее два равнобедренных треугольника ABC и AMC . Докажите, что прямая BM пересекает сторону AC в ее середине.

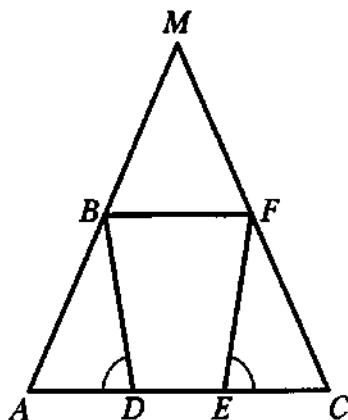


Рис. 71

4.

1. На рисунке 72 $AB = BC$, $AF = KC$, $\angle DKA = \angle EFC$. Докажите, что $AD = EC$.
2. На отрезке AC как на основании построены по разные стороны от него два равнобедренных треугольника ABC и ADC . Докажите, что $BD \perp AC$.

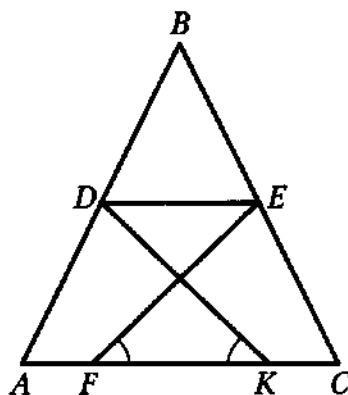


Рис. 72

5.

1. На рисунке 73 $\angle A = \angle D$, $\angle 1 = \angle 2$, $AB = CD$, $EC = 10$ см, $\angle AEC = 90^\circ$. Найдите высоту треугольника BKD , опущенную из вершины B .
2. Отрезок прямой AB точками P и Q делится на три равные части. Вне отрезка AB по одну сторону от него взяты точки C и D так, что $AC = BD$ и $CQ = DP$, $\angle DPB + \angle CQA = 140^\circ$. Найдите углы DPB и CQA .

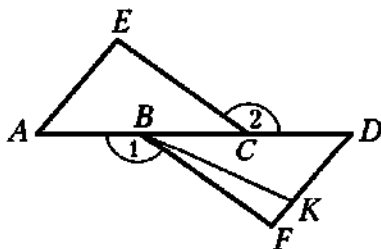


Рис. 73

6.

1. На рисунке 74 $\angle BAC = \angle F$, $\angle 1 = \angle 2$, $AD = CF$, $\angle E = 90^\circ$, $EF = 15$ дм. Найдите высоту треугольника AMC , проведенную из вершины A .
2. Отрезок прямой EF точками K и L делится на три равные части. Вне отрезка EF по разные стороны от прямой EF взяты точки A и B так, что $AE = BF$ и $AL = BK$. Градусные меры углов AEL и KFB относятся как $m:1$. Найдите m .

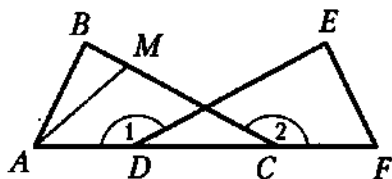


Рис. 74

7.

1. На одной стороне угла с вершиной A отмечены точки D и B , на другой стороне — C и E так, что $AD = AC = 3$ см, $AB = AE = 4$ см. Докажите, что:
 - а) $BC = ED$;
 - б) $KB = KE$, где K — точка пересечения отрезков BC и ED .
2. ABC и $A_1B_1C_1$ — равнобедренные треугольники с основаниями AC и A_1C_1 , точки M и M_1 — середины сторон BC и B_1C_1 , $AB = A_1B_1$, $AM = A_1M_1$. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

8.

1. На одной стороне угла с вершиной B отмечены точки M и O , на другой — K и P так, что $BM = BP$, $BO < BM$, $BK < BP$, а $\angle OPB = \angle KMB$. Докажите, что:
 - а) $MK = OP$;
 - б) $TM = TP$, где T — точка пересечения отрезков MK и OP .
2. AC и A_1C_1 — основания равнобедренных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, точки M и M_1 — середины сторон BC и B_1C_1 , $AC = A_1C_1$, $AB = A_1B_1$. Докажите, что $\triangle ABM = \triangle A_1B_1M_1$.

§ 10*. Равенство треугольников

1.

В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, точки D и D_1 лежат соответственно на сторонах AC и A_1C_1 , причем $CD = C_1D_1$. Докажите, что $\triangle BDC = \triangle B_1D_1C_1$. Сравните отрезки BD и B_1D_1 .

2.

В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, точки D и D_1 лежат соответственно на сторонах AC и A_1C_1 , $\angle DBC = \angle D_1B_1C_1$. Докажите, что $\triangle BDC = \triangle B_1D_1C_1$. Сравните углы BDC и $B_1D_1C_1$.

3.

Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AC . Точки D и E лежат соответственно на сторонах AB и BC , $AD = CE$. DC пересекает AE в точке O . Докажите, что треугольник AOE равнобедренный.

4.

Два равнобедренных треугольника ABC и ADC имеют общее основание AC . Вершины B и D расположены по разные стороны от AC . Точка E лежит на отрезке BD , но не лежит на отрезке AC . Докажите, что $\angle EAC = \angle ACE$.

5.

Два прямоугольных треугольника BOK и COL , где углы BOK и COL прямые, имеют общую вершину O (рис. 75), $O-A-K$, $O-D-L$, $\angle KAB = \angle CDL$, $AO = OD$ и $AK = DL$. Докажите, что $KB = CL$.

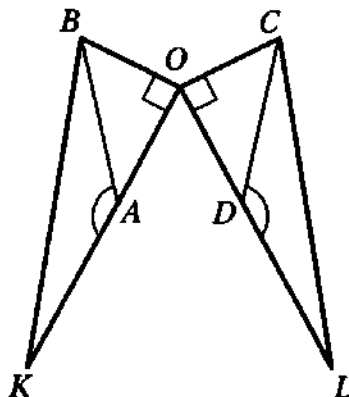


Рис. 75

6.

Отрезки AD и BE пересекаются в точке C , $\angle BAC = \angle DEC$. Углы, смежные с углами ABC и CDE , равны между собой, $AB = DE$.

Докажите, что $\triangle ABE = \triangle ADE$ (рис. 76).

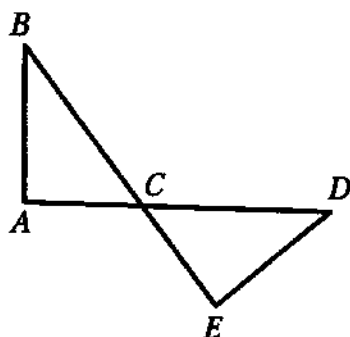


Рис. 76

7.

В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $BC = B_1C_1$, $\angle C = \angle C_1$ и $AB + AC = A_1B_1 + A_1C_1$, BD и B_1D_1 — медианы этих треугольников. Докажите, что $BD = B_1D_1$.

8.

Докажите равенство треугольников по медиане и углам, на которые медиана разбивает угол треугольника.

§ 11. Окружность

1.

1. На рисунке 77 хорды AB и CD равны. Докажите, что $\angle AOB = \angle COD$.
2. Начертите отрезок и луч. На данном луче от его начала отложите отрезок, длина которого в 2 раза больше длины данного отрезка.

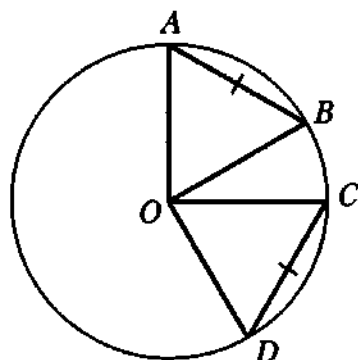


Рис. 77

2.

1. На рисунке 78 $\angle MON = \angle QOP$. Докажите, что хорды MN и QP равны.
2. На данной прямой отметьте две точки так, чтобы расстояние между ними было вдвое больше данного отрезка.

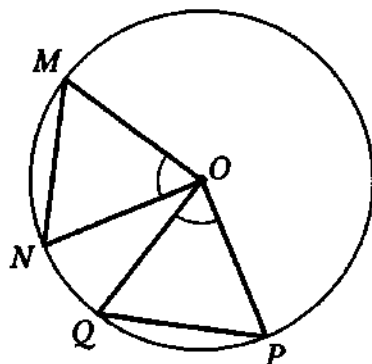


Рис. 78

3.

1. На рисунке 79 $AB = CD$ и точки E и F — середины хорд AB и CD . Докажите, что $OE = OF$.
2. Постройте окружность данного радиуса, которая проходит через данную точку M и центр которой лежит на данной прямой a ($M \notin a$).

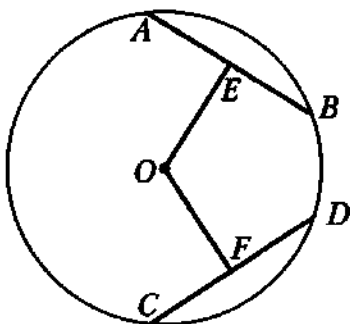


Рис. 79

4.

1. На рисунке 80 $MN = EF$, $OP \perp MN$ и $OD \perp EF$. Докажите, что $OP = OD$.
2. Постройте окружность данного радиуса R , которая проходит через данную точку M и центр которой лежит на данной окружности (точка M не принадлежит данной окружности).

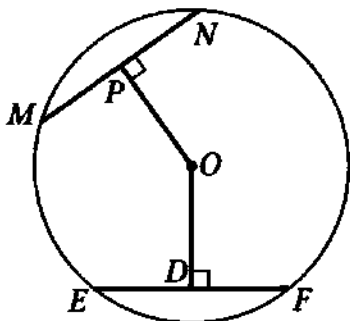


Рис. 80

5.

1. На рисунке 81 $AB = CD$. Докажите, что $AC = BD$.
2. На сторонах угла BAC найдите точки, удаленные от точки M на заданное расстояние a (рис. 82). Рассмотрите возможные случаи в зависимости от длины отрезка a .

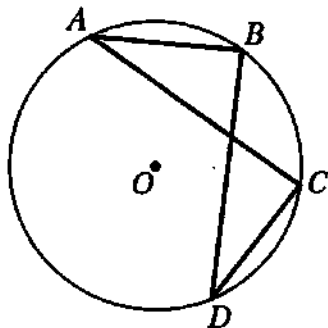


Рис. 81

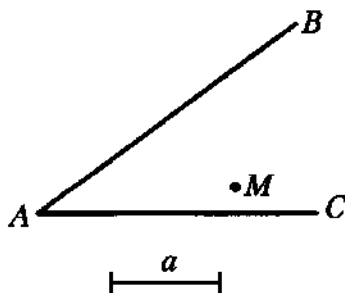


Рис. 82

6.

1. На рисунке 83 $AC = BD$. Докажите, что $AB = CD$.
2. На сторонах угла BAC постройте точки, удаленные от точки M на заданное расстояние b (рис. 84). Рассмотрите возможные случаи в зависимости от длины отрезка b .

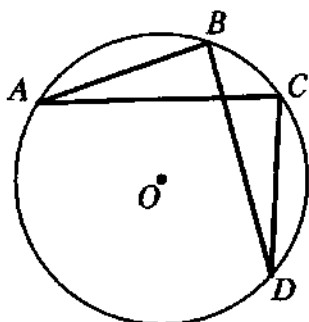


Рис. 83

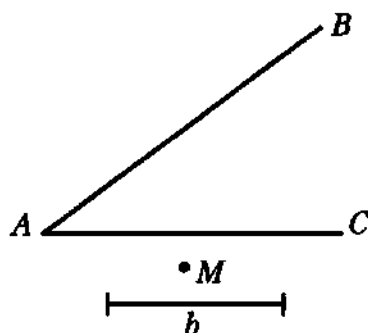


Рис. 84

7.

Отрезок BD — высота треугольника ABC . От вершины B на прямой CB по обе стороны от точки B отложены отрезки BE и BK , равные AB . На AC от точки D отложен отрезок DF , равный DA . Докажите, что точки A, E, K и F лежат на одной окружности.

8.

AB и CD — два диаметра окружности с центром в точке O . Луч OE — биссектриса угла AOC . OE пересекает окружность в точке K , причем $KE = KO$. Периметр треугольника KCO в 3 раза больше радиуса окружности. Докажите, что точки E, A, C и O лежат на одной окружности.

§ 12. Построение циркулем и линейкой

1.

1. Даны острые углы ABC и MON . От стороны AB во внешнюю область угла ABC отложите угол, равный углу MON .
2. Постройте прямой угол и его биссектрису.

2.

1. Даны острый угол MNK и тупой угол ABC . От стороны AB во внутреннюю область угла ABC отложите угол, равный углу MNK .
2. Постройте отрезок, соединяющий середины двух данных отрезков.

3.

1. Начертите произвольный остроугольный треугольник ABC и постройте точку пересечения высоты BD и биссектрисы AL этого треугольника.
2. От данного луча отложите угол, равный $\frac{1}{4}$ данного угла.

4.

1. Начертите произвольный остроугольный треугольник ABC и постройте точку пересечения высоты AD и медианы BM этого треугольника.
2. От данного луча отложите угол, который в полтора раза больше данного угла.

5.

- 1) Постройте угол, равный 135° .
 - 2) От его вершины A на сторонах отложите два равных отрезка AB и AC и постройте окружность, проходящую через точки A , B и C .
2. Дан треугольник ABC . На прямых AC и BC постройте точки X и Y , такие, что $XA = XB$ и $YA = YB$ (рис. 85).

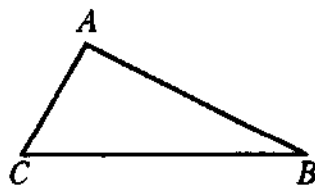


Рис. 85

6.

1. 1) Постройте угол, равный 45° .
2) От его вершины B на сторонах отложите отрезки BA и BC , такие, что $BA = 2BC$. Постройте окружность, проходящую через точки A , B и C .
2. Дан треугольник FEK (рис. 86). На прямых EK и FK постройте точки M и N , такие, что $ME = MF$ и $NE = NF$.

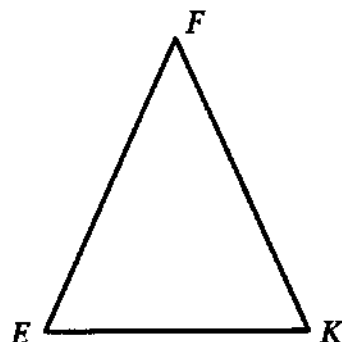


Рис. 86

7.

1. Постройте точку, равноудаленную от точек A и B и удаленную от точки C на расстояние, равное PQ (рис. 87). Выясните число решений этой задачи в зависимости от расположения данных точек и длины отрезка PQ .
2. Как с помощью циркуля и линейки можно разделить угол в 54° на три равные части?

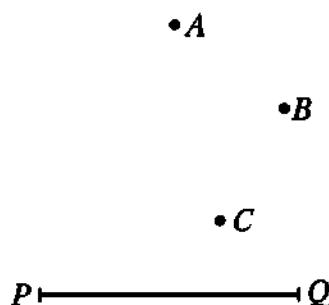


Рис. 87

8.

1. С помощью циркуля и линейки постройте точку M , такую, чтобы она была удалена от точки A на расстояние, равное PQ , и так, чтобы $\angle MEO = \angle MFO$ ($OE = OF$) (рис. 88). Выясните число решений этой задачи в зависимости от длины отрезка PQ .
2. Как с помощью циркуля и линейки можно разделить угол в 35° на 7 равных частей?

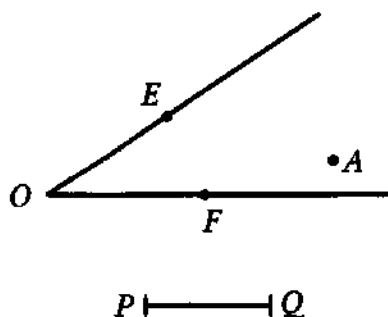


Рис. 88

§ 13. Признаки параллельности двух прямых

1.

1. Параллельны ли прямые a и b (рис. 89), если:

- 1) $\angle 1 = \angle 3$;
- 2) $\angle 1 = \angle 4$;
- 3) $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$;
- 4) $\angle 5 = \angle 6 = 90^\circ$?

2. На рисунке 90 $\triangle ABC = \triangle CDE$, $BC = DE$. Докажите, что $AB \parallel CD$.

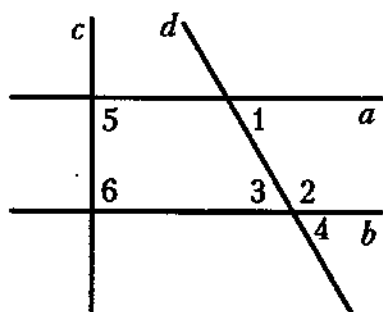


Рис. 89

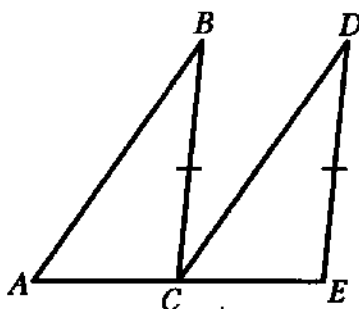


Рис. 90

2.

1. Параллельны ли прямые a и b на рисунке 91, если:

- 1) $\angle 1 = \angle 2 = 90^\circ$;
- 2) $\angle 3 = \angle 4$;
- 3) $\angle 4 = \angle 5$;
- 4) $\angle 4 + \angle 6 = 180^\circ$?

2. На рисунке 92 $\triangle ABD = \triangle ECF$, $AD = CF$. Докажите, что $AB \parallel EF$.

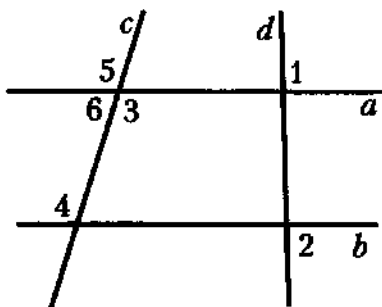


Рис. 91

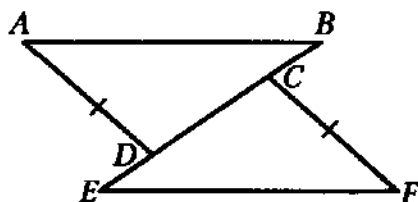


Рис. 92

3.

1. На рисунке 93 $AB = BC$, $\angle A = 60^\circ$, CD — биссектриса угла BCE . Докажите, что $AB \parallel CD$.
2. На рисунке 94 $AB = CD$ и $BC = AD$. Докажите, что $BC \parallel AD$.

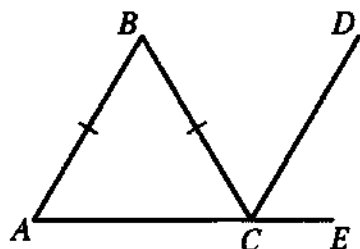


Рис. 93

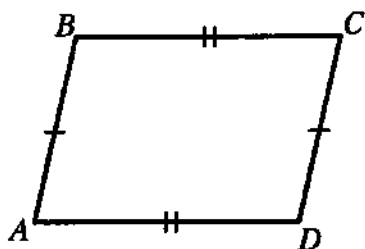


Рис. 94

4.

1. На рисунке 95 $AB = BC$, $\angle A = 30^\circ$, $\angle DCE = \frac{1}{5} \angle BCE$. Докажите, что $AB \parallel CD$.
2. Отрезки BD и AC пересекаются в точке O так, что $AO = OC$ и $BO = OD$. Докажите, что $BC \parallel AD$.

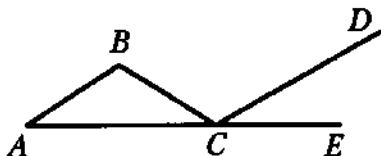


Рис. 95

5.

1. На рисунке 96 $\angle 1 = \angle 2$, $BC = EF$, $AD = CF$. Докажите, что $AB \parallel DE$.
2. На рисунке 97 $\angle 1 = \angle 2$, $BD \perp AC$, AC — биссектриса угла BAE . Докажите, что $BC \parallel AE$.

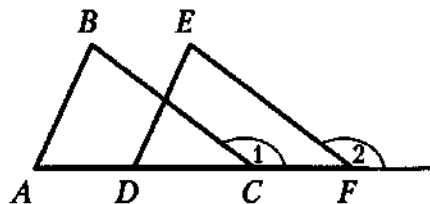


Рис. 96

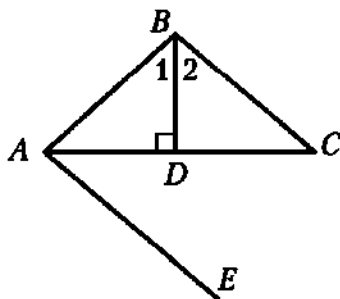


Рис. 97

6.

1. На рисунке 98 $\angle 1 = \angle 2$, $ED = BC$, $EF = AC$. Докажите, что $EF \parallel AC$.
2. На рисунке 99 AC — биссектриса угла BAD , $BE \perp AC$ и $AE = EC$. Докажите, что $AD \parallel BC$.

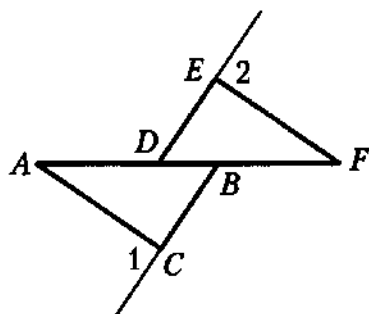


Рис. 98

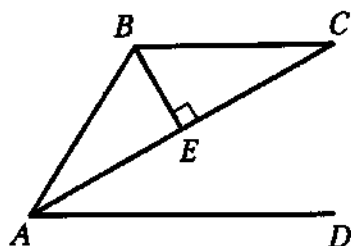


Рис. 99

7.

На рисунке 100 $AM = MD$, $DE = DF$ и $AE = AF$.
Докажите, что $MD \parallel AF$.

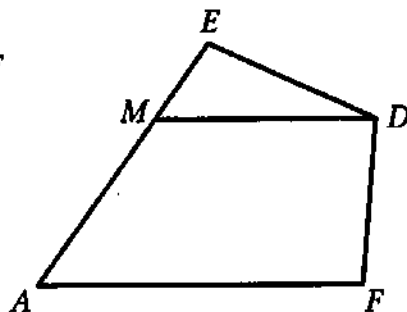


Рис. 100

8.

На рисунке 101 AC — биссектриса угла BAM , $AD = CE$, $BE = BD$, $\angle BDA = \angle BEC$.
Докажите, что $AM \parallel BC$.

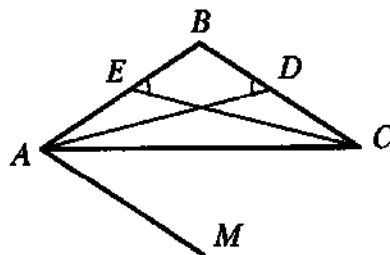


Рис. 101

§ 14. Практические способы построения прямых. Аксиома параллельных прямых и следствие из нее.

1.

1. С помощью угольника и линейки через вершины B и D (рис. 102) проведите прямые a и b , параллельные AC . Будет ли $a \parallel b$? Объясните.
2. На рисунке 103 прямая d пересекает прямую b . Пересечет ли эта прямая прямую a ? Почему?

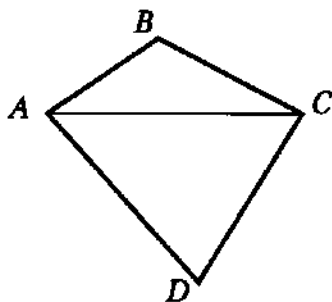


Рис. 102

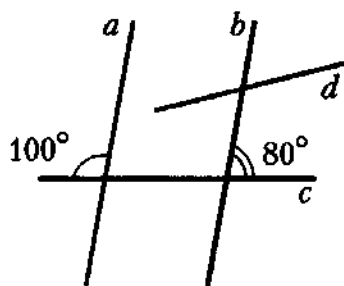


Рис. 103

2.

1. С помощью угольника и линейки проведите через точки A и C (рис. 104) прямые m и n , параллельные BD . Будет ли $m \parallel n$? Дайте объяснение.
2. На рисунке 105 $a \perp c$ и $b \perp c$. Прямая d пересекает прямую a . Пересекает ли эта прямая прямую b ? Почему?

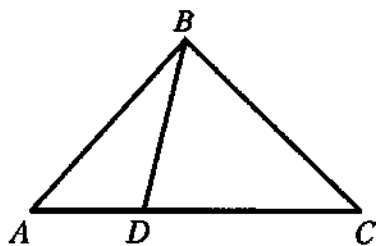


Рис. 104

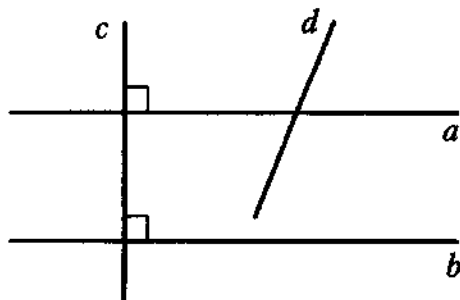


Рис. 105

3.

1. С помощью угольника и линейки через вершины A , B и C проведите прямые a , b и c , параллельные прямой l . Параллельны ли эти прямые между собой? Пересечет ли прямая AC прямую l ? Дайте объяснение (рис. 106).
2. На рисунке 107 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 2 = \angle 3$. Докажите, что $a \parallel c$.

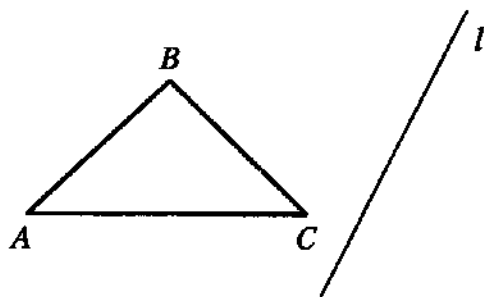


Рис. 106

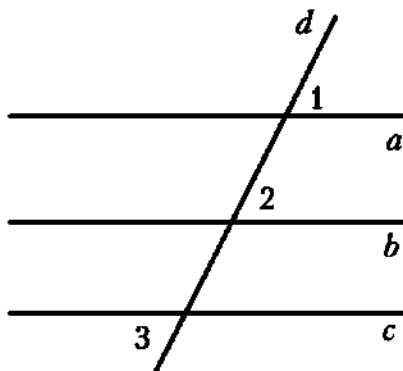


Рис. 107

4.

1. С помощью угольника и линейки через вершины B , A и C треугольника ABC проведите прямые a , b и c , параллельные l (рис. 108). Параллельны ли эти прямые между собой? Пересечет ли эти прямые прямая, проведенная через вершину A и отличная от a ? Почему?
2. На рисунке 109 $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ и $\angle 2 = \angle 3$. Докажите, что $a \parallel c$.

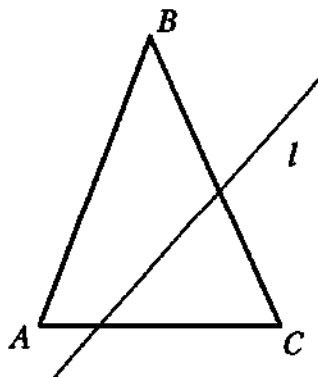


Рис. 108

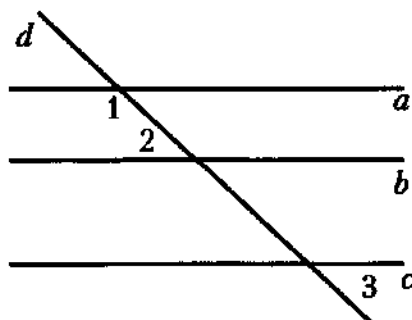


Рис. 109

5.

1. С помощью циркуля и линейки через вершину C треугольника ABC проведите прямую, параллельную AB .
2. Используя данные, приведенные на рисунке 110, выясните, пересекает ли прямая a прямую DE . Ответ поясните.

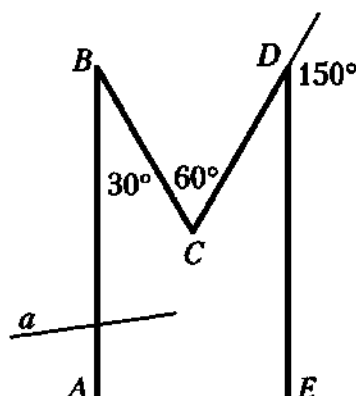


Рис. 110

6.

1. С помощью циркуля и линейки постройте прямую, параллельную одной стороне треугольника и проходящую через середину одной из двух других его сторон.
2. На рисунке 111 прямая m пересекает прямую DE . Пересекает ли эта прямая прямую AB ? Ответ поясните.

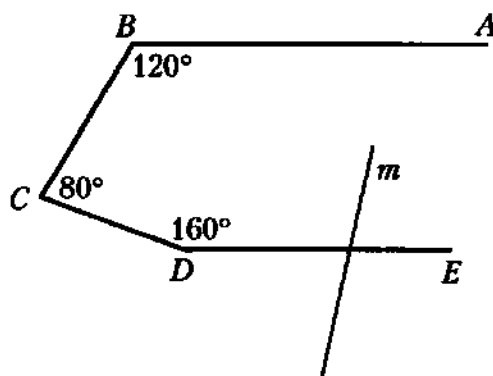


Рис. 111

7.

1. На рисунке 112 $AB = CD$ и $BC = DE$, $\angle ABC = \angle BCD = \angle CDE$. Докажите, что точки A , C и E лежат на одной прямой.
2. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) BD — медиана. Пусть M — середина BC . Пользуясь циркулем и линейкой, постройте прямую, проходящую через точку M и параллельную BD .

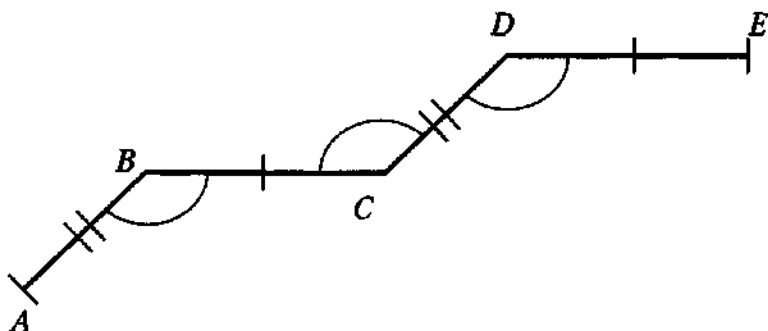


Рис. 112

8.

1. На рисунке 113 $AB = BC = CD = DE$, $\angle ABC = \angle BCD = \angle CDE$. Докажите, что точки A , C и E лежат на одной прямой.
2. В треугольнике ABC BD — биссектриса угла ABC , M — середина AB . Постройте прямую, проходящую через точку M и параллельную BD (используя циркуль и линейку).

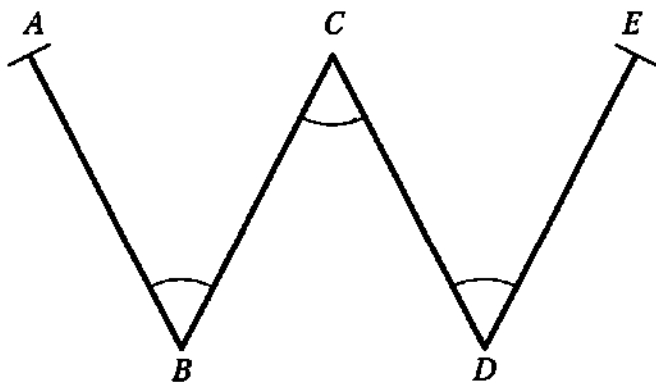


Рис. 113

§ 15. Теоремы об углах, образованных двумя параллельными прямыми и секущей. (Свойства параллельных прямых)

1.

- Один из внутренних односторонних углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых третьей, в 3 раза больше другого. Чему равны эти углы?
- Дан прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$), $E \in AC$, $F \in AB$, причем $EF \parallel CB$, EK — биссектриса треугольника AEF . Чему равен угол AEK ?

2.

- Один из внутренних односторонних углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых третьей прямой, больше другого на 64° . Чему равны эти углы?
- Дан прямоугольный треугольник MEF ($\angle E = 90^\circ$), $C \in ME$, $D \in MF$, причем $CD \parallel EF$, $K \in MD$, $\angle KCD = 40^\circ$. Чему равен угол MCK ?

3.

- На рисунке 114 $AC \parallel BD$ и $AC = AB$, $\angle MAC = 40^\circ$. Найдите $\angle CBD$.
- Отрезки CD и AB пересекаются в точке O так, что $AO = OB$, $AC \parallel DB$. Докажите, что $\triangle AOC = \triangle DOB$.

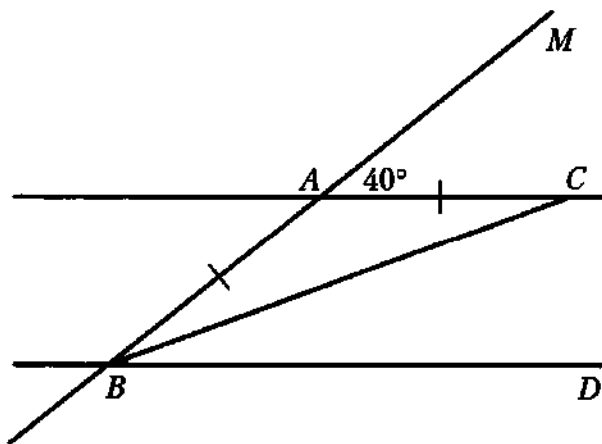


Рис. 114

4.

1. На рисунке 115 $AB \parallel CD$ и $AC = AB$, $\angle BCD = 20^\circ$. Найдите угол CAB .
2. На рисунке 116 $BC = AD$ и $BC \parallel AD$. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle ADC$.

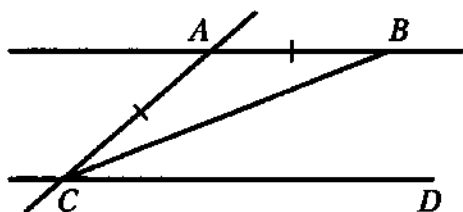


Рис. 115

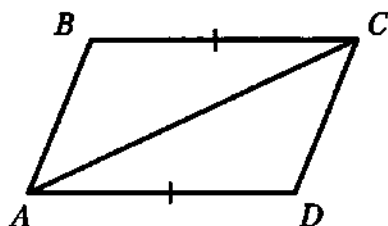


Рис. 116

5.

1. На рисунке 117 $AB = BD = BC$, $BE \parallel DC$. Докажите, что $DC \perp AC$.
2. На рисунке 118 $BE \parallel AF$, $AB \parallel DE$, $AB = CD$. Докажите, что $\triangle BCE = \triangle ADF$.

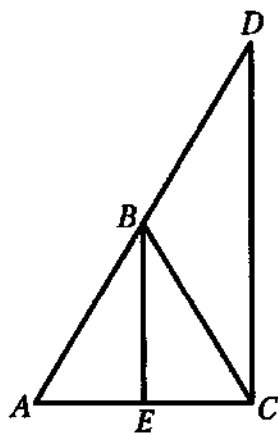


Рис. 117

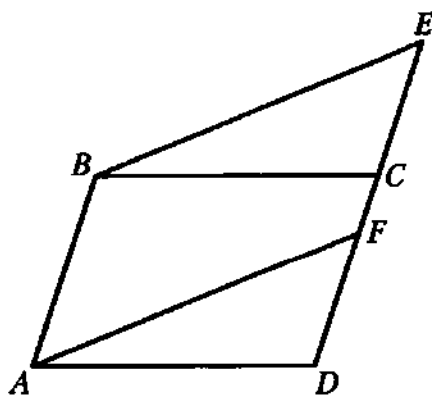


Рис. 118

6.

1. На рисунке 119 $AB = AC$, $AD = DE$, $DE \parallel AC$. Докажите, что $AF \perp BC$.
2. На рисунке 120 $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$, $DF \parallel BE$. Докажите, что $\triangle FAD = \triangle CBE$.

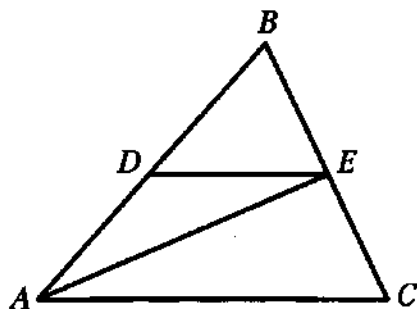


Рис. 119

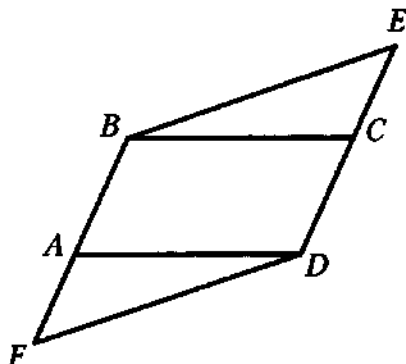


Рис. 120

7.

На прямой MN между точками M и N выбрана точка A и проведены по одну сторону от MN лучи AB , AC и AD . На луче AB выбрана точка K и через нее проведена прямая, параллельная MN и пересекающая лучи AC и AD соответственно в точках P и E , $KP = PA = PE$. Докажите, что $AB \perp AD$.

8.

На отрезке AB взята точка C . Через точки A и B проведены по одну сторону от AB параллельные лучи. На них отложены отрезки $AD = AC$ и $BE = BC$. Точка C соединена отрезками прямых с точками D и E . Докажите, что $DC \perp CE$.

§ 16. Параллельные прямые

1.

- Используя данные на рисунке 121, найдите углы 1, 2 и 3.
- На рисунке 122 $A_1B_1 \parallel AB$, A_1K_1 — биссектриса угла MA_1B_1 , AK — биссектриса угла MAB . Докажите, что $\angle MA_1K_1 = \angle MAK$. Могут ли пересекаться прямые A_1K_1 и AK ?

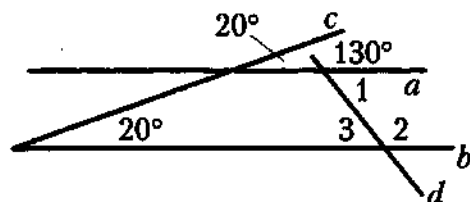


Рис. 121

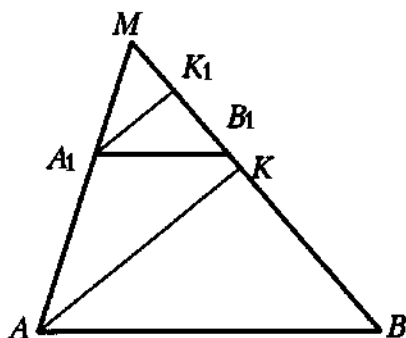


Рис. 122

2.

- Используя данные рисунка 123, найдите углы 1, 2 и 3.
- На рисунке 124 $DE \parallel AC$, EM — биссектриса угла DEC , CN — биссектриса угла BCK . Докажите, что $\angle MEC = \angle ECN$. Имеют ли общие точки прямые ME и CN ?

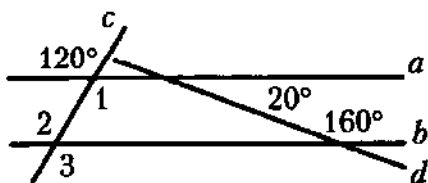


Рис. 123

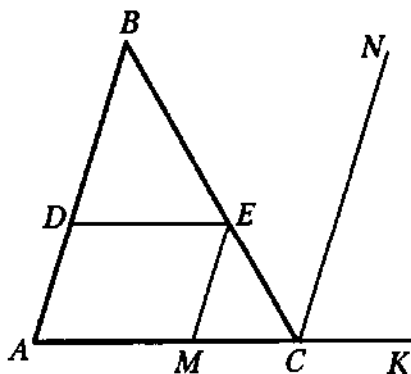


Рис. 124

3.

- Один из углов, образованных при пересечении прямой d прямыми a и b , равен 50° (рис. 125). Может ли один из остальных семи углов равняться 20° ? Почему?
- На рисунке 126 $BA \parallel DE$. Докажите, что $\angle BCD = \angle B + \angle D$.

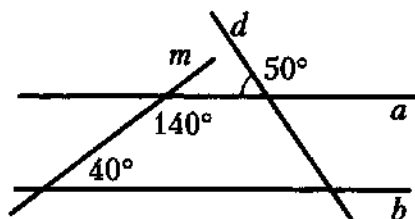


Рис. 125

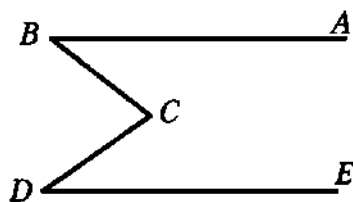


Рис. 126

4.

- Может ли еще один из семи остальных углов, образованных при пересечении прямых a и b прямой d (рис. 127), быть равен 110° ? Равен 60° ? Почему?
- На рисунке 128 $BA \parallel DE$, $\angle CBA = 140^\circ$, $\angle CDE = 130^\circ$. Докажите, что $BC \perp CD$.

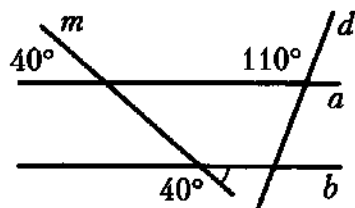


Рис. 127

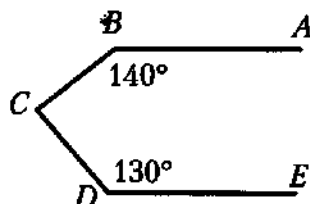


Рис. 128

5.

- На рисунке 129 $\angle BED = 70^\circ$, $\angle EDC = 20^\circ$, $AB \parallel CD$. Найдите угол ABC .
- Внутри треугольника ABC отмечена точка F . Через нее проведены прямые, параллельные сторонам AC и AB и пересекающие сторону BC соответственно в точках M и E , $FM = MC$, $FE = EB$. Докажите, что F — точка пересечения биссектрис треугольника ABC .

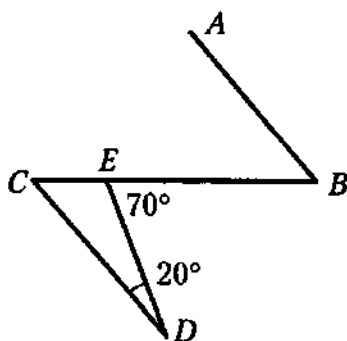


Рис. 129

6.

1. На рисунке 130 $AB \parallel CD$, $\angle ABC = 30^\circ$, $\angle CDE = 40^\circ$.

Найдите угол BED .

2. Внутри треугольника ABC выбрана точка M . Через нее проведена прямая, параллельная AC и пересекающая стороны AB и BC соответственно в точках D и E , причем $MD = AD$ и $ME = EC$. Докажите, что M — точка пересечения биссектрис треугольника.

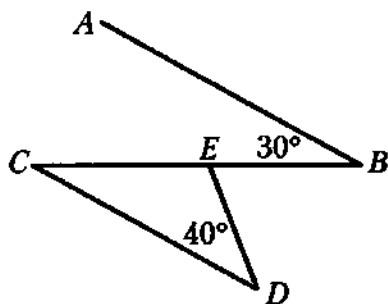


Рис. 130

7.

На рисунке 131 BD — медиана треугольника ABC , причем $AB = 2BD$. Докажите, что BC — биссектриса угла DBF .

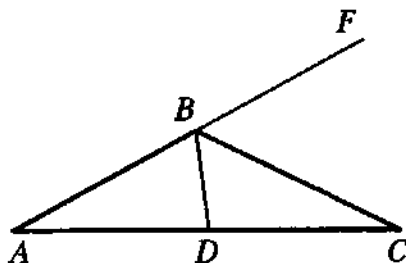


Рис. 131

8.

На рисунке 132 $AB = BC$, $AO = OD$ и $BO = OC$. Докажите, что BD — биссектриса $\angle EBC$.

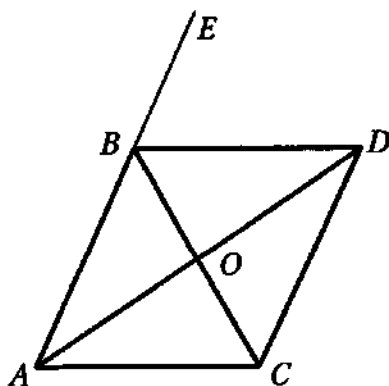


Рис. 132

§ 17. Теорема о сумме углов треугольника.

Остроугольный, прямоугольный и тупоугольный треугольники

1.

1. Могут ли углы треугольника быть равными $60^\circ 13'$, $69^\circ 48'$, 50° ?
2. Внешний угол треугольника больше углов, не смежных с ним, соответственно на 60° и 50° . Является ли этот треугольник остроугольным?

2.

1. Внешний угол треугольника равен 150° . Могут ли два его угла быть равными $90^\circ 31'$ и $58^\circ 42'$?
2. Первый угол треугольника на 30° меньше второго и на 30° больше третьего. Является ли этот треугольник прямоугольным?

3.

1. В треугольнике ABC $AB = BC$, $\angle B = 80^\circ$. Биссектрисы углов A и C пересекаются в точке M . Найдите угол AMC .
2. В треугольнике ABC $\angle C = 15^\circ$. На стороне AC отмечена точка D так, что $\angle ABD = 12^\circ$, $\angle ADB = 80^\circ$. Докажите, что треугольник ABC не является прямоугольным.

4.

1. Сторона AB треугольника ABC продолжена за точку B . На продолжении отмечена точка D так, что $BC = BD$. Найдите угол ACD , если $\angle ACB = 60^\circ$, $\angle ABC = 50^\circ$.
2. В треугольнике ABC биссектрисы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O , $\angle ABC = 30^\circ$, $\angle AOB = 107^\circ$. Докажите, что треугольник ABC не является остроугольным.

5.

1. На сторонах угла A , равного 45° , отмечены точки B и C , а во внутренней области угла — точка D так, что $\angle ABD = 95^\circ$, $\angle ACD = 90^\circ$. Найдите угол BDC .
2. В треугольнике ABC $\angle B = 60^\circ$. Внутри треугольника отмечена точка O , равноудаленная от его вершин. Докажите, что треугольник AOC является тупоугольным.

6.

1. На сторонах угла A , равного 127° , отмечены точки B и C , а внутри угла — точка D так, что $\angle ABD = 25^\circ$, $\angle ACD = 19^\circ$. Найдите угол BDC .
2. Треугольники ABC и DAC имеют общую сторону AC . Отрезок BD пересекает отрезок AC . Известно, что $BD = AD = CD$. Докажите, что треугольник ADC является тупоугольным, если $\angle ABC = 130^\circ$.

7.

1. В треугольнике ABC угол B тупой. Внутри треугольника отмечены точки O и P . На луче PC вне треугольника взята точка D . Существует ли расположение точек O и P , при котором $\angle ABO \geq \angle ACD$?
2. В треугольнике ABC $AC = BC$, D — точка пересечения биссектрис треугольника, а O — точка, равноудаленная от всех вершин треугольника. Известно, что отрезок OD пересекает сторону AB в точке E и точкой пересечения делится пополам. Найдите углы треугольника ABC .

8.

1. В треугольнике ABC угол B тупой. Можно ли внутри треугольника отметить точки O и P так, чтобы угол OBC был не меньше угла APC ?
2. В треугольнике ABC $AB = BC$. Биссектрисы внешних углов при вершинах A и C лежат на прямых, пересекающихся в точке O . Может ли выполняться равенство $AO = OB = OC$?

§ 18. Теорема о соотношении между сторонами и углами треугольника

1.

1. Даны треугольники ABC и MPK , $AB = MP = 5$ см, $AC = MK = 3$ см, $\angle A = \angle M$. Сравните углы B и K .
2. В треугольнике ABC $\angle A = \angle C$, M — середина стороны AC . Найдите угол AMB .

2.

1. Даны треугольники ABC и MPK , $AC = MK$, $\angle A = \angle M = 60^\circ$, $\angle C = \angle K = 50^\circ$. Сравните отрезки AB и PK .
2. В треугольнике ABC $\angle A = \angle B$, CE — биссектриса. Сравните отрезки AE и BE .

3.

1. В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$. Точка M лежит на стороне AC . Докажите, что $BC < BM < AB$.
2. В треугольнике ABC $AB = BC$. На продолжении сторон AC и BC за вершину C отмечены точки D и E соответственно. Известно, что $DE \parallel AB$. Докажите, что треугольник CDE равнобедренный.

4.

1. CM — медиана треугольника ABC , $\angle CMA = 90^\circ$. Докажите, что $\angle CMB > \angle CAB > \angle ACM$.
2. В треугольнике ABC $AC = BC$. Отрезки BC и BA продолжены за вершины C и A . На продолжениях отмечены точки E и D соответственно. Известно, что $DE \parallel AC$. Докажите, что треугольник BDE равнобедренный.

5.

1. В треугольнике ABC BD — медиана, $\angle ABD < \angle BAC + \angle BCA$. Докажите, что $BD > 0,5BC$.
2. Дан треугольник ABC . Прямая CD параллельна биссектрисе внешнего угла треугольника при вершине B и пересекает сторону AB в точке D . Из точки D к прямой BC проведен перпендикуляр DK . Сравните отрезки DK и BC .

6.

1. В треугольнике ABC BD — медиана, $AB > 2BD$. Докажите, что $\angle BAC + \angle BCD < \angle DBC$.
2. В треугольнике ABC через вершину C проведена прямая, параллельная биссектрисе BD и пересекающая прямую AB в точке K . BE — высота треугольника ABC . Сравните отрезки BE и BK .

7.

1. Отрезки AC и BD пересекаются во внутренней точке так, что $AB > AC$. Докажите, что $BD > CD$.
2. В треугольнике ABC медианы пересекаются в точке M . Известно, что $\angle MAB = \angle MBA$, $\angle MCB = \angle MBC$. Найдите угол ABC .

8.

1. Внутри треугольника ABC взята точка D . Известно, что $\angle BCD + \angle BAD > \angle DAC$. Докажите, что $AC > DC$.
2. В тупоугольном треугольнике ABC продолжения высот пересекаются в точке O так, что $\angle BOC = \angle BCO$, $\angle BOA = \angle BAO$. Найдите угол BCA .

§ 19. Неравенство треугольников

1.

1. Можно ли из проволоки длиной 12 см согнуть равнобедренный треугольник с боковой стороной в 3 см?
2. На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены точки D и E , причем точка D является серединой отрезка AB , $AE = 12$ см, $DE = 1$ см. Может ли длина отрезка AB быть равной 27 см?

2.

1. Можно ли из проволоки длиной 15 см согнуть равнобедренный треугольник с основанием 8 см?
2. На продолжении стороны AB треугольника ABC за вершину B отмечена точка D , $AC = 18$ см, $BC = 5$ см. Может ли отрезок AD быть равным 12 см?

3.

1. Расстояние между центрами двух окружностей (рис. 133) равно 10 см. Может ли радиус окружности с центром O_1 быть равным 5 см, а радиус окружности с центром O_2 быть равным 3 см?
2. Треугольники ABD и BCD расположены по разные стороны от прямой BD , $\angle ABD = \angle BDC$, $\angle ADB = \angle DBC$. Докажите, что $BD + BC > AB$.

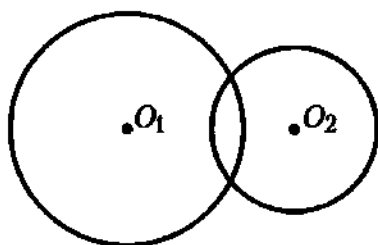


Рис. 133

4.

1. Радиус окружности, изображенной на рисунке 134, равен 6 см. Отрезок AB пересекает окружность, $AO = 13$ см. Может ли отрезок AB равняться 4 см?
2. Треугольники ABD и BCD расположены по разные стороны от прямой BD , $\angle ADB = \angle BDC$, $\angle ABD = \angle DBC$. Докажите, что $BD < AB + BC$.

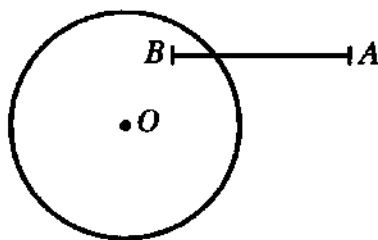


Рис. 134

5.

1. В треугольнике ABC BB_1 — медиана. Докажите, что $BB_1 < 0,5 (AB + BC)$.
2. В треугольнике ABC $\angle A = 40^\circ$, $\angle B = 70^\circ$. Из вершины C вне треугольника проведен луч CD так, что угол BCD равен $109^\circ 59'$. Может ли выполняться равенство $AD = AC + CD$?

6.

1. В треугольнике ABC BB_1 — медиана. Докажите, что $BB_1 > 0,5 (AB - BC)$.
2. В треугольнике ABC $\angle A = 35^\circ$, $\angle B = 71^\circ$. На продолжении стороны AC за вершину C взята точка D . Из вершины C проведен луч CE так, что точки E и B лежат по разные стороны от прямой AD и $\angle ECD = 74^\circ 1'$. Может ли выполняться равенство $BE + CE = BC$?

7.

1. Докажите, что сумма двух медиан треугольника больше полусуммы двух сторон, к которым эти медианы проведены.
2. Внутри равностороннего треугольника ABC отмечена точка E . Докажите, что $EA < EB + EC$.

8.

1. Отрезки AC и BD пересекаются во внутренней точке. Докажите, что $2(BD + AC) > BC + AD + AB + CD$.
2. Вне равностороннего треугольника ABC отмечена точка E , а внутри его — точка M . Докажите, что $MA < BE + EC$.

§ 20. Сумма двух острых углов прямоугольного треугольника. Прямоугольный треугольник с углом в 30°

1.

- На рисунке 135 $\angle BAD = \angle BCD = 90^\circ$, $\angle ADB = 15^\circ$, $\angle BDC = 75^\circ$. Докажите, что $AB \parallel DC$.
- В треугольнике ABC , $\angle C = 60^\circ$, $\angle B = 90^\circ$. Высота BB_1 равна 2 см. Найдите BA .

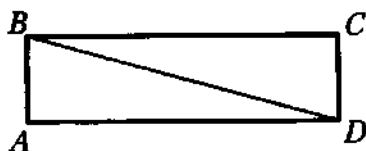


Рис. 135

2.

- На рисунке 136 $\angle AOD = 90^\circ$, $\angle OAD = 20^\circ$, $\angle OCB = 70^\circ$. Докажите, что $AD = CB$.
- В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, CC_1 — высота, $CC_1 = 5$ см, $BC = 10$ см. Найдите угол CAB .

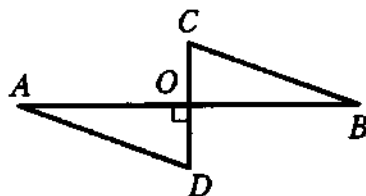


Рис. 136

3.

- На рисунке 137 $\angle BAC = \angle DEC = 90^\circ$, $\angle ABC = 55^\circ$, $\angle CDE = 35^\circ$. Докажите, что $BC \perp CD$.
- В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, внешний угол при вершине B равен 150° , AA_1 — биссектриса, $AA_1 = 20$ см. Найдите A_1C .

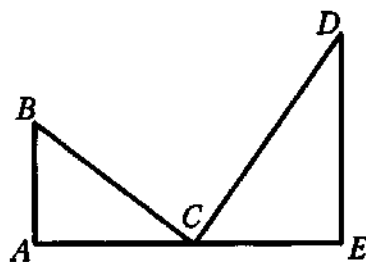


Рис. 137

4.

- На рисунке 138 $\angle ABC = \angle CDE = 90^\circ$, $\angle BAC = 46^\circ$, $\angle CED = 44^\circ$. Докажите, что $BC \perp CD$.
- В треугольнике ABC $\angle B = 90^\circ$, CC_1 — биссектриса, $CC_1 = 16$ см, $BC_1 = 8$ см. Найдите внешний угол при вершине A .

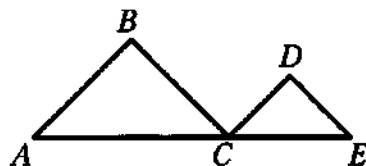


Рис. 138

5.

1. В треугольнике ABC угол ACB тупой. Продолжения высот AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O . Докажите, что $\angle ABC = \angle AOC$ и $\angle OAC = \angle OBC$.
2. В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, CD — высота треугольника, $BC = 2BD$. Докажите, что $AD = 3DB$.

6.

1. В треугольнике ABC угол B тупой. Продолжения высот AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в точке O . Докажите, что $\angle ABC = 180^\circ - \angle AOC$.
2. В треугольнике ABC $\angle B = 90^\circ$, BD — высота, $AB = 2BD$. Докажите, что $3AC = 4AD$.

7.

1. В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, $\angle B = 40^\circ$. На сторонах AB и BC отмечены точки D и E соответственно, $\angle EAD = 5^\circ$, $\angle ECD = 10^\circ$. Найдите $\angle EDC$.
2. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC взята точка E , а внутри треугольника — точка D . Перпендикуляр EM к прямой AC делит катет AC пополам, $\angle B = 45^\circ$, $\angle CDA = 90^\circ$, $\angle DCA = 60^\circ$. Докажите, что $EM = DC$.

8.

1. В треугольнике ABC $\angle B = 90^\circ$. Из точки D , взятой на стороне BC , проведен отрезок DE , перпендикулярный к BC и пересекающий AC в точке O , $\angle DOC = 70^\circ$, $\angle DEC = 45^\circ$, $\angle BAD = 50^\circ$. Найдите угол AED .
2. В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, $\angle B = 45^\circ$. Отрезок CE пересекает сторону AB , $\angle CEA = 90^\circ$. На сторонах AB и AC взяты точки P и M так, что M — середина AC и $PM \perp AC$, $PM = EA$. Найдите угол EAC .

§ 21. Признаки равенства прямоугольных треугольников

1.

1. На рисунке 139 диаметры AB и CD окружности лежат на перпендикулярных прямых, $MO = EO$. Докажите, что $AM = BE$.
2. Внутри неразвернутого угла A взята точка D . Из этой точки проведены перпендикуляры DB и DC к сторонам угла. $\angle ADB = \angle ADC$. Докажите, что луч AD — биссектриса угла A .

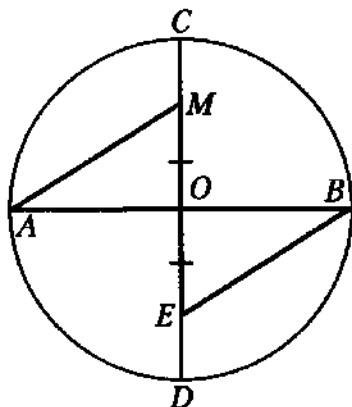


Рис. 139

2.

1. На рисунке 140 O — центр окружности. Через концы отрезка AB проведены прямые AD и BC , перпендикулярные к прямой AB . Докажите, что $\angle ADO = \angle OCB$.
2. Два прямоугольных треугольника ABC и ABD имеют общую гипотенузу AB и лежат по разные стороны от нее. Известно, что $AD = BC$. Докажите, что $\angle CAB = \angle DBA$.

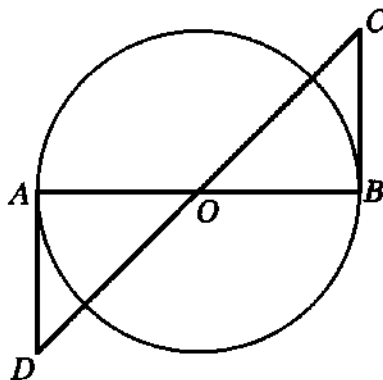


Рис. 140

3.

1. На сторонах AB и BC треугольника ABC отмечены точки D и E соответственно. Из этих точек к прямой AC проведены перпендикуляры DK и EP , причем $AK = PC$ и $DK = PE$. Докажите, что $AB = BC$.
2. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны, причем $BC = B_1C_1$, $BA = B_1A_1$. Докажите, что высоты BD и B_1D_1 треугольников равны.

4.

1. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты точки D и E соответственно. Из этих точек опущены перпендикуляры DK и EP к прямой AC , $DK = EP$, $\angle ADK = \angle PEC$. Докажите, что $AB = BC$.
2. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны, причем высота BD треугольника ABC равна высоте B_1D_1 треугольника $A_1B_1C_1$, $\angle C = \angle C_1$. Докажите, что $\angle A = \angle A_1$.

5.

1. Через середину стороны AB треугольника ABC проведена прямая, перпендикулярная к AB , пересекающая BC в точке E . $BC = 24$ см, периметр треугольника AEC равен 30 см. Найдите AC .
2. Две биссектрисы треугольника пересекаются в точке O . Докажите, что третья биссектриса проходит через точку O .

6.

1. Через точку K , взятую на стороне AB треугольника ABC , проведена прямая, перпендикулярная AB и пересекающая сторону AC в точке D . Известно, что $\angle KDB = \angle KDA$, $AC = 30$ см, $BC = 15$ см. Найдите периметр треугольника BDC .
2. Докажите, что биссектриса угла A треугольника ABC проходит через точку пересечения прямых, содержащих биссектрисы внешних углов при вершинах B и C .

7.

1. В треугольнике ABC высоты AA_1 и CC_1 равны, $AC_1 = BA_1$. Найдите угол B .
2. На рисунке 141 $\angle ABC = 35^\circ$, $\angle BAC = 55^\circ$, $\angle AM_1M = 90^\circ$. Точки A_1 и B_1 — середины отрезков BC и AC соответственно, $AA_1 = AM$, $BB_1 = B_1K$. Докажите, что $AM_1 = BA_1$.

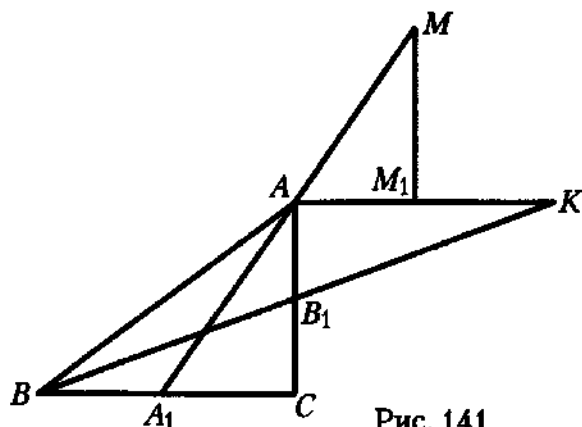


Рис. 141

8.

1. В треугольнике ABC высоты AA_1 и CC_1 пересекаются в точке O , $\angle BAA_1 = \angle ACC_1$, $A_1O = C_1O$. Докажите, что $AC = 2BA_1$.
2. На рисунке 142 $\angle ABC = 50^\circ$, $\angle BAC = 40^\circ$, $\angle AM_1M = 90^\circ$, $AM_1 = BA_1$, $A_1A = AM$. Докажите, что $DC_1 = C_1C$, если точки A_1 и C_1 — середины BC и AB соответственно.

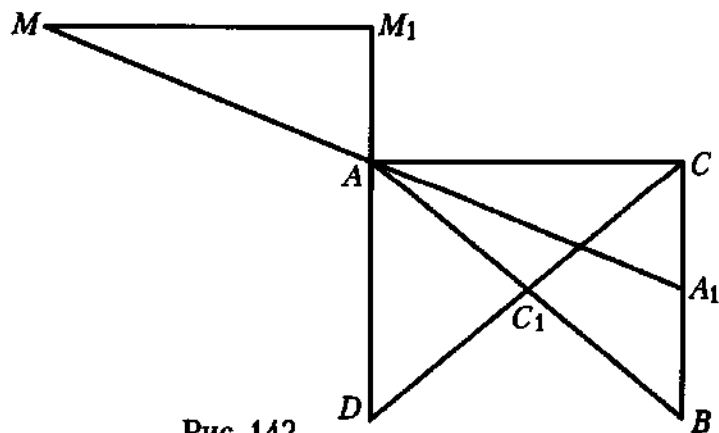


Рис. 142

§ 22. Перпендикуляр и наклонная.

Расстояние от точки до прямой.

Расстояние между параллельными прямыми

1.

1. Даны две параллельные прямые a и b . На прямой a взяты точки A и B , из которых к прямой b проведена наклонная AC и перпендикуляр BD . Сравните отрезки AC и BD .
2. В треугольнике ABC $\angle C = 30^\circ$, $AC = 10$ см, $BC = 8$ см. Через вершину A проведена прямая a , параллельная BC . Найдите:
 - а) расстояние от точки B до прямой AC ;
 - б) расстояние между прямыми a и BC .

2.

1. По разные стороны от прямой a взяты точки A и B , равноудаленные от этой прямой. Из точки A к прямой a проведена наклонная AC , а из точки B — перпендикуляр BD . Сравните отрезки AC и BD .
2. В треугольнике MKP сторона MP равна 20 см. Расстояние от точки K до прямой MP равно $\frac{1}{2}KP$. Через точку M проведена прямая x , параллельная KP . Найдите:
 - а) угол MPK ;
 - б) расстояние между прямыми x и KP .

3.

1. Из точки A к некоторой прямой проведены две наклонные AB и AC и перпендикуляр AD так, что точка D лежит на отрезке BC , $\angle DAC = 45^\circ$. Сравните отрезки AB и DC .
2. Через концы A и B отрезка AB проведены параллельные прямые a и b соответственно. Прямые AB и b не перпендикулярны. C — середина отрезка AB . Докажите:
 - а) что точка C находится на одинаковом расстоянии от прямых a и b .
 - б) что сумма расстояний от точки C до прямых a и b равна расстоянию между этими прямыми.

4.

1. Из точки M к прямой a проведены две наклонные MP и ME и перпендикуляр MK так, что луч MK проходит внутри угла PME . $\angle PEM = 50^\circ$. Сравните отрезки PM и KE .
2. Точка C — середина отрезка AB . Через точки C и B проведены параллельные прямые c и b соответственно так, что прямые AB и b не перпендикулярны.
 - а) Докажите, что расстояние от точки A до прямой c равно расстоянию от точки C до прямой b .
 - б) Докажите, что расстояние от точки A до прямой b вдвое больше расстояния между прямыми b и c .

5.

1. Из точки A к некоторой прямой проведены перпендикуляр AB и наклонная AC , а из точки D — наклонная DE так, что отрезки DE и AB пересекаются в точке O , $OD = OB$, $\angle OAD + \angle BOE = 90^\circ$. Сравните отрезки AC и DE .
2. В треугольнике ABC $\angle A = 70^\circ$, $\angle B = 80^\circ$, BE — биссектриса. Через точку E проведена прямая a , параллельная BC , $EC = x$.
 - а) Найдите расстояние между прямыми a и BC .
 - б) Найдите расстояние от точки E до прямой AB .

6.

1. Из точки M к прямой a проведен перпендикуляр MP , а из точки K — наклонная KH . Отрезки MP и KH пересекаются в точке O , $OH = OM$, $\angle OMK < \angle ONP$. Докажите, что отрезок NK меньше любой наклонной, проведенной из точки M к прямой a .
2. В треугольнике ABC проведена медиана BM , $AM = BM = MC = x$. Через точку M проведена прямая, параллельная прямой BC .
 - а) Найдите расстояние от точки A до прямой BC .
 - б) Найдите расстояние между прямыми a и BC .

7.

1. Из точки A к некоторой прямой проведены наклонные AB и AC и перпендикуляр AD так, что точка C является серединой отрезка BD . Может ли выполняться неравенство $AB > 2AC$?
2. В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$. На стороне AB взята точка M так, что $AB = 3AM$. Через точку M проведена прямая a , параллельная AC . Докажите, что расстояние от точки B до прямой a вдвое больше расстояния между прямыми a и AC .

8.

1. Из точки A к некоторой прямой проведены перпендикуляр AC и наклонная AB . Точки E и D принадлежат отрезкам AB и AC соответственно. Докажите, что $ED < AB$.
2. В треугольнике MKP $\angle P = 90^\circ$. Через точки A и B , взятые на сторонах MK и KP соответственно, проведена прямая AB , параллельная MP . Расстояние между прямыми AB и MP вдвое больше расстояния от точки K до прямой AB . Докажите, что $MP = 3AB$.

§ 23*. Множество точек, равноудаленных от данной прямой

1.

1. Середина отрезка AB перемещается по некоторой прямой a так, что прямые AB и a в любой момент времени взаимно перпендикулярны (рис. 143). Что представляет собой фигура, которую описывают точки A и B ?

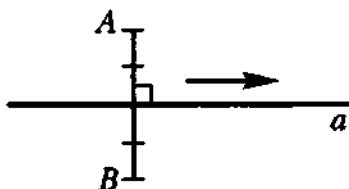


Рис. 143

2. Даны неразвернутый угол ABC и отрезок QP . На стороне BA угла ABC постройте точку, удаленную от прямой BC на расстояние QP .

2.

1. Сторона AB треугольника ABC перемещается вдоль некоторой прямой, на которой она расположена (рис. 144). Что представляет собой фигура, которую описывает вершина C ?

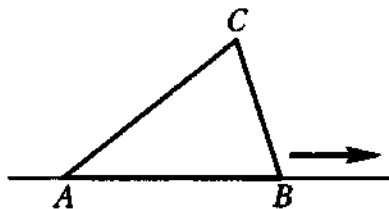


Рис. 144

2. Даны треугольник ABC и точка M , лежащая на стороне BC . На стороне AB постройте точку, удаленную от прямой AC на то же расстояние, что и точка M .

3.

1. На рисунке 145 точки A и B равноудалены от прямой CD , а точки A и D — от прямой BC . Докажите, что $AB = CD$.

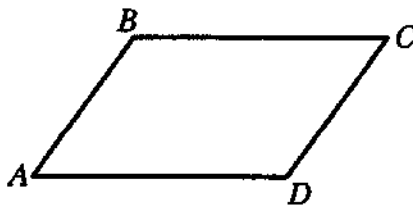


Рис. 145

2. Даны прямая a , точка A , не лежащая на этой прямой, и отрезок OP , больший, чем перпендикуляр, опущенный из точки A на прямую a . Постройте точки, удаленные от прямой a и точки A на расстояние, равное отрезку OP .

4.

1. На рисунке 146 точки P и K равноудалены от прямой ME , а точки K и E равноудалены от прямой MP . Докажите, что $\angle MPK = \angle MEK$.
2. Даны прямая a , точка A , взятая на этой прямой, и отрезки OP и KM ($KM > OP$). Постройте точку B , удаленную от прямой a на расстояние, равное OP , так, чтобы $AB = KM$.

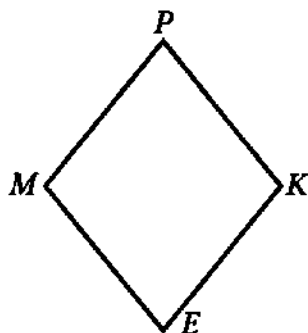


Рис. 146

5.

1. На рисунке 147 точки B и C равноудалены от прямой AD , $BO = OC$. Докажите, что треугольники ABC и CBD равны.
2. Даны неразвернутый угол и отрезок. Внутри данного угла постройте точку, удаленную от сторон угла на расстояние, равное данному отрезку.

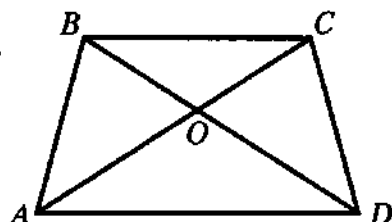


Рис. 147

6.

1. На рисунке 148 точки M и T равноудалены от прямой PK . $\angle KMT = \angle PTM$. Докажите, что треугольники PMK и PKT равны.
2. Даны прямая a , точка A , не лежащая на данной прямой, и некоторый отрезок. (Точка A удалена от прямой a на расстояние, меньшее удвоенной длины данного отрезка.) Постройте точки, удаленные от прямой a и точки A на расстояние, равное данному отрезку.

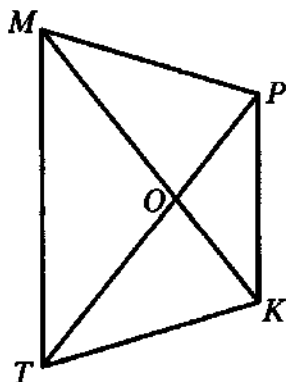


Рис. 148

7.

1. На рисунке 149 точки B и E равноудалены от прямой AD , а точки C и M — середины отрезков AD и BC соответственно. Докажите, что $BC = ED$.
2. Даны две точки A и B , отрезок PO . Постройте точки, удаленные от прямой AB на расстояние PO и равноудаленные от концов отрезка AB .

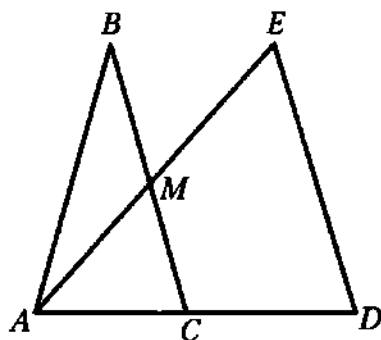


Рис. 149

8.

1. На рисунке 150 $AB = BC$, точки B и D равноудалены от прямой AC . Докажите, что $2BC < AD + DC$.
2. Дан угол ABC , через вершину которого вне угла проведена прямая a , и отрезок PO . Внутри угла ABC постройте точку, удаленную от прямой a на расстояние PO и равноудаленную от прямых AB и BC .

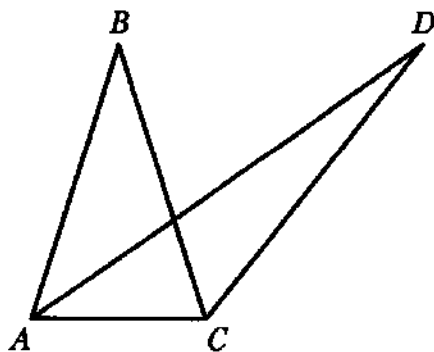


Рис. 150

§ 24. Построение треугольника по трем элементам

1.

1. Дан треугольник MPK . Постройте треугольник ABC , в котором $\angle A = \angle M$, $AB = MP$, $AC = 2MK$.
2. Постройте равносторонний треугольник, у которого сторона вдвое меньше данного отрезка.

2.

1. Дан треугольник $МКР$. Постройте треугольник ABC , в котором $\angle A = \angle M$, $\angle B = \angle K$, $AB = 2MK$.
2. Постройте равнобедренный треугольник, у которого боковая сторона равна данному отрезку, а основание в 2 раза меньше боковой стороны.

3.

1. Даны неразвернутый угол и отрезок. Постройте треугольник, у которого одна сторона в 2 раза больше другой и равна данному отрезку, а угол, заключенный между этими сторонами, равен данному углу.
2. Постройте остроугольный равнобедренный треугольник по основанию и разности двух неравных сторон.

4.

1. Даны два острых угла и отрезок. Постройте треугольник, у которого сторона равна половине данного отрезка, а прилежащие к ней углы — двум данным углам.
2. Постройте равнобедренный треугольник по периметру и боковой стороне.

5.

1. Постройте треугольник ABC со стороной AB , равной данному отрезку, и с углами A и C , равными 60° и 105° соответственно.
2. В треугольнике ABC биссектрисы BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O . Постройте треугольник ABC по отрезкам OB_1 , OC , B_1C .

6.

1. Постройте треугольник ABC со сторонами AB и AC , равными соответственно данным отрезкам, так, чтобы $\angle B = 120^\circ$, $\angle C = 45^\circ$.
2. В треугольнике ABC высоты пересекаются в точке O . Постройте этот треугольник по отрезкам OA , BO , AB .

7.

1. Даны прямая a и отрезок AB , пересекающий эту прямую. Постройте на прямой a точку C так, чтобы эта прямая содержала биссектрису угла треугольника ABC .
2. На сторонах AB , BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки M , P , K так, что $MK \parallel BC$, $PK \parallel AB$. Как построить треугольник ABC по отрезкам KM , KB , KP и углу PKC ?

8.

1. Даны угол A и точка M внутри него. Постройте на сторонах угла точки B и C так, чтобы отрезок AM был медианой треугольника ABC .
2. Даны отрезки PQ , P_1Q_1 , P_2Q_2 и угол hk . Как построить треугольник ABC , в котором отрезок AM , равный PQ , лежал бы на стороне AB , отрезок CE , равный P_1Q_1 , — на стороне BC , $AC - ME = P_2Q_2$, $ME \parallel AC$, $\angle AMC = \angle hk$?

§ 25*. Более сложные случаи построения треугольников

1.

1. Постройте равнобедренный треугольник по боковой стороне и медиане, проведенной к основанию.
2. Дан треугольник ABC . Постройте треугольник MPK , в котором $MP = 2AB$, $\angle M = \angle A$, а высота KE равна высоте CD треугольника ABC .

2.

1. Постройте равнобедренный треугольник по биссектрисе, проведенной к основанию и углу, противолежащему основанию.
2. Дан треугольник MKP . Постройте треугольник ABC так, чтобы $AB = MK$, $AC = 2MP$, высота CD была равна высоте PE треугольника MPK .

3.

1. Постройте прямоугольный треугольник по катету и медиане, проведенный к другому катету.
2. Постройте равнобедренный треугольник по основанию и углу, противолежащему этому основанию.

4.

1. Постройте остроугольный треугольник по высоте и двум острым углам, которые эта высота образует со сторонами треугольника.
2. Постройте прямоугольный треугольник по острому углу и высоте, проведенной из вершины прямого угла.

5.

1. Постройте треугольник по двум сторонам и углу, противолежащему одной из этих сторон. Всегда ли эта задача имеет решение?
2. Постройте треугольник по углу и двум высотам, проведенным к сторонам этого угла.

6.

1. Постройте треугольник по двум углам и стороне, противолежащей одному из этих углов. Всегда ли эта задача имеет решение?
2. Постройте остроугольный треугольник по углу и двум высотам, одна из которых проведена из вершины угла, а другая опущена на одну из его сторон.

7.

1. На стороне AC треугольника ABC взята точка M . Постройте треугольник ABC по отрезкам AB , BM и углам AMB , BCM .
2. Постройте остроугольный треугольник ABC по сумме углов B и A , высоте BD и стороне AC .

8.

1. На стороне AC треугольника ABC взята точка M . Постройте треугольник ABC по отрезкам BC , AM и углам ABM , AMB .
2. Постройте остроугольный треугольник ABC по разности углов A и B , высоте CD и стороне BC .

§ 26. Итоговое повторение

1.

На рисунке 151 $\angle BAC = 50^\circ$, $\angle ABC = 80^\circ$, $\angle DBC = 50^\circ$, точка O — середина отрезков AB и MC .

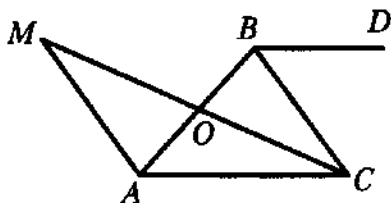


Рис. 151

1) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

2) Докажите, что прямые BD и AC не пересекаются.

3) Найдите $\angle MAB$.

4) Сравните отрезки AM и AC .

2.

На рисунке 152 $\angle EMK = 40^\circ$, $\angle MKE = 70^\circ$, прямые MC и EK не имеют общих точек, отрезки BE и KA являются высотами треугольника EMK .

1) Докажите, что треугольник EMK равнобедренный.

2) Найдите угол CME .

3) Докажите, что $KA = BE$.

4) Сравните отрезки MB и AK .

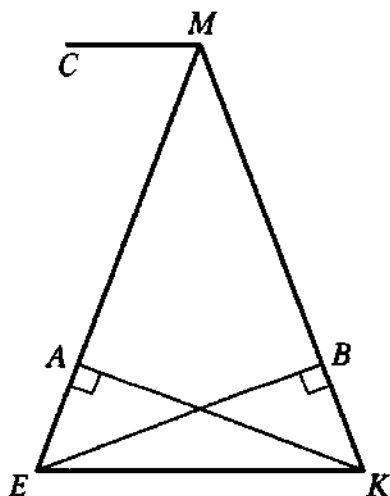


Рис. 152

3.

На рисунке 153 $\angle ADB = \angle DBC = 90^\circ$,
 $AD = BC$, $\angle ABD = 60^\circ$.

1) Докажите, что прямые AD и BC не пересекаются.

2) Между какими целыми числами заключена длина отрезка AD , если $BD = 4$?

3) Докажите, что треугольник AED равнобедренный, если DE — медиана треугольника ADB .

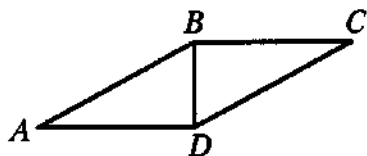


Рис. 153

4.

На рисунке 154 $\angle EPM = \angle PMK = 90^\circ$,
 $\angle MEP = \angle MKP = 30^\circ$, $ME = 10$.

1) Докажите, что прямые EM и KP не имеют общих точек.

2) Между какими целыми числами заключена длина отрезка EP ?

3) Найдите длину медианы MD треугольника PMK .

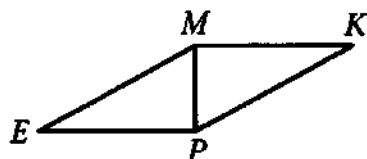


Рис. 154

5.

На рисунке 155 $AB = BC = CD = DA$.

1) Докажите, что $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$.

2) Докажите, что $BT = DT$.

3) Докажите, что $AC > DB$, если $\angle TBC = 90^\circ$ и $TC > AT$.

4) Докажите, что точка T равноудалена от прямых AB и AD .

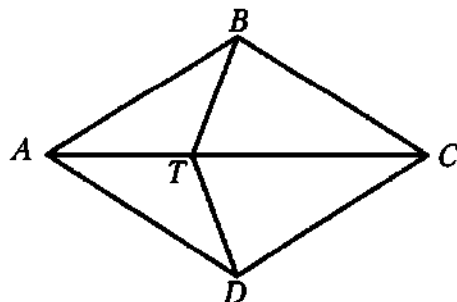


Рис. 155

6.

На рисунке 156 $KT = TM = MP = PK$.

- 1) Докажите, что $TM \parallel KP$ и $KT \parallel PM$.
- 2) Докажите, что $TO = OP$.
- 3) Докажите, что $TP > KM$, если $\angle OTK = 44^\circ$ и $KO > OM$.
- 4) Докажите, что точка O равноудалена от прямых TM и MP .

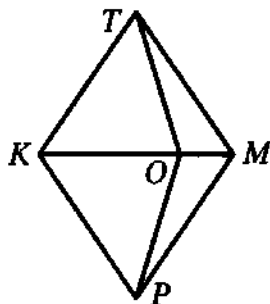


Рис. 156

7.

На окружности с центром O последовательно отмечены точки A, B, C, D так, что прямые AD и BC параллельны, точка O лежит между ними, $AD > BC$ и $\angle OBA = \angle OCD$.

- 1) Докажите, что $\angle AOB = \angle COD$.
- 2) Докажите, что $AC = BD$.
- 3) Докажите, что $\angle DBC = \angle CAD$.
- 4) Сравните расстояние от точки O до прямых AD и BC .

8.

В некоторой окружности проведены две равные хорды KM и PH , пересекающиеся в точке T . Центр окружности O расположен внутри треугольника KHT , причем расстояние от точки O до прямой HK меньше расстояния от точки O до прямой PM , $\angle MPH = \angle MKH$.

- 1) Докажите, что $\angle KOM = \angle POH$.
- 2) Докажите, что $\angle POK + 2\angle OMH = 180^\circ$.
- 3) Докажите, что $PM \parallel KH$.
- 4) Сравните отрезки PM и KH .

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

№ 1. Начальные геометрические сведения

Вариант 1

1. На рисунке 157 луч OC является биссектрисой угла AOB . Найдите угол BOD , если угол AOB прямой.

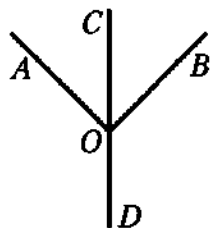


Рис. 157

2. На прямой отмечены точки A, B, C, D так, что точка C лежит между точками A и B , а точка B принадлежит отрезку CD . $AC = 65$ см, $BD = 6,4$ дм. Сравните отрезки AB и CD .

3. Прямые AD и BC пересекаются в точке O . Внутри угла AOB взята точка M , а внутри угла COD — точка K . $\angle AOB = 80^\circ$, $\angle MOB = 30^\circ$, $\angle KOD = 40^\circ$.

а) Найдите углы AOM и COK .

б) Являются ли углы MOB и COK вертикальными? Ответ объясните.

- 4*. Даны три прямые, каждая из которых пересекает хотя бы одну другую. Сколько всего точек пересечения могут иметь такие прямые?

Вариант 2

1. На рисунке 158 угол BOC прямой. Найдите $\angle 1$, если $\angle 2 = 70^\circ$.

2. Точка C — середина отрезка AB , точка D — середина отрезка AC , $BD = 15,3$ см. Найдите длину отрезка AC . Ответ выразите в миллиметрах.

3. Отрезки PE и HM лежат на перпендикулярных прямых и пересекаются в точке K . Внутри угла RKH взята точка A , а внутри угла MKE — точка B , $\angle AKH = 40^\circ$, $\angle MKB = 50^\circ$.

а) Найдите углы PKA и BKE .

б) Лежат ли точки A, K, B на одной прямой? Ответ объясните.

- 4*. Расположите шесть отрезков так, чтобы каждый из них имел общие точки ровно с тремя другими и число всех этих точек было равно пяти.

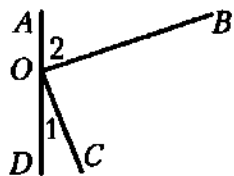


Рис. 158

Вариант 3

1. На рисунке 159 прямые AB и CD взаимно перпендикулярны. $\angle KOD = 135^\circ$. Является ли луч OK биссектрисой угла AOC ? Ответ объясните.
2. На отрезке PH отмечены точки K и M так, что точка K лежит между точками P и M , $HK = 53,5$ см, $PM = 535$ мм. Сравните отрезки PK и HM .
3. Развернутый угол AOB разделяет плоскость на две части. Точка E лежит в одной части, точка P — в другой; $\angle EOB = 50^\circ$, $\angle POB = 130^\circ$.

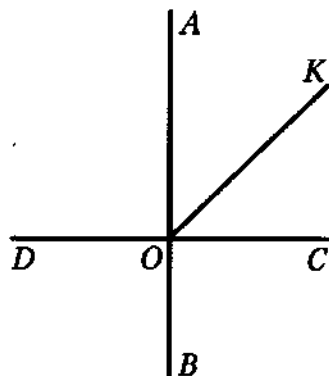


Рис. 159

а) Равны ли углы EOB и POA ?

б) Являются ли углы EOB и POA вертикальными?

Ответы на вопросы объясните.

- 4*. Можно ли расположить шесть точек на четырех отрезках, не лежащих на одной прямой, так, чтобы каждому отрезку принадлежало по три точки?

Вариант 4

1. На рисунке 160 прямые a и b взаимно перпендикулярны. Найдите сумму углов 1 и 2.
2. Точка E лежит на прямой между точками P и K , а точка K принадлежит отрезку EM ; $PE = 5$ см, $EK = 6$ см, $KM = 8$ см. Найдите расстояние между серединами отрезков PE и KM . Ответ выразите в миллиметрах.
3. Развернутый угол AOB разделяет плоскость на две части. Луч OM лежит в одной части, а луч OK — в другой. Известно, что углы MOA и KOB прямые.

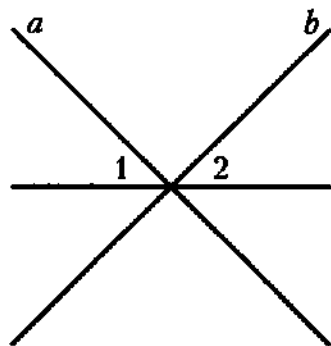


Рис. 160

а) Равны ли углы BOM и KOA ?

б) Являются ли прямые MK и AB взаимно перпендикулярными?

Ответы на вопросы объясните.

- 4*. На сколько частей могут разделить плоскость три прямые, среди которых есть пересекающиеся?

№ 2. Треугольники

Вариант 1

1. На рисунке 161 отрезки AB и CD имеют общую середину. Докажите, что треугольники AOC и BOD равны.
2. Даны прямая и отрезок. Постройте точку, такую, чтобы перпендикуляр, опущенный из этой точки на прямую, равнялся данному отрезку.
3. В треугольнике ABC $AB = BC$. На медиане BE отмечена точка M , а на сторонах AB и BC — точки P и K соответственно. (Точки P , M и K не лежат на одной прямой.) Известно, что $\angle BMP = \angle BMK$. Докажите, что:
 - а) углы BMP и BKM равны;
 - б) прямые PK и BM взаимно перпендикулярны.
- 4*. Дан угол в 54° . Можно ли с помощью циркуля и линейки построить угол в 18° ?

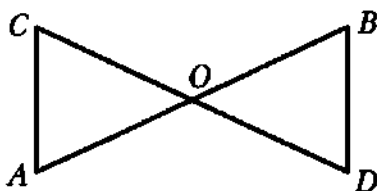


Рис. 161

Вариант 2

1. На рисунке 162 луч BD является биссектрисой угла ABC , а луч DB является биссектрисой угла ADC . Докажите, что треугольники ABD и CBD равны.
2. Дан отрезок. Постройте две какие-либо взаимно перпендикулярные прямые и на одной из них от точки пересечения отложите отрезок, равный данному.
3. Внутри треугольника ABC взята точка O , причем $\angle BOC = \angle BOA$, $AO = OC$.
 - а) Докажите, что углы BAC и BCA равны.
 - б) Докажите, что прямая BO проходит через середину отрезка AC .
- 4*. Как с помощью циркуля и линейки построить угол в $11^\circ 15'$?

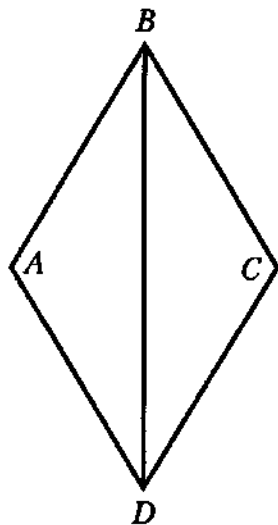


Рис. 162

Вариант 3

1. На рисунке 163 отрезок AB равен отрезку CD , а отрезок BC равен отрезку AD . Докажите, что треугольники ABD и CBD равны.
2. Даны неразвернутый угол и отрезок. Постройте точку, удаленную от вершины угла на расстояние, равное половине данного отрезка.
3. На высоте равнобедренного треугольника ABC , проведенной к основанию AC , взята точка P , а на сторонах AB и BC — точки M и K соответственно. (Точки M , P и K не лежат на одной прямой.) Известно, что $BM = BK$.
 - а) Докажите, что углы BMP и BKP равны.
 - б) Докажите, что углы KMP и PKM равны.
- 4*. Дан угол в 34° . Можно ли с помощью циркуля и линейки построить угол в 12° ?

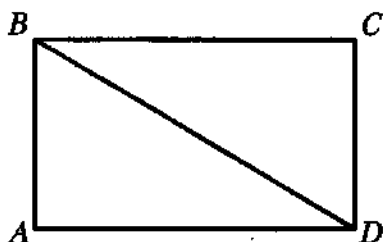


Рис. 163

Вариант 4

1. На рисунке 164 отрезки AB и CD являются диаметрами окружности. Докажите, что треугольники AOD и BOC равны.
2. Даны неразвернутый угол и отрезок. Постройте какой-либо угол, равный данному, и на его стороне постройте точку, удаленную от вершины угла на расстояние, равное половине данного отрезка.
3. На сторонах AB , BC , AC равнобедренного треугольника ABC с основанием AC отмечены точки M , K , P соответственно так, что $\angle AMP = \angle PKC$ и $AM = KC$.
 - а) Докажите, что $MP = PK$.
 - б) Докажите, что прямые MK и BP взаимно перпендикулярны.
- 4*. Как с помощью циркуля и линейки построить угол в $67^\circ 30'$?

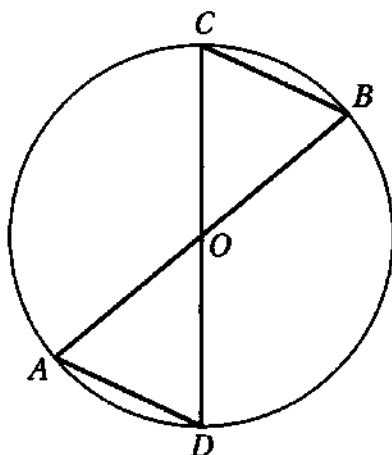


Рис. 164

№ 3. Параллельные прямые

Вариант 1

1. На рисунке 165 $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$, $\angle 3 = 50^\circ$. Найдите $\angle 4$.
2. Могут ли две стороны треугольника быть параллельными одной прямой?
3. На сторонах AB , BC , AC треугольника ABC отмечены точки T , P , M соответственно; $\angle MPC = 51^\circ$, $\angle ABC = 52^\circ$, $\angle ATM = 52^\circ$.
а) Найдите угол TMP .
б) Докажите, что прямые MP и BT имеют одну общую точку.
- 4*. Из картона вырезан шаблон в виде полосы с параллельными краями (рис. 166). Как с помощью этого шаблона построить угол, равный данному?

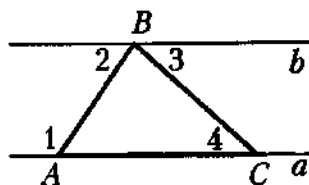


Рис. 165

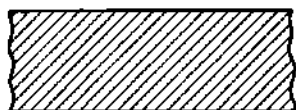


Рис. 166

Вариант 2

1. На рисунке 167 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = 140^\circ$. Найдите $\angle 4$.
2. Через точку, взятую во внутренней области угла ABC , проведена прямая, параллельная прямой AB . Пересекает ли эта прямая прямую BC ?
3. На прямой последовательно отложены отрезки AB , BC , CD . Точки E и P лежат по разные стороны от этой прямой. $\angle ABE = \angle PCD = 143^\circ$, $\angle PBD = 49^\circ$, $\angle ACE = 48^\circ$.
а) Докажите, что прямые BE и PC параллельны.
б) Докажите, что прямые PB и CE пересекаются.
- 4*. Из картона вырезан шаблон в виде полосы с параллельными краями (рис. 168). Как с помощью этого шаблона построить два не смежных угла, дающих в сумме 180° ?

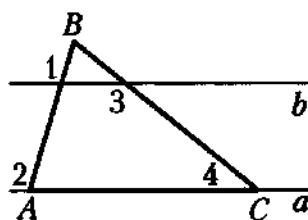


Рис. 167



Рис. 168

Вариант 3

1. На рисунке 169 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = 120^\circ$. Найдите $\angle 4$.
2. Даны три прямые a, b, c ; $a \parallel b$, $b \parallel c$. Сколько общих точек имеют прямые a и c ?
3. Из точек A и B , лежащих по одну сторону от прямой, проведены перпендикуляры AC и BD к этой прямой; $\angle BAC = 117^\circ$.
а) Найдите угол ABD .
б) Докажите, что прямые AB и CD пересекаются.
- 4*. Из картона вырезан шаблон в виде неразвернутого угла (рис. 170). Как построить с помощью этого шаблона два отрезка, лежащих на параллельных прямых?

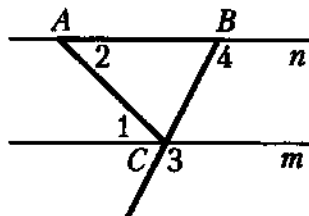


Рис. 169

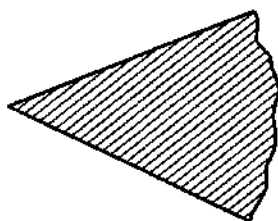


Рис. 170

Вариант 4

1. На рисунке 171 $\angle 1 = \angle 2$, $AB \perp a$. Найдите $\angle 3$.
2. Даны три прямые a, b, c ; $a \parallel b$, прямая a пересекает прямую c . Сколько общих точек имеют прямые b и c ?
3. На сторонах угла A , равного 43° , отмечены точки B и C , а внутри угла — точка D так, что $\angle ABD = \angle 137^\circ$, $\angle BDC = 45^\circ$.
а) Найдите угол ACD .
б) Докажите, что прямые AB и DC имеют одну общую точку.
- 4*. Из картона вырезан шаблон в виде неразвернутого угла (рис. 172). Как с помощью этого шаблона и линейки без делений проверить параллельность двух прямых?

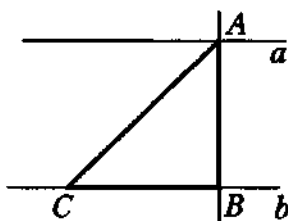


Рис. 171

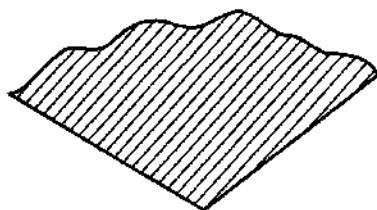


Рис. 172

№ 4. Соотношение между сторонами и углами треугольника

Вариант 1

1. В треугольнике ABC $\angle B = 70^\circ$, $\angle C = 60^\circ$. Сравните отрезки AC и BC .
2. Даны два треугольника ABC и MPK , $\angle A = \angle M = 90^\circ$, $\angle C = \angle K$, $BC = KP$, $AC = \frac{1}{2}BC$. Найдите угол P .
3. В треугольнике ABC $\angle A = 90^\circ$, $\angle C = 15^\circ$. На стороне AC отмечена точка D так, что $\angle DBC = 15^\circ$.
 - а) Докажите, что $BD = 2AB$.
 - б) Докажите, что $BC < 4AB$.
- 4*. В треугольнике все стороны имеют разные длины. Можно ли этот треугольник разрезать на равносторонние треугольники?

Вариант 2

1. В треугольнике ABC $AB > BC > AC$. Найдите $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, если известно, что один из углов треугольника равен 120° , а другой 40° .
2. В треугольниках ABC и $МКР$ $\angle A = \angle M = 90^\circ$, $AB = MP$, $BC = KP$, $\angle B = 30^\circ$. Докажите, что $KM = \frac{1}{2}KP$.
3. В треугольнике ABC $\angle C = 60^\circ$. На стороне AC отмечена точка D так, что $\angle BDC = 60^\circ$, $\angle ABD = 30^\circ$.
 - а) Докажите, что $AD = BC$.
 - б) Докажите, что периметр треугольника ABC меньше пяти длин отрезка BC .
- 4*. Можно ли из каких-либо четырех равнобедренных треугольников сложить равнобедренный треугольник?

Вариант 3

1. Внешний угол при вершине B треугольника ABC равен 40° , а один из внутренних углов этого треугольника равен 20° . Сравните отрезки AB и BC .
2. Даны треугольники ABC и MPK , в которых $\angle A = \angle M = 90^\circ$, $BC = PK$, $\angle C = \angle K$. Докажите, что $AB + PK > AC$.
3. В треугольнике ABC угол B прямой, BD — высота треугольника.
 - а) Докажите, что $\angle A = \angle DBC$.
 - б) Докажите, что если $\angle A < \angle C$, то $AD > DC$.
- 4*. Можно ли какой-либо прямоугольный треугольник разрезать на два треугольника, один из которых равносторонний, другой равнобедренный?

Вариант 4

1. В треугольнике ABC углы A и C равны, BD — высота треугольника. Докажите, что треугольники ABD и CBD равны.
2. В треугольнике ABC $\angle A = 90^\circ$, $\angle C = 60^\circ$. Докажите, что $AB < 2AC$.
3. На сторонах AC и BC треугольника ABC отмечены точки M и N соответственно так, что углы ABC и CMN равны.
 - а) Докажите, что углы MNC и CAB равны.
 - б) Докажите, что если $MN < CM$, то $AB < BC$.
- 4*. В треугольнике все стороны имеют разные длины. Можно ли этот треугольник разрезать на два равных треугольника?

№ 5. Построение треугольника по трем элементам. Повторение

Вариант 1

В треугольнике $ABC \angle A = \angle C = 45^\circ$.

- а) Установите вид треугольника и постройте его на стороне AB .
- б) Докажите, что медиана BD делит треугольник ABC на два равных треугольника.
- в) Докажите, что прямая BK , перпендикулярная медиане BD треугольника ABC , не имеет общих точек с прямой AC .
- г) Докажите, что прямая BK , перпендикулярная медиане BD треугольника ABC , содержит биссектрису одного из внешних углов этого треугольника.
- д)* Возможно ли равенство $AE = EC$, если точка E не лежит на прямой, содержащей медиану BD треугольника ABC ?

Вариант 2

В треугольнике $ABC \angle A = \angle C = 60^\circ$.

- а) Установите вид треугольника и постройте его по стороне AB .
- б) Докажите, что треугольник MBH равен треугольнику NKC , если M, H, K — середины сторон AB, BC и AC треугольника ABC соответственно.
- в) Найдите угол BMH и докажите, что $MH \parallel AC$, если M и H — середины сторон AB и BC соответственно.
- г) Докажите, что расстояние от точки B до прямой NM равно расстоянию между прямыми MH и AC , если M и H — середины сторон AB и BC треугольника ABC соответственно.
- д)* Как построить точку, равноудаленную от вершин треугольника ABC ?

Вариант 3

В треугольнике $ABC \angle A = 60^\circ, \angle C = 30^\circ$.

- а) Установите вид треугольника и постройте его по стороне AB .
- б) Докажите, что треугольники CMA и ABC равны, если точка M расположена вне треугольника ABC так, что $MA \parallel BC$ и $MC \parallel AB$.
- в) Докажите, что $AB \perp MA, BC \perp MC, CM \perp MA$, если точка M расположена вне треугольника ABC и $MA \parallel BC, MC \parallel AB$.
- г) Найдите угол BOA , если O — середина отрезка AC .
- д)* Можно ли провести окружность через точки A, B, C, M , если точка M расположена вне треугольника ABC и $MA \perp BC, MC \parallel AB$?

Вариант 4

Равные отрезки AB и CD пересекаются в точке O , которая является серединой каждого из них, причем $AD = AO$.

- а) Установите вид треугольника ADO и постройте отрезки AB и CD , о которых говорится в условии задачи, если дан отрезок AD .
- б) Докажите, что $BC \parallel AD$.
- в) Сравните отрезки OM и CO , если M — середина отрезка AD .
- г) Найдите угол AEC , если E — точка пересечения биссектрис углов BCO и DAO .
- д)* Является ли точка O серединой отрезка MH , если M — середина AD , H — середина BC ?

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ДИКТАНТЫ

№ 1. Начальные геометрические сведения

Вариант 1

1. Начертите две пересекающиеся прямые и выберите на одной из них отрезок, не имеющий общих точек с другой прямой. Укажите точку, которая одновременно принадлежит обеим прямым.
2. Сколько лучей с началом в указанных точках изображено на рисунке 173?
3. Начертите неразвернутый угол AOB . Проведите луч OM во внутренней его области. Отметьте точку K , которая принадлежит внутренней области угла AOM , и точку N , принадлежащую внешней области угла AOB .
4. а) Серединой отрезка называется...
б) На рисунке 174 OC — биссектриса угла AOB . Сравните углы AOM и MOB .
5. Точки A , B и C лежат на одной прямой; $AB = 4$ см, $AC = 10$ см. Длина отрезка BC равна...
6. $AC = 17$ см, $AB = 10$ см, $BC = 8$ см. Лежат ли точки A , B и C на одной прямой?
7. Угол, равный 160° , делится лучом с началом в вершине угла на два угла, один из которых больше другого на 20° . Тогда эти углы равны...
8. На рисунке 175 $\angle COA = 40^\circ$, OM — биссектриса $\angle COB$. Тогда $\angle MOB = \dots$

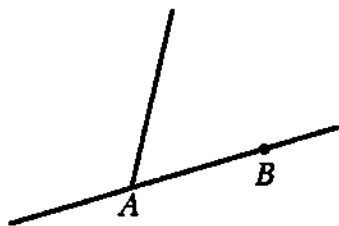


Рис. 173

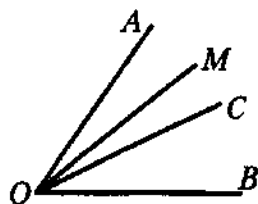


Рис. 174

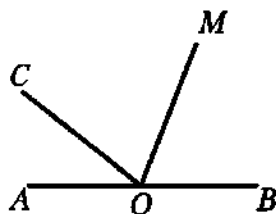


Рис. 175

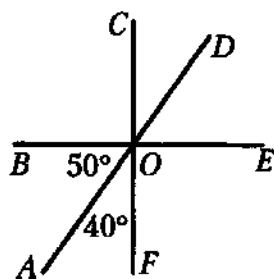


Рис. 176

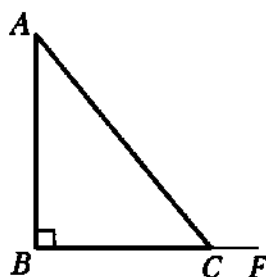


Рис. 177

9. Какой еще из углов, изображенных на рисунке 176, равен 40° ? Почему?
10. На рисунке 177 $AB \perp BF$. Может ли угол ACF быть равным 90° ? Почему?

Вариант 2

1. Начертите две пересекающиеся прямые и выберите на одной из них отрезок, который имеет общую точку с другой прямой. Укажите точку, которая лежит на одной из этих прямых, но не принадлежит выбранному отрезку.
2. Сколько лучей с началом в указанных точках изображено на рисунке 178?
3. Начертите неразвернутый угол COD . Проведите луч OE по внутренней его области. Отметьте точку A , которая принадлежит внутренней области угла DOE , и точку B , которая одновременно принадлежит внутренней области угла COD и внешней области угла DOE .
4. а) Биссектрисой угла называется...
б) На рисунке 179 O — середина отрезка AB . Сравните отрезки AC и CB .
5. Точки E , F и M лежат на одной прямой; $EF = 5$ дм, $EM = 12$ дм. Длина отрезка FM равна...

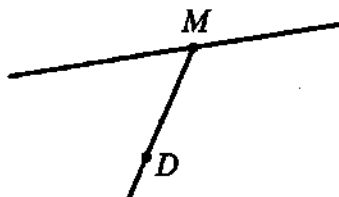


Рис. 178

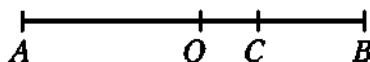


Рис. 179

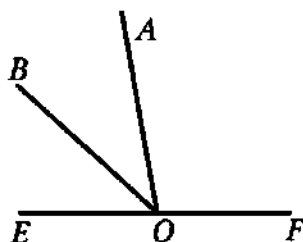


Рис. 180

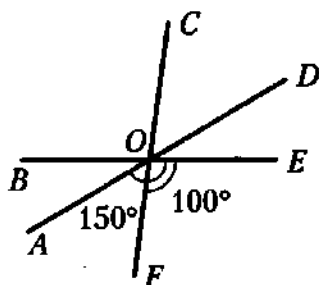


Рис. 181

6. $EF = 25$ см, $EM = 10$ см, $MF = 16$ см. Лежат ли точки E , M и F на одной прямой?
7. Угол, равный 80° , делится лучом с началом в вершине угла на два угла, такие, что градусная мера одного угла в три раза больше другого. Тогда эти углы равны...
8. На рисунке 180 $\angle AOF = 100^\circ$, OB — биссектриса $\angle AOE$. Тогда $\angle AOB = \dots$
9. Какой еще из углов, изображенных на рисунке 181, равен 150° ? Почему?
10. На рисунке 182 $c \perp b$. Может ли быть, что $c \perp a$? Почему?

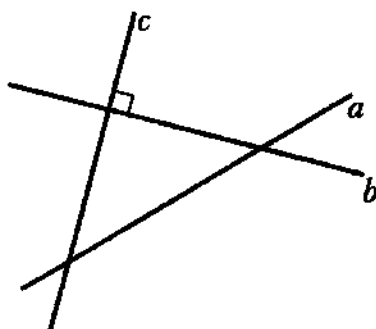


Рис. 182

№ 2. Треугольники

Вариант 1

1. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle A = 35^\circ$. Тогда $\angle A_1 = \dots$
2. На рисунке 183 $AB = FM$, $AC = EM$, $\angle BAC = \angle FME$. Найдите $\frac{BC}{EF}$.

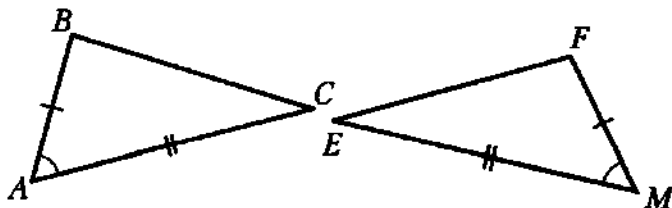


Рис. 183

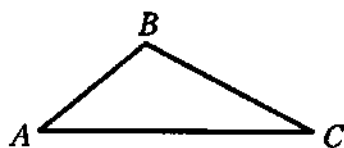


Рис. 184

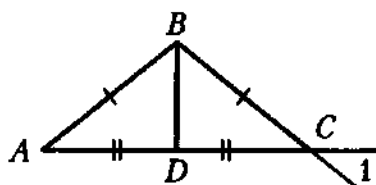


Рис. 185

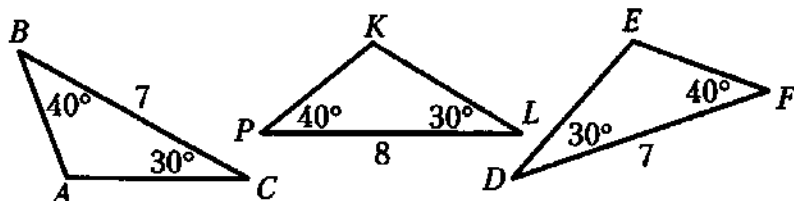


Рис. 186

3. Медианой треугольника называется...
4. При помощи линейки и угольника начертите высоты, опущенные из вершин B и C (рис. 184).
5. На рисунке 185 $AB = BC$, $\angle BAC = 40^\circ$, $AD = DC$. Найдите $\angle 1$ и $\angle BDC$.
6. Укажите пару равных треугольников, изображенных на рисунке 186. Обоснуйте.
7. На рисунке 187 $AB = AD$ и $BC = CD$. Является ли CA биссектрисой угла BCD ?
8. На рисунке 188 укажите отрезки с концами в обозначенных точках, которые являются радиусами, диаметрами и хордами окружности.
9. Начертите произвольный угол и произвольный луч. С помощью циркуля и линейки от данного луча отложите угол, равный данному.
10. Начертите отрезок и с помощью циркуля и линейки разделите его пополам.

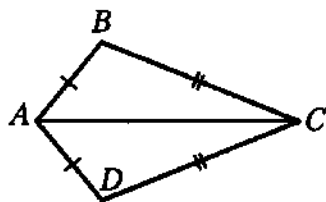


Рис. 187

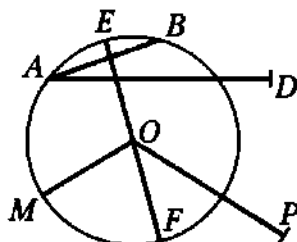


Рис. 188

Вариант 2

1. $\triangle EFM = \triangle E_1F_1M_1$, $\angle F = \angle F_1$, $E_1M_1 = 7$ см. Тогда $EM = \dots$
2. На рисунке 189 $EL = AF$, $LK = AM$, $\angle ELK = \angle MAF$, ... $\angle E = 40^\circ$. Тогда $\angle F = \dots$
3. Высотой треугольника называется...
4. При помощи линейки и угольника начертите высоты, проведенные из вершин K и N (рис. 190).
5. На рисунке 191 $EF = FM$, $\angle EFA = \angle MFA$, $\angle FEA = 50^\circ$. Найдите $\angle 1$ и $\angle FAE$.
6. Укажите пару равных треугольников, изображенных на рисунке 192. Обоснуйте.

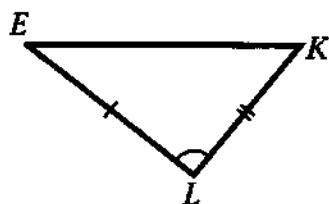


Рис. 189

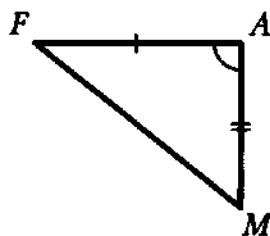


Рис. 190

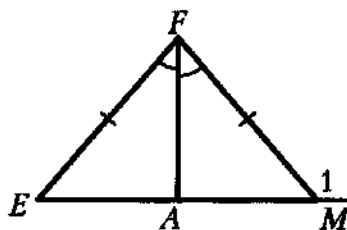


Рис. 191

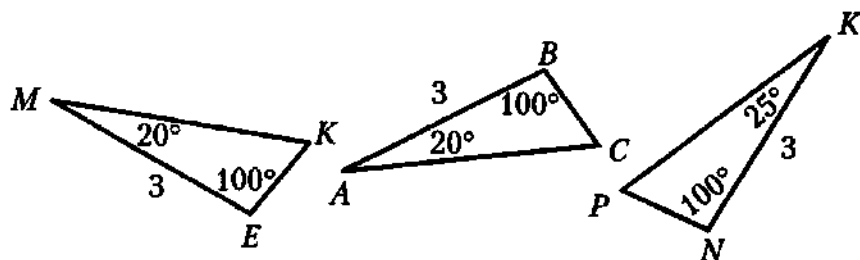


Рис. 192

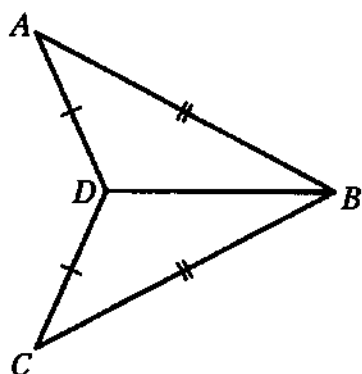


Рис. 193

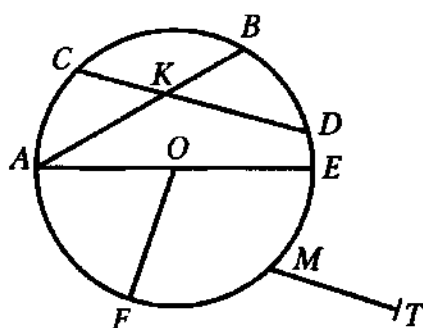


Рис. 194

7. На рисунке 193 $AD = DC$ и $AB = BC$. Является ли BD биссектрисой угла ABC ?
8. На рисунке 194 укажите отрезки с концами в обозначенных точках, которые являются радиусами, диаметрами и хордами окружности.
9. Начертите произвольный угол и с помощью циркуля и линейки постройте его биссектрису.
10. Начертите произвольную прямую и выберите на ней произвольную точку. С помощью циркуля и линейки постройте прямую, которая проходит через данную точку перпендикулярно к данной прямой.

№ 3. Параллельные прямые

Вариант 1

1. Укажите пары накрест лежащих, односторонних и соответственных углов на рисунке 195.

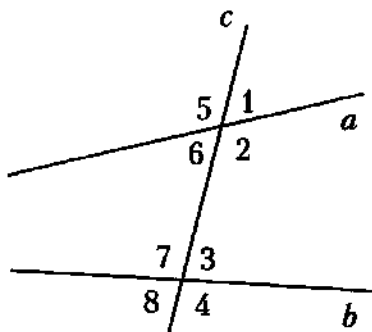


Рис. 195

2. Какие из указанных прямых на рисунке 196 параллельны? Почему?
3. На рисунке 197 $AB = CD$, $AC = CE$, $\angle BAC = \angle DCE$. Имеют ли общие точки прямые BC и DE ?
4. Пересекаются ли изображенные на рисунке 198 прямые a и c ? Почему?
5. $a \perp c$, $b \perp c$. Прямая d пересекает прямую a . Пересекает ли эта прямая прямую b ? Почему?
6. При помощи угольника и линейки проведите прямые, параллельные прямой l и проходящие через концы отрезка AB (рис. 199).
7. Начертите произвольную прямую и выберите точку вне ее. С помощью циркуля и линейки через данную точку проведите прямую, параллельную данной прямой.
8. На рисунке 200 $a \parallel b$. Чему равен $\angle 1$. Почему?

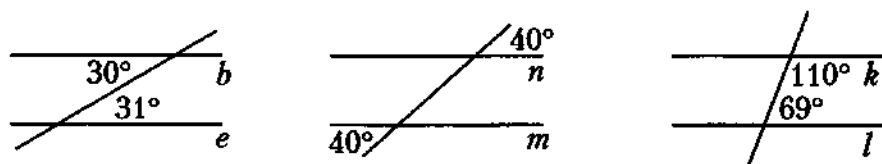


Рис. 196

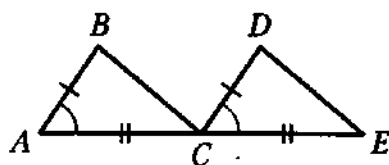


Рис. 197

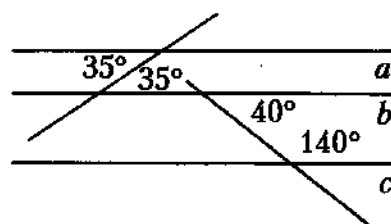


Рис. 198

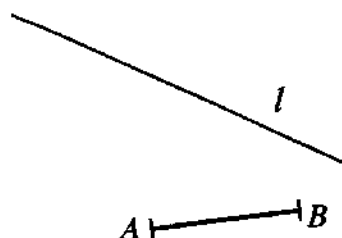


Рис. 199

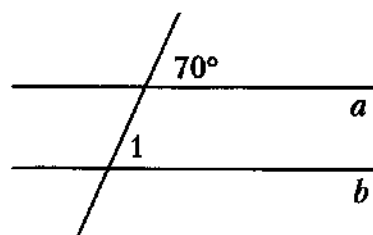


Рис. 200

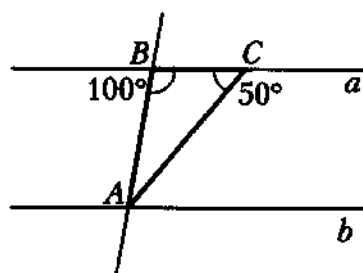


Рис. 201

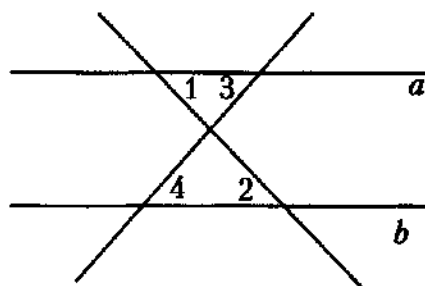


Рис. 202

9. На рисунке 201 $a \parallel b$. Чему равен угол BAC ?
 10. На рисунке 202 $\angle 1 = \angle 2$. Равны ли углы 3 и 4? Почему?

Вариант 2

1. Укажите пары накрест лежащих, односторонних и соответственных углов, изображенных на рисунке 203.
2. Какие из указанных прямых на рисунке 204 параллельны? Почему?

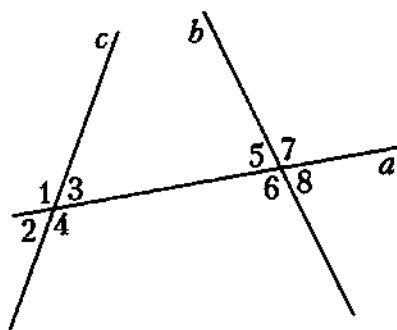


Рис. 203

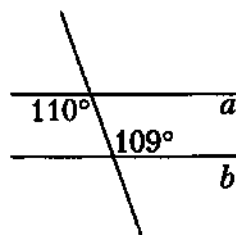
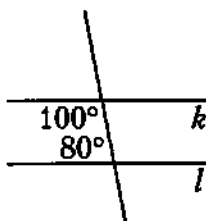
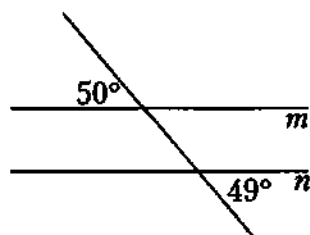


Рис. 204

3. На рисунке 205 $AB = CD$, $AC = CE$, $BC = DE$. Имеют ли общие точки прямые AB и CD ?
4. Пересекаются ли изображенные на рисунке 206 прямые m и k ? Почему?
5. В прямоугольном треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, $E \in BC$. Через точку E проведена прямая, перпендикулярная к BC . Пересечет ли эта прямая прямую AC ? Почему?
6. При помощи угольника и линейки проведите прямые, параллельные прямой m и проходящие через концы отрезка E и F (рис. 207).
7. Начертите произвольный треугольник ABC и с помощью циркуля и линейки проведите прямую, проходящую через вершину B и параллельную прямой AC .
8. На рисунке 208 $m \parallel n$. Чему равен $\angle 1$? Почему?

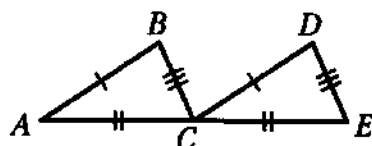


Рис. 205

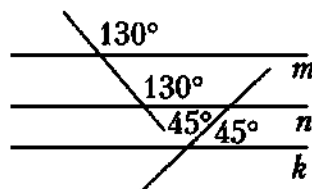


Рис. 206

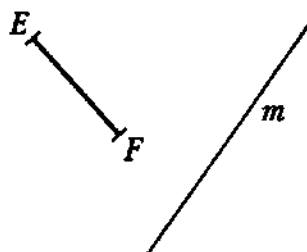


Рис. 207

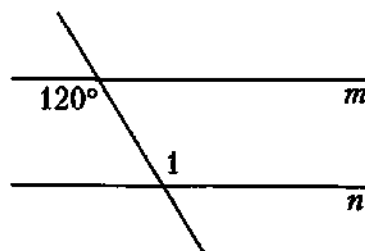


Рис. 208

9. На рисунке 209 $m \parallel n$. Чему равен угол BAC ?
10. На рисунке 210 $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$. Равны ли углы 3 и 4? Почему?

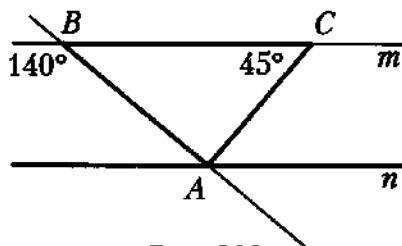


Рис. 209

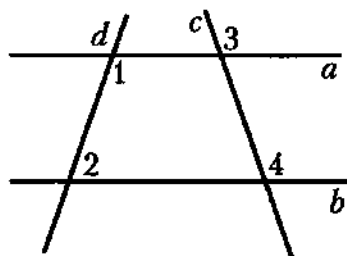


Рис. 210

№ 4. Соотношение между сторонами и углами треугольника

Вариант 1

1. В равнобедренном треугольнике угол при основании равен 20° . Тогда угол при вершине треугольника равен...
2. В треугольнике ABC $AB = 10$ см, $BC = 11$ см. Сравните углы C и A .
3. В треугольнике ABC $\angle A = \angle C$, BD — медиана. Тогда $\angle BDC$ равен...
4. Две стороны треугольника равны 1 см и 0,9 см. Найдите третью сторону, если ее длина выражается целым числом.
5. Треугольники на рисунке 211 прямоугольные. По данным рисунка найдите отношение $\frac{AC}{A_1C_1}$.
6. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) $AC = 10$ см, $\angle B = 60^\circ$. Тогда расстояние от вершины C до гипотенузы AB равно...

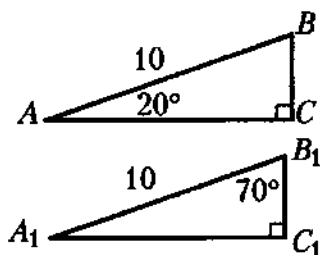


Рис. 211

7. $a \parallel b$, $A \in a$, $B \in b$, $C \in a$, $AB \perp b$, $AB = 7$ см. Расстояние от точки C до прямой b равно...
8. Начертите две параллельные прямые и изобразите множество точек, равноудаленных от этих прямых.
9. Начертите тупоугольный треугольник ABC ($\angle C$ тупой). Постройте остроугольный треугольник с основанием AC и имеющий высоту, опущенную на сторону AC , равную высоте данного треугольника, опущенной на прямую, содержащую их общую сторону.
10. Постройте с помощью циркуля и линейки равнобедренный треугольник по основанию и углу при основании.

Вариант 2

1. В треугольнике ABC $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 100^\circ$. Тогда внешний угол при вершине C равен...
2. В треугольнике ABC $\angle A = 40^\circ$, $\angle C = 41^\circ$. Сравните стороны BC и AB .
3. В треугольнике EFK $\angle E = \angle K$, $FM \perp EK$. Сравните углы EFM и MFK .
4. Две стороны треугольника равны 0,9 см и 1,9 см. Найдите третью сторону, если ее длина выражается целым числом.
5. Треугольники на рисунке 212 прямоугольные. По данным рисунка найдите разность $NF - N_1F_1$.
6. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) $\angle B = 60^\circ$. Расстояние от вершины C до гипотенузы AB равно 8 см. Тогда $AC = \dots$
7. $a \parallel b$, $A \in a$, $B \in b$, $AB \perp a$, $AB = 12$ см. Тогда расстояние между прямыми a и b равно...
8. Начертите прямую и некоторый отрезок. Изобразите множество точек, удаленных от данной прямой на расстояние, равное длине данного отрезка.

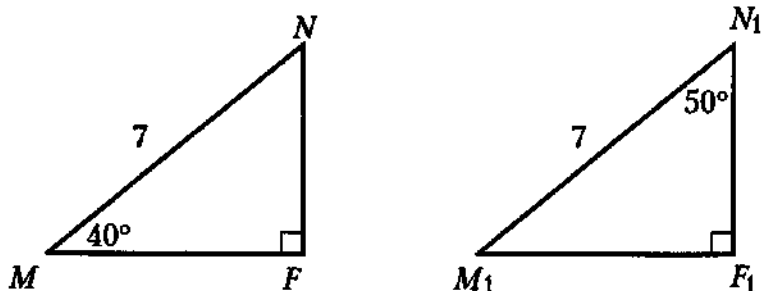


Рис. 212

9. Начертите остроугольный треугольник ABC . Постройте тупоугольный треугольник с основанием AC и тупым углом при вершине C , такой, чтобы его высота, опущенная на прямую AC , была равна высоте данного треугольника, проведенной из вершины B .
10. Постройте с помощью циркуля и линейки равнобедренный треугольник по боковой стороне и углу при вершине.

8 класс

ЗАДАЧИ ДЛЯ УРОКА

Параграф	Тема
1	Многоугольник, четырехугольник
2	Параллелограмм и его свойства
3	Признаки параллелограмма
4	Трапеция
5	Задачи на построение параллелограмма и трапеции
6	Прямоугольник
7	Ромб и квадрат
8	Задачи на построение прямоугольника, ромба, квадрата
9	Свойства площадей многоугольников, площадь квадрата и прямоугольника
10	Площадь параллелограмма
11	Площадь треугольника
12	Площадь трапеции
13	Теорема Пифагора
14	Площади многоугольников
15	Пропорциональные отрезки
16	Определение подобных треугольников. Отношение площадей подобных треугольников
17	Первый признак подобия треугольников
18	Второй и третий признаки подобия треугольников
19	Средняя линия треугольника. Свойство медиан треугольника
20	Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике
21	Задачи на построение, решаемые методом подобия
22	Синус, косинус и тангенс острого угла прямоугольного треугольника и их значение для углов 30° , 45° и 60°
23	Решение прямоугольных треугольников
24*	Подобие треугольников
25	Взаимное расположение прямой и окружности. Касательная к окружности
26	Теорема о вписанном угле
27	Теорема о произведении отрезков хорд
28*	Окружность
29	Четыре замечательные точки треугольника
30	Вписанная окружность
31	Описанная окружность
32	Понятие вектора
33	Сложение векторов
34	Вычитание векторов
35	Умножение вектора на число
36	Применение векторов к решению задач
37	Средняя линия трапеции
38	Итоговое повторение (четырёхугольники, площади, подобные треугольники)
39	Итоговое повторение (окружность)

* Задачи предназначены для классов с углубленным изучением математики

ЗАДАЧИ ДЛЯ УРОКА

§ 1. Многоугольник, четырехугольник

1.

1. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ вершина B соединена равными диагоналями с двумя другими вершинами. Известно, что $\angle ABE = \angle CBD$, $\angle BEA = \angle BDC$. Докажите, что периметры четырехугольников $ABDE$ и $BEDC$ равны.
2. Дан выпуклый девятиугольник с равными углами. Найдите эти углы.

2.

1. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ $AB = AF$. Из вершины A к двум не соседним вершинам проведены равные диагонали, причем $\angle BAC = \angle EAF$. Докажите, что периметры четырехугольников $ABCE$ и $ACEF$ равны.
2. Сколько сторон имеет выпуклый многоугольник, если сумма его углов равна 540° ?

3.

1. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ имеет две пары равных между собой смежных сторон: $AB = AD$, $BC = CD$, O — точка пересечения диагоналей четырехугольника. Сравните периметры пятиугольников $ABCOD$ и $ABOCD$.
2. Докажите, что сумма внешних углов выпуклого многоугольника не зависит от числа сторон многоугольника.

4.

1. Диагональ AC невыпуклого четырехугольника $ABCD$ разделяет этот четырехугольник на два треугольника, причем $AB > BC$, $AB = AD$, $BC = CD$, а прямые, содержащие диагонали четырехугольника, пересекаются в точке O . Сравните периметры пятиугольников $BCODA$ и $DCOBA$.
2. Докажите, что разность сумм углов выпуклых n -угольника и $(n - 1)$ -угольника не зависит от n .

5.

1. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ все стороны равны. Большая диагональ, проведенная из вершины A , параллельна стороне BC , $\angle BAD = \angle CDA$. Сравните периметры пятиугольников $ABDEF$ и $ACDEF$.
2. Сумма углов выпуклого $2n$ -угольника в k раз больше суммы углов выпуклого n -угольника, где k — нечетное число. Найдите k .

6.

1. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ все стороны имеют равные длины. Диагональ, проведенная из вершины A , параллельна стороне ED , $\angle EAC = \angle DCA$. Сравните периметры четырехугольников $EABC$ и $DCBA$.
2. Сумма углов выпуклого n -угольника в k раз больше суммы углов выпуклого $(n - 1)$ -угольника (k — натуральное число). Найдите k .

7.

1. Может ли многоугольник иметь 25 диагоналей?
2. Сколько углов с градусной мерой меньше 10° может быть в выпуклом многоугольнике?

8.

1. Существует ли многоугольник с 27 диагоналями?
2. В выпуклом многоугольнике имеется 5 углов с градусной мерой 140° каждый, остальные углы острые. Найдите число сторон этого многоугольника.

§ 2. Параллелограмм и его свойства

1.

1. В четырехугольнике $ABCD$ $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$, $AC = 20$ см, $BD = 10$ см, $AB = 13$ см. Диагонали четырехугольника пересекаются в точке O . Найдите периметр треугольника COD .
2. Из вершины B параллелограмма $ABCD$ с острым углом A проведен перпендикуляр BK к прямой AD ; $BK = \frac{1}{2}AB$. Найдите $\angle C$ и $\angle D$.

2.

1. В четырехугольнике $ABCD$ $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$, O — точка пересечения диагоналей. Периметр треугольника AOD равен 25 см, $AC = 16$ см, $BD = 14$ см. Найдите BC .
2. Дан параллелограмм $ABCD$ с острым углом A . Из вершины B опущен перпендикуляр BK к прямой AD , $AK = BK$. Найдите $\angle C$ и $\angle D$.

3.

1. В четырехугольнике $ABCD$ $\angle A + \angle B = 180^\circ$, $AB \parallel CD$. На сторонах BC и AD отмечены точки M и K соответственно так, что $BM = KD$. Докажите, что точки M и K находятся на одинаковом расстоянии от точки пересечения диагоналей четырехугольника.
2. На сторонах PK и MH параллелограмма $MPKH$ взяты точки A и B соответственно, $MP = PB = AK$, $\angle MPB = 60^\circ$. Найдите углы параллелограмма и сравните отрезки BM и AN .

4.

1. В четырехугольнике $MPKH$ $\angle PMK = \angle HKM$, $PK \parallel MH$. Через точку пересечения диагоналей проведена прямая, пересекающая стороны PK и MH в точках A и B соответственно. Докажите, что $AP = HB$.
2. На сторонах BC и AD параллелограмма $ABCD$ взяты точки M и K , $AB = BM = KD$, $\angle AMB = 30^\circ$. Найдите углы параллелограмма и сравните отрезки AM и CK .

5.

1. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $\angle A + \angle B = \angle B + \angle C = 180^\circ$. Через точку O пересечения диагоналей четырехугольника проведена прямая, пересекающая стороны BC и AD в точках M и K соответственно; $\angle BOM = 90^\circ$. Докажите, что $BK = BM$.
2. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ отмечены точки M и N соответственно так, что отрезки BN и MD пересекаются в точке O ; $\angle BND = 95^\circ$, $\angle DMC = 90^\circ$, $\angle BOD = 155^\circ$. Найдите отношение длин отрезков AB и MD и углы параллелограмма.

6.

1. В выпуклом четырехугольнике $MPKH$ $\angle M + \angle P = 180^\circ$, $\angle MKH = \angle KMP$. На сторонах MH и PK отмечены точки A и B так, что $PB = PA$. Отрезок AB проходит через точку пересечения диагоналей четырехугольника. Докажите, что $HP \perp AB$.
2. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ взяты точки K и M соответственно. Отрезки BM и KD пересекаются в точке O , $\angle BOD = 140^\circ$, $\angle DKB = 110^\circ$, $\angle BMC = 90^\circ$. Найдите отношение длин отрезков MC и AD и углы параллелограмма.

7.

1. В параллелограмме $ABCD$ на сторонах AD и BC взяты точки K и E соответственно так, что $\angle KBE = 90^\circ$ и отрезок EK проходит через точку O пересечения диагоналей. Докажите, что $BO = OE$.
2. На сторонах AC и BC треугольника ABC отмечены точки D и E соответственно, а внутри треугольника — точка M так, что четырехугольник $DCEM$ является параллелограммом и $DE \parallel AB$. Прямая DM пересекает отрезок AB в точке K , а прямая EM — в точке N . Докажите, что $AK = NB$.

8.

1. В параллелограмме $ABCD$ через точку O — пересечения диагоналей — проведена прямая, пересекающая стороны BC и AD в точках K и E соответственно, $BO = OE$. Найдите угол KBE .
2. На сторонах AB и AD параллелограмма $ABCD$ взяты точки M и K соответственно, $MK \parallel BD$. Прямая MK пересекает луч CB в точке E , а луч CD — в точке P . Докажите, что $EM = KP$.

§ 3. Признаки параллелограмма

1.

1. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $AB = CD$, $\angle B = 70^\circ$, $\angle BCA = 60^\circ$, $\angle ACD = 50^\circ$. Докажите, что $BC = AD$.
2. Середина отрезка BD является центром окружности с диаметром AC , причем точки A, B, C, D не лежат на одной прямой. Докажите, что $\angle ABC = \angle ADC$.

2.

1. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ все стороны равны, $\angle A = \angle D$. Докажите, что $BP \parallel CE$.
2. Дан параллелограмм $ABCD$. На продолжении диагонали AC за вершины A и C отмечены точки A_1 и C_1 соответственно так, что $AA_1 = CC_1$. Докажите, что $\angle BA_1D = \angle BC_1D$.

3.

1. На основании AC равнобедренного треугольника ABC отмечена точка K , а на сторонах AB и BC — точки M и P соответственно, причем $PK = MB$, $\angle KPC = 80^\circ$, $\angle C = 50^\circ$. Докажите, что $\angle KMB + \angle MBP = 180^\circ$.
2. Внутри треугольника ABC отмечена точка M , а на сторонах AB и AC — точки K и H соответственно так, что отрезки AM и KH имеют общую середину, а $\angle KMH = \angle C$. Докажите, что треугольник ABC является равнобедренным.

4.

1. В треугольнике MPK $\angle M = 65^\circ$. На сторонах MK, MP, PK отмечены точки A, B, C соответственно так, что середина стороны PK — точка C , $AM = KC$, $BP = AC$, $\angle BAM = 50^\circ$. Докажите, что $\angle CPB + \angle ABP = 180^\circ$.
2. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AC . На сторонах AB, BC, AC отмечены точки D, E, P соответственно так, что отрезки AE и DP имеют общую середину. Докажите, что $\angle DEP = \angle BCA$.

5.

1. Точки M и K являются соответственно серединами сторон AB и BC треугольника ABC . Через вершину C вне треугольника проведена прямая, параллельная AB и пересекающая луч MK в точке E . Докажите, что $KE = \frac{1}{2}AC$.
2. На сторонах BC и AD выпуклого четырехугольника $ABCD$ соответственно взяты точки M и K так, что пары отрезков AM и BK , KC и MD имеют общие середины. Докажите, что $\angle BAD = \angle BCD$.

6.

1. Точки A и B принадлежат соответственно сторонам PE и ET треугольника PET . Прямая, проходящая через вершину T вне треугольника, пересекает луч AB в точке K , $AP = KT$, $AB = BK = \frac{1}{2}PT$. Докажите, что точка A является серединой отрезка PE .
2. На стороне BC выпуклого четырехугольника $ABCD$ отмечена точка M , а вне четырехугольника — точка K так, что пары отрезков AK и BM , KD и MC имеют общие середины. Докажите, что $\angle ABC = \angle ADC$.

7.

1. На сторонах BC и AD выпуклого четырехугольника $ABCD$ отмечены точки K и M соответственно. Отрезок AK пересекает диагональ BD в точке P , а отрезок CM — в точке E . Известно, что $AK \parallel CM$, $PK = EM$, $BP = ED$, $KC = AM$. Докажите, что $\angle BAD = \angle BCD$.
2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O , $BO = OD$, $AO < OC$. Докажите, что $\angle BAD > \angle BCD$.

8.

1. На сторонах BC и AD выпуклого четырехугольника $ABCD$ отмечены точки K и P соответственно. Диагональ BD пересекает отрезок PC в точке E , а отрезок AK — в точке T . Известно, что $KC = AP$, $AT = EC$, $TK = EP$. Докажите, что $\angle ABC = \angle ADC$.
2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O , $BO = OD$, $\angle BAD > \angle BCD$. Докажите, что $AO < OC$.

§ 4. Трапеция

1.

1. В трапеции $ABCD$ BC — меньшее основание. На отрезке AD взята точка E так, что $BE \parallel CD$, $\angle ABE = 70^\circ$, $\angle BEA = 50^\circ$. Найдите углы трапеции.
2. В прямоугольной трапеции острый угол равен 45° . Меньшая боковая сторона и меньшее основание равны по 10 см. Найдите большее основание.

2.

1. В трапеции $MHPK$ MK — большее основание. Прямые MH и PK пересекаются в точке E , $\angle MEK = 80^\circ$, $\angle ENP = 40^\circ$. Найдите углы трапеции.
2. В прямоугольной трапеции острый угол равен 60° . Большая боковая сторона и большее основание равны по 20 см. Найдите меньшее основание.

3.

1. В равнобедренной трапеции диагональ составляет с боковой стороной угол в 120° . Боковая сторона равна меньшему основанию. Найдите углы трапеции.
2. В прямоугольной трапеции острый угол и угол, который составляет меньшая диагональ с меньшим основанием, равны по 60° . Найдите отношение оснований.

4.

1. В равнобедренной трапеции большее основание в два раза превосходит меньшее. Середина большего основания удалена от вершины тупого угла на расстояние, равное длине меньшего основания. Найдите углы трапеции.
2. В прямоугольной трапеции диагональ перпендикулярна к боковой стороне, острый угол равен 45° . Найдите отношение оснований.

5.

1. Из вершины тупого угла равнобедренной трапеции $ABCD$ проведен перпендикуляр CE к прямой AD , содержащей большее основание. Докажите, что $AE = \frac{1}{2}(AD + BC)$.
2. В прямоугольной трапеции диагонали взаимно перпендикулярны. Большая диагональ составляет с меньшей боковой стороной угол в 60° . Докажите, что меньшая диагональ равна полусумме оснований трапеции.

6.

1. Диагонали равнобедренной трапеции $ABCD$ взаимно перпендикулярны. Докажите, что расстояние между прямыми AD и BC , содержащими основания, равно $\frac{1}{2}(AD + BC)$.
2. Из вершины прямого угла меньшего основания прямоугольной трапеции под углом 45° к этому основанию проведен луч, который проходит через середину большей боковой стороны. Докажите, что меньшая боковая сторона этой трапеции равна сумме оснований.

7.

1. Докажите, что сумма боковых сторон любой трапеции больше разности ее большего и меньшего оснований.
2. Найдите связь между сторонами трапеции, если известно, что внутри трапеции существует точка, равноудаленная от прямых, содержащих ее стороны.

8.

1. Докажите, что сумма диагоналей любой трапеции больше суммы ее оснований.
2. Найдите связь между противоположными углами трапеции, если известно, что внутри ее существует точка, равноудаленная от вершин трапеции.

§ 5. Задачи на построение параллелограмма и трапеции

1.

1. Постройте параллелограмм по большей стороне, меньшей диагонали и углу между ними.
2. Постройте прямоугольную трапецию по меньшему основанию и боковым сторонам.

2.

1. Постройте параллелограмм по меньшей стороне, острому углу и углу между этой стороной и меньшей диагональю.
2. Постройте прямоугольную трапецию по меньшей диагонали, большему основанию и большей боковой стороне.

3.

1. Постройте параллелограмм по двум диагоналям и большей стороне.
2. Постройте равнобедренную трапецию по боковой стороне, большему основанию и отрезку длиной, равной расстоянию между прямыми, содержащими основания трапеции.

4.

1. Постройте параллелограмм по меньшей диагонали, меньшему углу между диагоналями и углу между меньшей диагональю и меньшей стороной.
2. Постройте равнобедренную трапецию по диагонали, большему основанию и перпендикуляру, проведенному из вершины тупого угла к прямой, содержащей большее основание трапеции.

5.

1. Постройте параллелограмм по диагонали, стороне и отрезку длиной, равной расстоянию между прямыми, содержащими данную сторону и ей противоположную.
2. Постройте равнобедренную трапецию по острому углу, диагонали и перпендикуляру, проведенному из вершины острого угла к прямой, содержащей меньшее основание трапеции.

6.

1. Постройте параллелограмм по двум диагоналям и перпендикуляру, проведенному из конца одной диагонали к прямой, содержащей другую диагональ.
2. Постройте равнобедренную трапецию по двум углам, на которые диагональ делит тупой угол, и отрезку длиной, равной расстоянию между прямыми, содержащими основание трапеции.

7.

1. Постройте параллелограмм по стороне, диагонали и углу, противолежащему этой диагонали.
2. Постройте трапецию по двум диагоналям, углу между ними и одной из боковых сторон.

8.

1. Постройте параллелограмм по стороне, диагонали и углу, который эта диагональ составляет с другой стороной.
2. Постройте трапецию по четырём сторонам.

§ 6. Прямоугольник

1.

1. В прямоугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O . E — середина стороны AB , $\angle BAC = 50^\circ$. Найдите угол EOD .
2. Дана окружность с диаметрами AB и CD . Докажите, что четырехугольник $ACBD$ является прямоугольником.

2.

1. В прямоугольнике $MPKH$ диагонали пересекаются в точке O . Отрезок OA является высотой треугольника MOP , $\angle AOP = 15^\circ$. Найдите $\angle OHK$.
2. В параллелограмме $ABCD$ с острым углом A диагонали пересекаются в точке O . На отрезках AO и OC взяты точки P и K соответственно, $OP = OD$, $OK = OB$. Докажите, что четырехугольник $PBKD$ является прямоугольником.

3.

1. В прямоугольнике $ABCD$ O — точка пересечения диагоналей, BH и DE — высоты треугольников ABO и COD соответственно, $\angle BOH = 60^\circ$, $AH = 5$ см. Найдите OE .
2. В четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O ; $AO = OD$, $BO = OC$, $\angle BAC = \angle DCA$. Найдите $\angle ABC$.

4.

1. В прямоугольнике $MPKH$ O — точка пересечения диагоналей, PA и NB — перпендикуляры, проведенные из вершин P и N к прямой MK . Известно, что $MA = OB$. Найдите угол POM .
2. В четырехугольнике $MPKH$ диагонали пересекаются в точке O , $\angle OMN = \angle OHM$, $PH = MK$, $PK = MN$. Найдите угол MHK .

5.

1. В прямоугольнике $ABCD$ точки M и K — середины сторон AB и AD соответственно. На прямой AC взята точка P , на прямой BD — точка E , $MP \perp AC$, $KE \perp BD$. Известно, что $4KE = AD$. Найдите отношение сторон AP и PC .
2. На основании AC равнобедренного треугольника ABC взята точка P , а на сторонах AB и BC — соответственно точки M и K , $AM = CK$, $2MK = AC = 4AP$. Найдите угол PMK .

6.

1. В прямоугольнике $MPKH$ O — точка пересечения диагоналей. Точки A и B — середины сторон MP и MH соответственно. Точка C делит отрезок MK в отношении $1:7$, считая от точки M ; $AC \perp MK$. Найдите отношение сторон BO и PH .
2. Некая прямая, параллельная основанию MK равнобедренного треугольника MPK , пересекает стороны MP и PK в точках B и C соответственно. Точка A делит отрезок MK в отношении $1:3$, считая от точки M ; $BC = 2AM$. Найдите угол MAV .

7.

1. На диагонали AC прямоугольника $ABCD$ взята точка E . Известно, что $\angle EDC = \angle CAD = 15^\circ$. Докажите, что $BE < 5ED$.
2. Дан параллелограмм $ABCD$ с острым углом A . На отрезке AC как на диаметре построена окружность, которая пересекает луч DB в точке E , лежащей вне параллелограмма; $\angle BAE + \angle BCE = 60^\circ$. Найдите расстояние между прямыми BC и AD , если $AB = 10$ см.

8.

1. На отрезках MH и MK в прямоугольнике $MPKH$ взяты точки E и T соответственно, $\angle KEN = 30^\circ$, $ET \perp MK$, $\angle KMH = 15^\circ$. Докажите, что $PT > 0,49 KH$.
2. Дан параллелограмм $MPKH$ с тупым углом P . На диагонали PH как на диаметре построена окружность, пересекающая отрезок MK в точке A ; $\angle KPA + \angle KHA = 45^\circ$, KV — перпендикуляр, проведенный к прямой HM . Найдите HV , если $KV = 10$ см.

§ 7. Ромб и квадрат

1.

1. В ромбе $ABCD$ $\angle A = 31^\circ$. Диагонали пересекаются в точке O . Найдите углы треугольника BOC .

2. На рисунке 1 четырехугольник $ABCD$ — квадрат, $AK = PD = EC = BM$. Докажите, что выпуклый четырехугольник $MEPK$ также является квадратом.

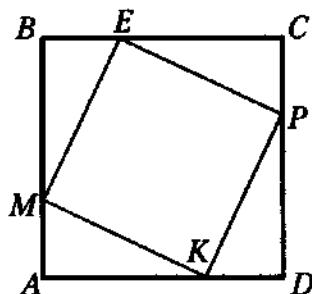


Рис. 1

2.

1. В ромбе $MPKH$ с тупым углом K диагонали пересекаются в точке E . Один из углов треугольника PKE равен $16^\circ 30'$. Найдите остальные углы этого треугольника и угол PMH .

2. На рисунке 2 четырехугольник $ABCD$ — прямоугольник, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, $\angle 5 = \angle 6$, $\angle 7 = \angle 8$. Докажите, что выпуклый четырехугольник $MKNP$ является квадратом.

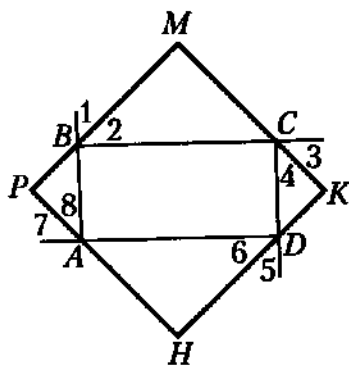


Рис. 2

3.

1. В ромбе $ABCD$ O — точка пересечения диагоналей, OM , OK , OE — перпендикуляры, опущенные на стороны AB , BC , CD соответственно. Докажите, что $OM = OK$, и найдите сумму углов MOB и COE .
2. В треугольнике ABC $\angle B = 90^\circ$, $AB = BC$. На сторонах AB и BC взяты точки M и P , а на стороне AC — точки K и H так, что четырехугольник $MPHK$ является квадратом, $MP = a$. Найдите AC .

4.

1. В ромбе $MPHK$ диагонали пересекаются в точке O . На сторонах MK , KN , PH взяты точки A , B , C соответственно, $AK = KB = PC$. Докажите, что $OA = OB$, и найдите сумму углов POC и MOA .
2. В треугольнике MPK $\angle M = 90^\circ$, $MP = MK$. На сторонах MP , PK , MK отмечены точки A , B , C соответственно так, что четырехугольник $MAVC$ является квадратом, $AC = a$. Найдите PK .

5.

1. В ромбе $ABCD$ угол B тупой. На стороне AD взята точка K , $BK \perp AD$. Прямые BK и AC пересекаются в точке O , $AC = 2BK$. Найдите угол AOB .
2. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ отмечены точки M и K соответственно, $MC = KD$. Отрезки DM и AK пересекаются в точке O , $2OM = AM$. Найдите угол AMO .

6.

1. В ромбе $MPHK$ угол M острый. Отрезок PE является перпендикуляром к прямой MK , O — точка пересечения диагоналей, а T — общая точка прямых PE и MH , $\angle MTP = 120^\circ$, $OH = a$. Найдите PE .
2. На сторонах AB , BC , CD квадрата $ABCD$ отмечены соответственно точки M , K , P , $MP \perp AK$. Сравните отрезки MP и AK .

7.

1. Два равных ромба имеют общую точку пересечения диагоналей, причем меньшие диагонали этих ромбов взаимно перпендикулярны. Докажите, что прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей и середину стороны одного ромба, перпендикулярна стороне другого.
2. На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC построены квадраты $AMKC$ и $CFPB$. Докажите, что сумма расстояний от точек M и P до прямой AB равна AB .

8.

1. Два равных ромба $ABCD$ и $AB_1C_1D_1$ имеют общую вершину острого угла, причем $\angle CAC_1 = 90^\circ$, а лучи BD и D_1B_1 пересекаются в точке E ; O — точка пересечения диагоналей ромба $ABCD$, OP — биссектриса треугольника BOC . Докажите, что $PA = PE$.
2. На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC построены квадраты $AKMC$ и $CPEB$. Прямые KM и PE пересекаются в точке T . Докажите, что $TC \perp AB$.

§ 8. Задачи на построение прямоугольника, ромба, квадрата

1.

1. Постройте прямоугольник по его стороне и периметру.
2. Дан отрезок, равный перпендикуляру, опущенному из вершины некоторого квадрата на диагональ. Постройте этот квадрат.

2.

1. Постройте ромб по тупому углу и меньшей диагонали.
2. Дан отрезок, равный перпендикуляру, проведенному из точки пересечения диагоналей некоторого квадрата на его сторону. Постройте этот квадрат.

3.

1. Постройте прямоугольник по диагонали и углу, который эта диагональ образует со стороной.
2. Внутри данного острого угла постройте квадрат с данной стороной так, чтобы две вершины квадрата принадлежали одной стороне угла, а третья — другой.

4.

1. Постройте ромб по диагонали и углу, который образует другая диагональ со стороной.
2. Постройте квадрат по данной диагонали так, чтобы две противоположные вершины этого квадрата лежали на разных сторонах данного острого угла.

5.

1. Постройте прямоугольник по углу между стороной и диагональю и перпендикуляру, проведенному из вершины прямоугольника к прямой, содержащей эту диагональ.
2. Постройте квадрат $ABCD$ по отрезку PQ , равному биссектрисе AE треугольника ABC .

6.

1. Постройте ромб по острому углу и отрезку, длина которого равна расстоянию между прямыми, содержащими противоположные стороны ромба.
2. Постройте квадрат $ABCD$ по отрезку PQ и углу hk , если $PQ = BM$, $\angle hk = \angle DBM$ (M — середина отрезка AD).

7.

1. Постройте прямоугольник по диагонали и периметру.
2. Постройте квадрат по разности диагонали и стороны.

8.

1. Постройте ромб по стороне и разности диагоналей.
2. Постройте квадрат по сумме диагонали и стороны.

§ 9. Свойства площадей многоугольников, площадь квадрата и прямоугольника

1.

1. Составьте формулу для вычисления площади фигуры, изображенной на рисунке 3.
2. Периметр прямоугольника равен 26 см, а одна из его сторон 9 см. Найдите сторону квадрата, имеющего такую же площадь, как этот многоугольник.

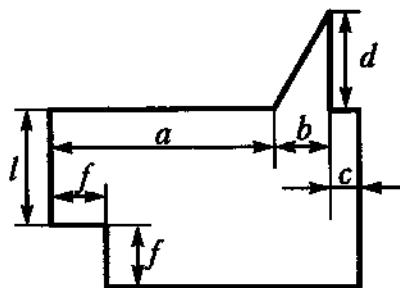


Рис. 3

2.

1. Составьте формулу для вычисления площади фигуры, изображенной на рисунке 4.
2. Периметр квадрата равен 32 см, а одна сторона прямоугольника 4 см. Найдите другую сторону прямоугольника, если известно, что он имеет площадь такую же, как квадрат.

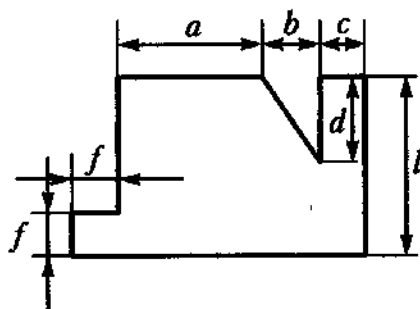


Рис. 4

3.

1. На стороне BC параллелограмма $ABCD$ взята точка M . Докажите, что площадь параллелограмма вдвое больше площади треугольника AMD .
2. На продолжении стороны AD квадрата $ABCD$ за вершину A взята точка M , $MC = 20$ дм, $\angle CMD = 30^\circ$. Найдите площадь квадрата.

4.

1. В трапеции $ABCD$ AD — большее основание. Через середину стороны CD и вершину B проведена прямая, пересекающая луч AD в точке E . Докажите, что площадь трапеции равна площади треугольника ABE .
2. Биссектриса угла B прямоугольника $ABCD$ пересекает сторону AD в точке K , $AK = 5$ см, $KD = 7$ см. Найдите площадь прямоугольника.

5.

1. На стороне AB параллелограмма $ABCD$ отмечена точка E так, что $DE \perp AB$. Докажите, что площадь параллелограмма $ABCD$ равна $DE \cdot AB$.
2. Докажите, что площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.

6.

1. На стороне AC треугольника ABC отмечена точка D так, что $BD \perp AC$. Докажите, что площадь треугольника равна $\frac{1}{2}BD \cdot AC$.
2. Докажите, что площадь квадрата равна половине квадрата его диагонали.

7.

1. Докажите, что медиана любого треугольника делит этот треугольник на треугольники с равными площадями.
2. В трапеции $ABCD$ $\angle A = 45^\circ$, $\angle C = 100^\circ$. Диагональ BD составляет с боковой стороной CD угол в 35° . На стороне AB построен параллелограмм $ABPK$ так, что точка D принадлежит отрезку BP и $BD : DP = 2 : 1$. Найдите площадь параллелограмма, если его периметр равен 30 см.

8.

1. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BD . Точка D_1 симметрична точке D относительно точки B . Найдите отношение площадей треугольников AD_1C и ABC .
2. В трапеции $MPKO$ $\angle M = 45^\circ$ и $\angle K = 135^\circ$. На стороне MP построен параллелограмм $MPDT$ так, что его сторона параллельна прямой KO и пересекает сторону MO в точке A , причем $PA : AD = 1 : 3$. Площадь параллелограмма равна 36 см^2 . Найдите его периметр.

§ 10. Площадь параллелограмма

1.

1. В параллелограмме $ABCD$ угол B тупой. На продолжении стороны AD за вершину D отмечена точка E так, что $\angle ECO = 60^\circ$, $\angle CED = 90^\circ$, $AB = 4$ см, $AD = 10$ см. Найдите площадь параллелограмма.
2. В параллелограмме $ABCD$ точки M и K — середины сторон BC и AD соответственно. Докажите, что площадь четырехугольника $ABMK$ равна площади треугольника ACD .

2.

1. В параллелограмме $MPKT$ на стороне MT отмечена точка E , $\angle PEM = 90^\circ$, $\angle EFT = 45^\circ$, $ME = 4$ см, $ET = 7$ см. Найдите площадь параллелограмма.
2. В параллелограмме $ABCD$ точки M, P, K, T являются серединами сторон AB, BC, CD, AD соответственно. Докажите, что площади четырехугольников $ABPT$ и $AMKD$ равны.

3.

1. Найдите углы параллелограмма, если его площадь равна 20 см^2 , а высота, проведенная из вершины тупого угла, делит одну из сторон на отрезки 2 см и 8 см, считая от вершины острого угла.
2. Сравните площади параллелограмма и прямоугольника, если они имеют одинаковые основания и одинаковые периметры.

4.

1. Найдите углы параллелограмма, если его площадь равна 40 см^2 , а стороны 10 см и 8 см.
2. Сравните площади квадрата и параллелограмма, если они имеют одинаковые параметры и сторона квадрата равна высоте параллелограмма. (Параллелограмм не является прямоугольником.)

7.

1. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна c . От вершины меньшего острого угла на катете отложен отрезок длиной a , из конца которого к гипотенузе проведен перпендикуляр длиной b . Найдите меньший катет исходного треугольника.
2. В параллелограмме $ABCD$ угол A тупой. На стороне BC взята точка M , а через вершину D проведена прямая, параллельная AM и пересекающая луч MC в точке K . Точка E принадлежит отрезку AM . На прямой EM отмечена точка P так, что $DE \parallel KP$. Сравните площади невыпуклых пятиугольников $ABMED$ и $DKPMC$.

8.

1. В прямоугольной трапеции боковые стороны равны a и b ($a > b$). Меньшее основание равно c . Найдите расстояние от вершины прямого угла меньшего основания до прямой, содержащей большую боковую сторону.
2. В параллелограмме $ABCD$ угол A тупой. Вне параллелограмма на луче BC отмечены точки M и K , а на луче DC — точки E и P , причем $AM \parallel DK$, $EA \parallel BP$. Докажите, что площади невыпуклых пятиугольников $ABPCM$ и $ADKCE$ равны.

§ 11. Площадь треугольника

1.

1. В прямоугольнике $ABCD$ $BD = 12$ см. Вершина B удалена от прямой AC на 4 см. Найдите площадь треугольника ABC .
2. В треугольнике ABC $\angle C = 135^\circ$, $AC = 6$ дм, высота BD равна 2 дм. Найдите площадь треугольника ABD .

2.

1. Найдите площадь равнобедренного прямоугольного треугольника с гипотенузой 10 см.
2. На стороне AC треугольника ABC с площадью 36 см^2 взята точка D , $AD : DC = 1 : 5$. Найдите площадь треугольника ABD .

3.

1. В треугольнике ABC $\angle B = 130^\circ$, $AB = a$, $BC = b$, а в параллелограмме $MPKH$ $MP = a$, $MH = b$, $\angle M = 50^\circ$. Найдите отношение площади треугольника к площади параллелограмма.
2. В прямоугольном треугольнике ABC точка O — середина медианы CH , проведенной к гипотенузе AB , $AC = 6$ см, $BC = 8$ см. Найдите площадь треугольника OBC .

4.

1. В треугольнике ABC $AB = x$, $AC = y$, $\angle A = 15^\circ$, а в треугольнике MPK $KP = x$, $MK = y$, $\angle K = 165^\circ$. Сравните площади этих треугольников.
2. В ромбе $ABCD$ диагонали равны 5 см и 12 см. На диагонали AC взята точка M так, что $AM : MC = 4 : 1$. Найдите площадь треугольника AMD .

5.

1. Внутри параллелограмма $ABCD$ отмечена точка M . Докажите, что сумма площадей треугольников AMD и BMC равна половине площади параллелограмма.
2. В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$. На сторонах AC , AB , BC соответственно взяты точки M , P , K так, что четырехугольник $CMPK$ является квадратом, $AC = 6$ см, $BC = 14$ см. Найдите сторону MC .

6.

1. Докажите, что диагонали параллелограмма делят его на четыре треугольника, имеющие одинаковую площадь.
2. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC диагонали пересекаются в точке O , которая удалена от прямой CD на 4 см. Найдите площадь треугольника AOB , если $CD = 8$ см.

7.

1. В четырехугольнике диагонали равны 8 см и 12 см и пересекаются под углом 30° друг к другу. Найдите площадь этого четырехугольника.
2. Точка E — середина стороны AB треугольника ABC , а точки M и N делят сторону BC на три равные части, $BM = MN = NC$. Найдите площадь треугольника EMN , если площадь треугольника ABC равна S .

8.

1. В треугольнике точка пересечения биссектрис удалена от прямой, содержащей одну из сторон, на 1,5 см. Периметр треугольника равен 16 см. Найдите его площадь.
2. На сторонах AB , BC , AC треугольника ABC отмечены точки M , K , P соответственно так, что $AM : MB = BK : KC = PC : AP = 2 : 1$. Площадь треугольника ABC равна S . Найдите площадь четырехугольника $MBKP$.

§ 12. Площадь трапеции

1.

1. Периметр равнобедренной трапеции равен 32 см, боковая сторона 5 см, площадь 44 см^2 . Найдите высоту трапеции.
2. В трапеции $ABCD$ основания AD и BC равны 10 см и 8 см соответственно. Площадь треугольника ACD равна 30 см^2 . Найдите площадь трапеции.

2.

1. В прямоугольной трапеции площадь равна 30 см^2 , периметр 28 см, а меньшая боковая сторона 3 см. Найдите большую боковую сторону.
2. В трапеции $MPKT$ меньшее основание PK равно 6 см, а высота трапеции 8 см. Найдите площадь трапеции, если площадь треугольника MKT равна 48 см^2 .

3.

1. В прямоугольной трапеции меньшая боковая сторона равна 3 дм и составляет с меньшей диагональю угол 45° . Острый угол трапеции также равен 45° . Найдите площадь трапеции.
2. Высоты, проведенные из вершин меньшего основания равнобедренной трапеции, делят большее основание на три отрезка, сумма двух из которых равна третьему. Найдите площадь этой трапеции, если ее меньшее основание и высота равны по 6 см.

4.

1. В прямоугольной трапеции меньшее основание равно 4 см и составляет с меньшей диагональю угол 45° . Найдите площадь трапеции, если ее тупой угол равен 135° .
2. Высота равнобедренной трапеции, проведенная из вершины тупого угла и делящая большее основание на два отрезка, один из которых равен половине меньшего основания, равна 6 см. Большее основание превосходит меньшее на 2 см. Найдите площадь трапеции.

5.

1. В трапеции $ABCD$ AD — большее основание, $\angle D = 60^\circ$. Биссектрисы углов C и D пересекаются в точке O , $OD = a$, $BC = b$, $AD = c$. Найдите площадь трапеции.
2. В трапеции $MPHK$ MK — большее основание. Площади треугольников MHK и KHP равны S_1 и S_2 соответственно. Найдите площадь трапеции.

6.

1. В трапеции $MHPK$ $MH = HK$, точка A — середина большего основания MK , а точка B — середина боковой стороны MH , $BA \perp MH$, $MK = a$, $HP = b$. Найдите площадь трапеции.
2. Отрезок EP пересекает основания BC и AD трапеции $ABCD$ так, что точки A и E лежат по разные стороны от прямой BC и $EP \perp BC$. Основания трапеции делят отрезок EP на три равные части. Площади треугольников BEC и APD равны S_1 и S_2 соответственно. Найдите площадь трапеции.

7.

1. В трапеции $ABCD$ AD — большее основание. Прямые, проходящие через середины сторон AB , BC , DC перпендикулярно к этим сторонам, пересекаются в точке O ; $\angle BCD = 150^\circ$, $AB = a$, $BC = b$, $AD = c$. Найдите площадь трапеции.
2. В трапеции $MHPK$ основания MK и HP относятся как 3:1. На отрезке MK отмечены точки A и B так, что $MA = AB = KB$. Отрезки HB и AP пересекаются в точке O . Найдите площадь трапеции, если площадь треугольника HOP равна 5 см^2 .

8.

1. В трапеции $MPKH$ $MH \parallel PK$. Биссектрисы углов M , K , H , P пересекаются в точке O . Расстояние от точки O до прямой PK равно a , $PM = b$, $KH = c$. Найдите площадь трапеции.
2. В трапеции $ABCD$ AD — большее основание. Диагонали пересекаются в точке O . Площади треугольников BOC и AOD равны 5 см^2 и 20 см^2 соответственно. Найдите площадь трапеции.

§ 13. Теорема Пифагора

1.

1. Большая диагональ прямоугольной трапеции равна 13 см, а большее основание 12 см. Найдите площадь трапеции, если ее меньшее основание равно 8 см.
2. Определите углы треугольника со сторонами 1, $\sqrt{3}$, 2.

2.

1. Основания прямоугольной трапеции равны 9 см и 18 см, а большая боковая сторона 15 см. Найдите площадь трапеции.
2. Определите углы треугольника со сторонами 1, 1, $\sqrt{2}$.

3.

1. В некоторой трапеции диагональ и боковая сторона, выходящие из вершины тупого угла, равны 26 см и $\sqrt{577}$ см соответственно, высота трапеции 24 см, меньшее основание 7 см. Найдите площадь трапеции.
2. В треугольнике ABC $AB = \sqrt{2}$, $BC = 2$. На стороне AC отмечена точка M так, что $AM = 1$, $BM = 1$. Найдите $\angle ABC$.

4.

1. В параллелограмме меньшая высота и меньшая сторона равны 9 см и $\sqrt{82}$ см соответственно. Большая диагональ 15 см. Найдите площадь параллелограмма.
2. В треугольнике MPK $PK = 2$. На стороне MK отмечена точка A так, что $MA = AP = \sqrt{3}$, $AK = 1$. Найдите $\angle MPK$.

5.

1. В равнобедренной трапеции со взаимно перпендикулярными диагоналями боковая сторона равна 26 см. Высота, проведенная из вершины тупого угла, делит большее основание на отрезки, меньший из которых равен 24 см. Найдите площадь трапеции.
2. Боковые стороны трапеции равны 9 см и 12 см, а основания 30 см и 15 см. Найдите угол, который образуют продолжения боковых сторон трапеции.

6.

1. В равнобедренной трапеции диагональ равна 25 см, а высота 15 см. Найдите площадь трапеции.
2. Диагонали некоторой трапеции равны 5 см и 12 см, а основания 3 см и 10 см. Найдите углы между диагоналями этой трапеции.

7.

1. В остроугольном треугольнике ABC BH — высота. Докажите, что $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \times AH$.
2. Дан треугольник со сторонами a, b, c . Определите вид треугольника, если $c^2 > a^2 + b^2$.

8.

1. В треугольнике HPK угол H тупой, PE — высота треугольника. Докажите, что $PK^2 = HP^2 + HK^2 + 2HE \times HK$.
2. В треугольнике со сторонами a, b, c — большая сторона. Определите вид треугольника, если $c^2 < a^2 + b^2$.

§ 14. Площади многоугольников

1.

1. Перечертите фигуру, изображенную на рисунке 7. Проведите необходимые измерения и вычислите площадь этой фигуры.
2. На стороне AB квадрата $ABCD$, равной 12 см, отмечена точка M так, что $MC = 13$ см. Найдите площадь четырехугольника $AMCD$.

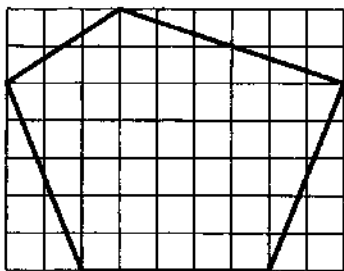


Рис. 7

2.

1. Перечертите фигуру, изображенную на рисунке 8. Проведите необходимые измерения и вычислите площадь этой фигуры.
2. На стороне PK прямоугольника $MPKH$ отмечена точка E , $ME = 15$ см, $PM = 12$ см, $EK = 6$ см. Найдите площадь четырехугольника $MEKH$.

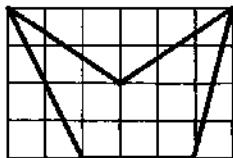


Рис. 8

3.

1. Ученику надо было вычислить площадь многоугольника, изображенного на рисунке 9. В его распоряжении оказалась только масштабная линейка. После измерений ученик установил, что $AB = PE = 3$ см, $AP = BE = 4$ см, $AE = 5$ см, $BC = 1$ см, $DC = 12$ см, $DE = 13$ см и точки C, B, E лежат на одной прямой. Может ли ученик, пользуясь этими результатами измерений, вычислить площадь? Чему равно ее значение?

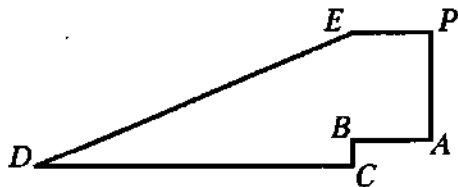


Рис. 9

2. В равнобедренной трапеции диагональ, меньшее основание и высота равны $\sqrt{35}$ см, 3 см и $\sqrt{10}$ см соответственно. Найдите площадь трапеции.

4.

1. Ученику необходимо было вычислить площадь многоугольника, изображенного на рисунке 10. В его распоряжении была только масштабная линейка. В результате измерений установлено, что $MP = HT = 4$ см, $MT = PH = 3$ см, $MH = 5$ см, $EH = 10$ см, $PK = 5$ см, $KE = 12$ см. Точки P, H, E лежат на одной прямой. Мог ли ученик вычислить площадь по этим результатам? Чему эта площадь равна?

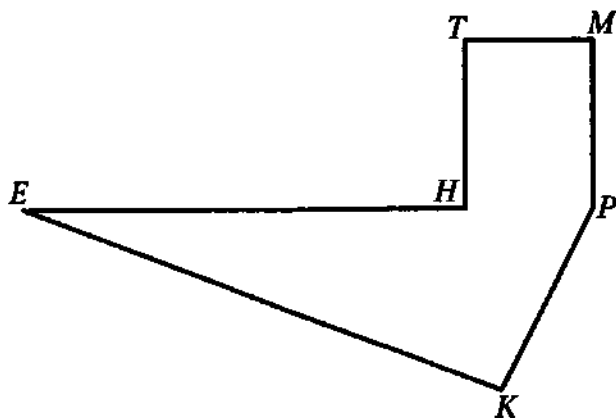


Рис. 10

2. Меньшая высота параллелограмма равна 4 см и делит большую сторону на отрезки, каждый из которых равен по 3 см. Найдите большую высоту параллелограмма.

5.

1. В треугольнике два угла равны 105° и 45° , а площадь равна $(\sqrt{3} + 1)$ см². Найдите меньшую высоту треугольника.
2. Диагональ ромба в четыре раза больше расстояния от точки пересечения его диагоналей до стороны. Найдите площадь ромба, если его сторона равна 2 см.

6.

1. Большее основание трапеции равно 6 см, а меньшее 4 см. Углы при большем основании 30° и 45° . Найдите площадь трапеции.
2. Высоты параллелограмма равны 6 см и 7,8 см, а его площадь 78 см². Найдите длину меньшей диагонали.

7.

1. В трапеции $MPKE$ точка A принадлежит большему основанию ME , $AM = MP = a$, $AE = EK$. Найдите площадь трапеции, если ее диагонали проходят через точку пересечения медиан треугольника PAK .
2. Найдите площадь равнобедренного треугольника, если его высота, проведенная к основанию, и отрезок, соединяющий середины основания и боковой стороны, равны по 12 см.

8.

1. В трапеции $ABCD$ M — середина большего основания AD , $AB = BC = CD = a$. Точка пересечения диагоналей трапеции совпадает с точкой пересечения высот треугольника BMC . Найдите площадь трапеции.
2. Диагональ параллелограмма составляет со сторонами углы 90° и 15° . Найдите площадь параллелограмма, если его большая сторона равна 12 см.

§ 15. Пропорциональные отрезки

1.

1. Отрезки AB , CD и EF , MN пропорциональны друг другу. Найдите EF , если $AB = 5$ см, $CD = 80$ мм, $MN = 1$ дм.
2. В прямоугольном треугольнике ACB ($\angle C = 90^\circ$) $AC = 6$ см, $BC = 8$ см, CD — биссектриса. Найдите AB , AD , DB .

2.

1. Отрезки KP , MN и DO , AL пропорциональны друг другу. Найдите AL , если $KP = 8$ дм, $MN = 40$ см, $DO = 1$ м.
2. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) $AB = 20$ см, $AC = 16$ см, AK — биссектриса. Найдите BC , BK , KC .

3.

1. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O , $CD = 10$ см. Найдите периметр параллелограмма, если $\frac{BC}{CD} = \frac{AC}{OC}$.
2. В равнобедренном треугольнике основание меньше боковой стороны на 9,6 см, а биссектриса делит боковую сторону на отрезки, которые относятся как 3 : 5. Найдите периметр треугольника.

4.

1. В треугольнике ABC точка K лежит на стороне AC . Площади треугольников ABK и KBC относятся как 1 : 3, $BC = 10$ см. Найдите AC , если $\frac{BC}{AC} = \frac{AK}{KC}$.
2. Основание равнобедренного треугольника равно 18 мм, а биссектриса делит боковую сторону на отрезки, из которых прилежащий к основанию равен 12 мм. Найдите периметр треугольника.

5.

1. Даны два отрезка AB и EK . Точки C и M лежат соответственно на отрезках AB и EK . Отрезки AC , CB и EM , MK пропорциональны. Докажите, что $AB \cdot MK = CB \cdot EK$.
2. Треугольник ABC прямоугольный ($\angle C = 90^\circ$), $D \in AC$ и $E \in AB$, причем $DE \parallel BC$ и $DE = DC$, $AE = 15$ мм, $EB = 20$ мм. Найдите периметр треугольника ABC .

6.

1. Даны два отрезка KP и EC . Точки M и L лежат соответственно на отрезках KP и EC . Отрезки KP , MP и EC , LC пропорциональны. Докажите, что $KM \cdot LC = MP \cdot EL$.
2. Треугольник ABC прямоугольный ($\angle C = 90^\circ$), $P \in AC$ и $K \in AB$, причем $PK \parallel BC$ и $PK = KB$, $AP = 5$ дм, $PC = 4$ дм. Найдите периметр треугольника ABC .

7.

1. В треугольнике ABC на стороне AC взята точка D . Докажите, что если $\frac{AC}{DC} > \frac{AB}{BC}$, то $\angle ABD > \angle DBC$.
2. В треугольнике ABC $AB = 8$ см, $BC = 9$ см, $AC = 2$ см. На сколько нужно продолжить сторону AC до пересечения с биссектрисой внешнего угла при вершине B ?

8.

1. В треугольнике ABC на стороне AC взята точка D . Докажите, что если $\angle ABD > \angle DBC$, то $\frac{AD}{DC} > \frac{AB}{BC}$.
2. Стороны треугольника ABC ($\angle B$ меньший из углов треугольника) равны 16 см, 20 см, 24 см. Найдите расстояние между точками пересечения биссектрисы угла B и биссектрисы внешнего угла при вершине B с меньшей стороной треугольника и ее продолжением.

§ 16. Определение подобных треугольников

1.

1. Треугольники ABC и DEF подобны. $\angle A = \angle D$, $\angle C = \angle F$, $EF = 14$, $DF = 20$, $BC = 21$. Найдите AC .
2. Площади двух подобных треугольников равны 16 см^2 и 25 см^2 . Одна из сторон первого треугольника равна 2 см. Найдите сходственную ей сторону второго треугольника.

2.

1. Треугольники KPF и EMT подобны, причем $\frac{KP}{ME} = \frac{PF}{MT} = \frac{KF}{ET}$, $\angle F = 20^\circ$, $\angle E = 40^\circ$. Найдите остальные углы этих треугольников.
2. Две сходственные стороны подобных треугольников равны 2 см и 5 см. Площадь первого треугольника 8 см^2 . Найдите площадь второго треугольника.

3.

1. На рисунке 11 $\triangle BEC \sim \triangle ABC$, $AE = 16 \text{ см}$, $CE = 9 \text{ см}$. Углы ABC и BEC тупые. Найдите BC .
2. Периметры подобных треугольников относятся как 2 : 3, сумма их площадей равна 260 см^2 . Найдите площадь каждого треугольника.

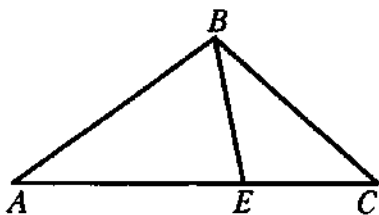


Рис. 11

4.

1. На рисунке 12 треугольники ABC и DEC подобны, причем $DE \parallel AB$, $AD = 3 \text{ см}$, $DC = 5 \text{ см}$, $BC = 7 \text{ см}$. Найдите CE .
2. Площади двух подобных треугольников равны 50 дм^2 и 32 дм^2 , сумма их периметров равна 117 дм. Найдите периметр каждого треугольника.

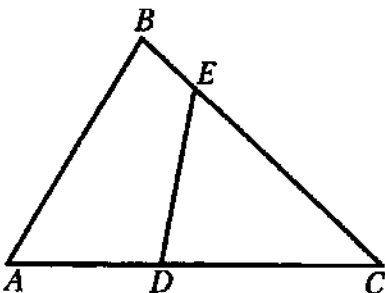


Рис. 12

5.

1. Диагональ AC делит трапецию $ABCD$ на два подобных треугольника ABC и ACD , $BC = 4$ см, $AD = 9$ см. Найдите AC .
2. Прямая DE , параллельная стороне AC треугольника ABC , отсекает от него треугольник DBE , стороны которого в три раза меньше сторон данного треугольника. Найдите площадь трапеции $ADEC$, если площадь треугольника ABC равна 27 см².

6.

1. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) AC — биссектриса угла A делит трапецию на два подобных треугольника ABC и ACD , $AB = 9$ см, $CD = 12$ см. Найдите периметр трапеции.
2. Прямая DE , параллельная стороне AC треугольника ABC , отсекает от него треугольник DBC , стороны которого в четыре раза меньше сторон данного треугольника. Найдите площадь треугольника ABC , если площадь трапеции $ADEC$ равна 30 см².

7.

Отрезок BK ($K \in AC$) разбивает треугольник ABC на два подобных треугольника ABK и KBC , причем $\frac{S_{ABK}}{S_{KBC}} = \frac{1}{3}$. Найдите углы треугольника.

8.

Отрезок FP разбивает треугольник EFM на два подобных треугольника EFP и PFM , причем $\angle PFM = 60^\circ$. Площадь треугольника PFM равна 30 см². Найдите площадь треугольника EFM .

§ 17. Первый признак подобия треугольников

1.

1. Через вершину A параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке E , а продолжение стороны DC — в точке F . Докажите, что $\triangle ABE \sim \triangle EFC$.
2. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle B_1 = \angle C$, $\angle B = \angle A_1$, $AC = 2$, $B_1C_1 = 4$, A_1C_1 больше AB на 2,2, $A_1B_1 = 2,8$. Найдите неизвестные стороны треугольников.

2.

1. Через вершину C параллелограмма проведена прямая, пересекающая сторону AD в точке E , а продолжение стороны BA — в точке F . Докажите, что $\triangle ECD \sim \triangle FBC$.
2. В треугольниках ABC и DEF $\angle A = \angle E$, $\angle C = \angle F$, $AC = 6$, $EF = 2$, $AB = 3,3$. Сторона DF меньше стороны BC на 3,2. Найдите неизвестные стороны треугольников.

3.

1. В треугольнике ABC через точку P , лежащую на стороне BC , проведены прямые, пересекающие стороны AB и AC соответственно в точках Q и R и параллельные AC и AB . Докажите, что $PQ \cdot PR = BQ \cdot CR$.
2. Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O . Площади треугольников BOC и AOD относятся как 1 : 9. Сумма оснований BC и AD равна 4,8 см. Найдите основания трапеции.

4.

1. На продолжении сторон DC (за точку C) и BA (за точку A) параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки K и E . KE пересекает сторону BC в точке M , а сторону AD — в точке F . Докажите, что $AE \cdot MC = KC \cdot AF$.
2. Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O . Периметры треугольников BOC и AOD относятся как 2 : 3, $AC = 20$. Найдите длины отрезков AO и OC .

5.

1. В остроугольном треугольнике ABC BD и AE — высоты. Докажите, что $DC \cdot AC = EC \cdot BC$.
2. В трапеции $ABCD$ (AD и BC — основания) точка K лежит на стороне CD , причем $CK : KD = 1 : 2$. AK пересекает BD в точке O . Докажите, что если $BC : AD = 1 : 2$, то $BO = OD$.

6.

1. В остроугольном треугольнике ABC его высоты BD и AE пересекаются в точке O . Докажите, что $BO \cdot OD = AO \cdot OE$.
2. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) точка M лежит на стороне CD , причем $CM : MD = 2 : 3$, $AB = AD$, $BC : AD = 1 : 3$. Докажите, что $BD \perp AM$.

7.

1. В треугольнике ABC угол A в два раза больше угла B , $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Докажите, что $a^2 = bc + b^2$.
2. В треугольнике ABC на сторонах AB и BC выбраны соответственно точки D и E . CD и AE пересекаются в точке O , $S_{ADO} = S_{CEO} = 8$, $S_{DOE} = 4$. Найдите площадь треугольника ABC .

8.

1. Катеты прямоугольного треугольника ACB ($\angle C = 90^\circ$) $BC = a$, $AC = b$, $E \in AB$, причем $AE : EB = 1 : 2$. Докажите, что $CE = \frac{\sqrt{4b^2 + a^2}}{3}$.
2. В треугольнике ABC точки D и E лежат соответственно на сторонах AB и BC ; AE и CD пересекаются в точке O , $S_{ADC} = S_{AEC}$, $S_{DOE} = 2$, $S_{AOC} = 8$. Найдите площадь треугольника ABC .

§ 18. Второй и третий признаки подобия треугольников

1.

- Отрезки AB и CD пересекаются в точке O , $\frac{AO}{OB} = \frac{DO}{OC}$. Докажите, что $\angle CBO = \angle DAO$.
- Докажите, что треугольники, изображенные на рисунке 13, подобны, и выясните взаимное положение прямых AB и DE .

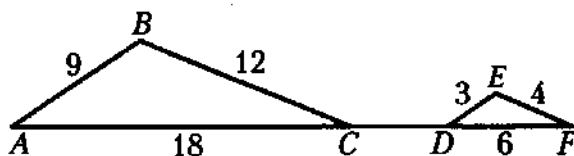


Рис. 13

2.

- Дан параллелограмм $ABCD$. Точки E, F, M, N принадлежат соответственно сторонам AB, BC, CD, AD , $\frac{EB}{BF} = \frac{DM}{DN}$. Докажите, что $\angle BEF = \angle NMD$.
- Докажите, что треугольники, изображенные на рисунке 14, подобны, и выясните взаимное положение прямых BC и DF .

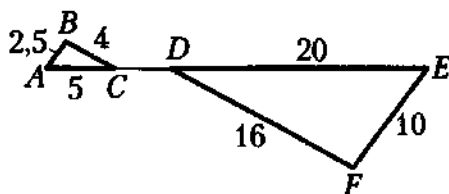


Рис. 14

3.

- В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ BD и B_1D_1 — медианы, $\angle A = \angle A_1$, $\angle BDA = \angle B_1D_1A_1$. Докажите, что треугольник BDC подобен треугольнику $B_1D_1C_1$.
- В треугольнике ABC $AB = 4$, $BC = 6$, $AC = 9$. Точка E лежит на стороне BC . Внутри треугольника взята точка M так, что $MB = 1\frac{7}{9}$, $ME = 2\frac{2}{3}$, $CE = 2$. Докажите, что $ME \parallel AC$.

4.

1. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ BE и B_1E_1 — биссектрисы, $\angle B = \angle B_1$, $\frac{AE}{EC} = \frac{A_1E_1}{E_1C_1}$. Докажите, что $\triangle ABE \sim \triangle A_1B_1E_1$.
2. В треугольнике ABC $AB = 4$, $BC = 6$, $AC = 7$. Точка E лежит на стороне AB . Внутри треугольника взята точка M так, что $MB = 5\frac{1}{4}$, $ME = 4\frac{1}{2}$, $AE = 1$. Прямая BM пересекает AC в точке P . Докажите, что $\triangle APB$ равнобедренный.

5.

1. В трапеции $ABCD$ основания $AD = a$, $BC = b$, $AC = \sqrt{ab}$. Докажите, что $\angle BAC = \angle ADC$.
2. В четырехугольниках $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$, $\angle ADB = \angle A_1D_1B_1$, $\angle CAD = \angle C_1A_1D_1$, и $\angle ACD = \angle A_1C_1D_1$. Докажите, что $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

6.

1. В треугольнике ABC точка D лежит на стороне AC , $DC = a$, $AC = b$, $BC = \sqrt{ab}$. Докажите, что $\angle BAC = \angle DBC$.
2. В четырехугольниках $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ диагонали пересекаются в точках O и O_1 , причем $AO = OC$ и $A_1O_1 = O_1C_1$, $\angle AOD = \angle A_1O_1D_1$ и $\angle ADO = \angle A_1D_1O_1$, $\angle ABO = \angle A_1B_1O_1$. Докажите, что $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

7.

1. Внутри треугольника ABC взята точка D и соединена с его вершинами A и B . На стороне BC вне его построен треугольник BCE так, что $\angle EBC = \angle ABD$ и $\angle ECB = \angle BAD$. Докажите, что $\triangle DBE \sim \triangle ABC$.
2. В треугольнике ABC $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Докажите, что если $a^2 = bc + b^2$, то $\angle A = 2\angle B$.

8.

1. B — середина отрезка AC . Точки D и E находятся по одну сторону от прямой AC , причем $\angle ADB = \angle EBC$ и $\angle DAB = \angle BCE$. Докажите, что $\angle BDE = \angle ADB$.
2. $ABCD$ — параллелограмм. На сторонах AB , BC , CD , DA отмечены соответственно точки M , K , T , P , причем $\frac{AM}{CT} = \frac{AP}{CK} = \frac{1}{2}$. MT и KP пересекаются в точке E . В каком отношении эта точка делит отрезок MT ?

§ 19. Средняя линия треугольника.

Свойство медиан треугольника

1.

1. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O , K — середина стороны AB , $AK = 3$ см, $KO = 4$ см. Найдите периметр параллелограмма. Сравните углы KOA и BCA .
2. В треугольнике ABC $AC = 12$ см. Через точку пересечения медиан проведена прямая DE ($D \in AB$, $E \in BC$), параллельная AC . Найдите DE .

2.

1. В ромбе $ABCD$ O — точка пересечения диагоналей, E и F — середины сторон BC и DC . Докажите, что $EF = BO$ и $EF \perp AC$.
2. Через точку пересечения медиан треугольника MPK проведен отрезок CD , параллельный MK ($C \in MP$, $D \in PK$), $CD = 18$ см. Найдите MK .

3.

1. Четырехугольники $ABCD$ и $DCEF$ имеют общую сторону CD . Точки A , D , F не лежат на одной прямой, $AB = CD = EF$, $AB \parallel CD \parallel EF$. Диагонали четырехугольников $ABCD$ и $DCEF$ пересекаются соответственно в точках O_1 и O_2 . Докажите, что $AF \parallel O_1O_2$ и $AF = 2O_1O_2$.
2. В треугольнике ABC $AB = BC$. Медианы треугольника пересекаются в точке O , $OA = 5$, $OB = 6$. Найдите площадь треугольника ABC .

4.

1. $ABCD$ — параллелограмм. От вершин A и B на сторонах AD и BC отложены равные отрезки AQ и BP , E и F — точки пересечения диагоналей четырехугольников $ABPQ$ и $QPCD$. Докажите, что $EF \parallel BC$ и $EF = \frac{1}{2}BC$.
2. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) $BC = 9$. Медианы треугольника пересекаются в точке O , $OB = 10$. Найдите площадь треугольника ABC .

5.

1. В четырехугольнике $ABCD$ точки M, N, P, Q соответственно середины сторон AB, BC, CD, DA . Докажите, что отрезки MP и NQ точкой пересечения делятся пополам.
2. В параллелограмме $ABCD$ F — середина BC . AF пересекает BD в точке E , CE пересекает AB в точке K ; $KB = 5$, $AD = 12$, $\angle A = 30^\circ$. Найдите площадь параллелограмма.

6.

1. В четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD равны между собой. Точки M, P, K, T соответственно середины сторон AB, BC, CD, AD . Докажите, что $MK \perp PT$.
2. Катеты прямоугольного треугольника равны 3 см и 4 см. Найдите расстояние от точки пересечения медиан треугольника до гипотенузы.

7.

1. В параллелограмме $ABCD$ $\angle A$ острый, $CE \perp AB$, $BC = 2AB$, M — середина AD . Докажите, что $\angle EMD = 3 \angle AEM$.
2. В треугольнике ABC медианы AE и CD пересекаются в точке O ; $AE = 9$, $CD = 12$, $AC = 10$. Найдите площадь треугольника ABC .

8.

1. $ABCD$ — ромб. Сторона ромба равна a , AE и DF — биссектрисы внешних углов A и D , $BE \perp AE$ и $CF \perp DF$. Докажите, что $EF = 2a$.
2. Площадь треугольника ABC равна 12 см^2 . Медианы AE и CD пересекаются в точке O , $\angle AOC = 150^\circ$, $AE = 3$ см. Найдите CD .

§ 20. Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике

1.

1. В прямоугольном треугольнике ACB ($\angle C = 90^\circ$) $CD \perp AB$, $\frac{AC}{CB} = \frac{1}{2}$.
Найдите отношение площадей треугольников ACD и CDB .
2. В параллелограмме $ABCD$ $BD \perp AB$, $BE \perp AD$, $BE = 6$ см, $AE = 3$ см.
Найдите площадь параллелограмма.

2.

1. В прямоугольном треугольнике ACB ($\angle C = 90^\circ$) $CD \perp AB$, $\frac{AD}{AC} = \frac{2}{3}$.
Найдите отношение площадей треугольников ADC и ACB .
2. $ABCD$ — прямоугольная трапеция ($\angle D = \angle C = 90^\circ$), $BC = 3$, $CD = 6$, $BD \perp AB$. Найдите площадь трапеции.

3.

1. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена медиана BD , $DE \perp BC$, $\frac{BD}{DC} = \frac{2}{1}$. Площадь треугольника DEC равна 20 см². Найдите площадь треугольника ABC .
2. $ABCD$ — прямоугольник. $AB = 4$, $BC = 6$, $BE \perp AC$. Через точку E проведена прямая, параллельная AD , до пересечения в точке F со стороной CD . Найдите EF .

4.

1. Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O , $AC : BD = 3 : 2$, $OE \perp AB$. Площадь треугольника AEO равна 27 см². Найдите площадь ромба.
2. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = CB$) BD — биссектриса, $DE \perp AB$, $\frac{AE}{EB} = \frac{4}{9}$, $BD + AC = 14$. Найдите периметр треугольника ABC .

5.

1. В прямоугольнике $ABCD$ $BE \perp AC$, $AE : EC = 1 : 3$. Найдите углы, которые составляет со сторонами прямоугольника его диагональ.
2. В трапеции $ABCD$ (AD и BC — основания) $BE \perp AD$, $BC : AD = 1 : 2$, $BE : ED = 3 : 4$. Площадь треугольника ABE равна 18 см^2 . Найдите площадь трапеции.

6.

1. В трапеции $ABCD$ $AB \perp AD$, $AC \perp CD$, $BC = 6$, $AD = 8$. Найдите углы трапеции.
2. В параллелограмме $ABCD$ $BD \perp AB$, $AB : AD = 1 : 2$, $BE \perp AD$, $AE = 4 \text{ см}$. Найдите площадь параллелограмма.

7.

1. В трапеции $ABCD$ $AC \perp BD$, $CE \perp AD$, $AC = 15 \text{ см}$, $AE = 9 \text{ см}$. Найдите площадь трапеции.
2. В треугольнике ABC CM — биссектриса внешнего угла C , $BM \perp CM$. Угол B в два раза меньше этого внешнего угла, $BF \perp AM$, $AF : FM = 3 : 1$. Найдите угол BAM .

8.

1. В трапеции $ABCD$ $AC \perp BD$, $\frac{AC}{BD} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Высота трапеции равна $2\sqrt{6} \text{ см}$. Найдите площадь трапеции.
2. В ромбе $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O , $OK \perp AD$, $\frac{S_{ABCD}}{S_{OKD}} = \frac{16}{1}$. Найдите углы ромба.

§ 21. Задачи на построение, решаемые методом подобия

1.

1. Постройте треугольник ABC по данным углам A и C и медиане AM .
2. Данный отрезок разделите в отношении $2 : 3 : 5$.

2.

1. Постройте треугольник ABC по данному углу C , отношению двух сторон $AC : CB = 2 : 3$ и биссектрисе CD .
2. Данный отрезок разделите в отношении $1 : 4 : 7$.

3.

1. Постройте треугольник ABC по тупому углу B , отношению сторон $AB : BC = 3 : 2$ и высоте AD .
2. Даны два отрезка a и b . Постройте отрезок $x = \frac{a^2}{b}$.

4.

1. Постройте треугольник ABC по углу A , отношению сторон $AB : AC = 1 : 3$ и расстоянию от точки пересечения медиан до вершины B .
2. Даны два отрезка a и b . Постройте отрезок $x = \frac{(a+b)b}{a}$.

5.

1. В остроугольный треугольник впишите прямоугольник, у которого одна сторона в два раза больше другой, так, чтобы большая сторона прямоугольника лежала на одной стороне треугольника, а две его вершины лежали на двух других сторонах треугольника.
2. На рисунке 15 $m \parallel n$. Постройте на прямой n только с помощью линейки отрезок C_1D_1 такой, чтобы $\frac{AB}{CD} = \frac{A_1B_1}{C_1D_1}$.

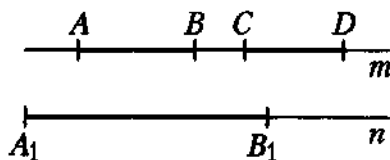


Рис. 15

6.

1. В остроугольный треугольник впишите равнобедренный прямоугольный треугольник так, чтобы вершина прямого угла лежала на стороне треугольника, а гипотенуза была параллельна этой стороне и ее концы располагались на двух других сторонах треугольника.
2. На рисунке 16 $a \parallel b$. При помощи только линейки постройте отрезок C_1D_1 такой, чтобы $\frac{AB}{CD} = \frac{C_1D_1}{A_1B_1}$.

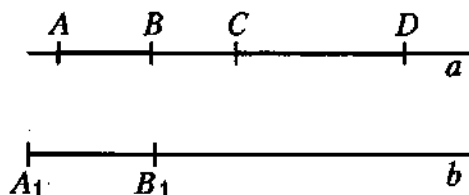


Рис. 16

7.

1. Постройте прямоугольный треугольник, если катеты относятся как 2 : 3 и если известен его периметр.
2. Постройте треугольник ABC по двум острым углам A и C ($\angle A + \angle C > 90^\circ$) и расстоянию от точки пересечения высот до вершины B .

8.

1. Постройте равнобедренный $\triangle ABC$ ($AB = BC$), если высота BD относится к боковой стороне как 1 : 4 и если известен его периметр.
2. Постройте треугольник ABC по данному углу B , по расстоянию от точки пересечения биссектрис до вершины B , если $AB : BC = 1 : 2$.

§ 22. Синус, косинус и тангенс острого угла прямоугольного треугольника и их значение для углов 30° , 45° и 60°

1.

1. В равнобедренной трапеции основания равны 2 и 20, а боковая сторона 15. Найдите синус, косинус и тангенс острого угла трапеции.
2. В окружности AB и CD — два не взаимно перпендикулярных диаметра, $DE \perp AB$, $CD = 4$, $DE = \sqrt{3}$. Найдите острый угол между диаметрами.

2.

1. В прямоугольном треугольнике ACB ($\angle C = 90^\circ$) $CD \perp AB$, $AD = 2$, $DB = 3$. Найдите синус, косинус и тангенс угла A .
2. $ABCD$ — прямоугольная трапеция ($\angle D = \angle C = 90^\circ$), $BC = 2$, $AD = 4$, $CD = 2\sqrt{3}$. Найдите угол A .

3.

1. В прямоугольной трапеции $ABCD$ ($\angle D = \angle C = 90^\circ$, AC и BD — основания) $AB = 9$, $BD = 12$, $AD = 15$. Найдите синус, косинус и тангенс угла CBD .
2. В трапеции $ABCD$ $AD = 2BC$, $BD = 3\sqrt{3}$, $AC = 3$, $BD \perp AC$. Найдите углы, которые образуют с основанием диагонали трапеции.

4.

1. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) $AB = 12$, $BD = 16$, $AD = 20$, $CE \perp BD$. Найдите синус, косинус и тангенс угла BCE .
2. Площадь ромба равна $4\sqrt{2}$, а его сторона $2\sqrt{2}$. Найдите углы ромба.

5.

1. В прямоугольном треугольнике ACB ($\angle C = 90^\circ$) $CE \perp AB$, CD — медиана, $AB = 4$, $ED = \sqrt{3}$. Найдите углы треугольника.
2. В треугольнике ABC $AB = BC = 5$, $AC = 6$. Найдите синус, косинус и тангенс угла ABC .

6.

1. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) $D \in AB$, $DE \parallel AC$, $DE = EC$, $\frac{BD}{DA} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Найдите углы треугольника.
2. Диагонали ромба равны 8 см и 6 см. Найдите синус, косинус и тангенс острого угла ромба.

7.

1. Постройте угол, синус которого в два раза больше его косинуса.
2. Вычислите $\sin 75^\circ$.

8.

1. Постройте угол, косинус которого в три раза меньше его синуса.
2. Вычислите $\sin 15^\circ$.

§ 23. Решение прямоугольных треугольников

1.

1. В параллелограмме стороны равны a и b , острый угол α . Найдите площадь параллелограмма. Вычислите эту площадь, если $a = 2,3$, $b = 3,7$, $\alpha = 40^\circ 37'$.
2. В прямоугольном треугольнике ACB ($\angle C = 90^\circ$) $\angle BAC = 45^\circ$, $AB = 10$, $D \in BC$ ($B - D - C$), $\angle DAC = 30^\circ$. Найдите DC .

2.

1. Высота ромба равна h , острый угол α . Найдите площадь ромба. Вычислите эту площадь, если $h = 17,3$, $\alpha = 52^\circ 43'$.
2. В треугольнике ABC $\angle A = 60^\circ$, $\angle C = 45^\circ$, $BD \perp AC$, $AD = 3$. Найдите BC .

3.

1. В ромбе $ABCD$ острый угол равен α . Меньшая диагональ равна d . Найдите площадь ромба. Вычислите площадь, если $d = 12,3$, $\alpha = 62^\circ 50'$.
2. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) точка M лежит на катете BC . Эта точка находится на равном расстоянии от AB и AC , $MC = 2,7$, $AM = 4,1$. Найдите углы треугольника ABC .

4.

1. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) $AD = 2a$, $BC = a$, $BD \perp AB$, $\angle CBD = \alpha$. Найдите площадь трапеции. Вычислите площадь, если $a = 7,6$, $\alpha = 54^\circ 21'$.
2. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) CD — медиана. Найдите угол DCB , если $CD = 5,3$, $BC = 4,7$.

5.

1. Площадь прямоугольного треугольника равна S , а один из острых углов α . Найдите высоту, опущенную на гипотенузу. Вычислите длину высоты, если $S = 42,3$ и $\alpha = 50^\circ 27'$.
2. В прямоугольной трапеции $ABCD$ ($\angle D = \angle C = 90^\circ$) $\angle BAD = 40^\circ 27'$, $AB = 12,7$, $AC = 18,1$. Найдите угол CAD .

6.

1. В равнобедренной трапеции $ABCD$ $AB = CD$. Площадь трапеции равна S , $\angle BDA = \alpha$. Найдите высоту трапеции. Вычислите высоту, если $S = 234,6$ и $\alpha = 23^\circ 46'$.
2. В треугольнике ABC $BC = 2,7$, $AB = 4,2$, $\angle ACB = 132^\circ 40'$. Найдите угол BAC .

7.

1. В трапеции $ABCD$ (AC и BD — основания) $\angle CAD = \beta$, $\angle CBD = \alpha$, $BD = d$. Найдите AC . Вычислите AC , если $d = 15,9$, $\alpha = 27^\circ 30'$, $\beta = 40^\circ 15'$.
2. В равнобедренном треугольнике медиана составляет с основанием угол α . Найдите угол при вершине треугольника, если $\alpha = 37^\circ 23'$.

8.

1. В трапеции $ABCD$ $\angle A + \angle D = 90^\circ$, $AD = 2BC$, $E \in AD$, причем $\frac{AE}{ED} = \frac{1}{3}$, $BE = a$, $\angle A = \alpha$. Найдите площадь трапеции. Вычислите площадь, если $a = 17,3$, $\alpha = 40^\circ 23'$.
2. В равнобедренном треугольнике угол при вершине таков, что его косинус равен m . Найдите тангенс угла между высотой, опущенной на боковую сторону, и основанием.

§ 24*. Подобие треугольников

1.

1. В прямоугольном треугольнике ACE ($\angle C = 90^\circ$) $AC = 4$, $BC = 6$, $E \in AB$ ($A - E - B$), $EF \perp BC$, $ED \perp AC$; $EF : ED = 1 : 2$. Найдите площадь прямоугольника $DEFC$.
2. В ромбе $ABCD$ $\angle A = 60^\circ$, а высота равна $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. На продолжении стороны AB за точку B взята точка M , $BM = 4$. Отрезок MD пересекает BC в точке K . В каком отношении точка K делит отрезок BC ?

2.

1. В прямоугольном треугольнике ACB ($\angle C = 90^\circ$) $D \in AB$ ($A - D - B$), $DE \perp BC$, $DE = 3$, $DC = 5$, $AC = 2BC$. Найдите площадь треугольника ABC .
2. Диагональ AC прямоугольника $ABCD$ равна $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ и составляет со стороной AD угол 30° . Сторона AD продолжена за точку D на отрезок DE , равный 3. Отрезок BE пересекает сторону CD в точке K . В каком отношении отрезок BE делит сторону CD ?

3.

1. В равнобедренный треугольник вписан прямоугольник, стороны которого относятся как 1 : 3. Меньшая сторона прямоугольника лежит на основании треугольника, а две его вершины лежат на боковых сторонах треугольника. Стороны треугольника равны 10, 10, 12. Найдите площадь прямоугольника.
2. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) $\cos \angle B = \frac{3}{5}$. Найдите соотношение отрезков, на которые биссектриса угла A делит катет BC .

4.

1. В равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписан равнобедренный прямоугольный треугольник так, что вершина прямого угла лежит на основании данного треугольника, а гипотенуза параллельна основанию (вершины острых углов лежат на боковых сторонах треугольника). Найдите площадь прямоугольного треугольника, если высота $BF = 16$ см, а $AB = 20$ см.
2. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) BD — биссектриса. Площади треугольников ABD и BCD относятся как 17 : 8. Найдите синус угла ABC .

5.

1. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 4, а угол 30° . В этот треугольник вписан прямоугольник, у которого одна сторона в два раза больше другой. Найдите площадь прямоугольника, если его большая сторона лежит на гипотенузе, а две вершины — на катетах.
2. В треугольнике ABC угол ACB тупой, $BO \perp AC$, $OF \perp AB$, $OD \perp BC$. Докажите, что $\angle ACB = \angle DFB$.

6.

1. В ромб вписан прямоугольник так, что все его вершины лежат на сторонах ромба, причем большая сторона прямоугольника параллельна большей диагонали ромба. Найдите площадь прямоугольника, если его стороны относятся как $1 : 2$, сторона ромба равна a , острый угол 60° .
2. В остроугольном треугольнике ABC $BD \perp AC$, $DE \perp AB$ и $DF \perp BC$. Докажите, что $\triangle EBF \sim \triangle ABC$.

7.

1. Основание треугольника равно b . В этот треугольник вписана трапеция, у которой три стороны равны a , а острый угол 60° . Меньшее основание трапеции лежит на основании треугольника, а большее основание трапеции параллельно основанию, и его концы лежат на двух других сторонах треугольника. Найдите площадь треугольника.
2. В $\triangle ABC$ BD — медиана, M — произвольная точка, лежащая на медиане. Прямые AM и CM пересекают стороны треугольника соответственно в точках E и F . Докажите, что $EF \parallel AC$.

8.

1. В треугольник ABC вписана прямоугольная трапеция $FDEM$ ($\angle DFM = 90^\circ$), у которой большее основание DE параллельно AC , $D \in AB$, $E \in BC$, а меньшее основание FM лежит на AC . Меньшее основание a , высота трапеции $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, а большая диагональ делит острый угол пополам. Найдите площадь треугольника, если высота треугольника, опущенная из вершины B , равна h .
2. В остроугольном треугольнике основание делится высотой на части, равные a и b . Найдите эту высоту, если ее часть от основания до точки пересечения высот равна m .

§ 25. Взаимное расположение прямой и окружности

1.

1. В прямоугольном треугольнике ACB ($\angle C = 90^\circ$), $AB = 10$, $\angle ABC = 30^\circ$. С центром в точке A проведена окружность. Каким должен быть радиус этой окружности, чтобы:
 - а) окружность касалась прямой BC ;
 - б) не имела с ней общих точек;
 - в) имела с ней две общие точки?
2. На касательной к окружности от точки касания по обе стороны от нее отмечены две точки M и T , удаленные от центра окружности на расстояние, равное 20 см; $TM = 32$ см. Найдите радиус окружности.

2.

1. $ABCD$ — квадрат, $AC = 10\sqrt{2}$, O — середина AD . С центром в точке O проведена окружность. Каким должен быть радиус этой окружности, чтобы:
 - а) окружность касалась прямых AB и CD ;
 - б) не имела с ними общих точек;
 - в) имела бы две общие точки с каждой прямой?
2. На касательной к окружности от точки касания C отложены по обе стороны от нее два отрезка CA и CB , причем $\angle AOC = \angle BOC$ (O — центр окружности). Радиус окружности равен 8, $AB = 30$. Найдите расстояние от центра окружности до точек A и B .

3.

1. AB и CD — два взаимно перпендикулярных диаметра окружности. Хорда CB проложена за точку B на отрезок BE , равный CB . Каково взаимное положение прямой DE и окружности?
2. Диаметр AB окружности продолжен за точку B на отрезок BC , CD — касательная к окружности (D — точка касания). Через точку B проведена хорда, параллельная CD . Радиус окружности равен 10 см, а расстояние от центра окружности до хорды равно 4 см. Найдите AC .

4.

1. Катеты прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90^\circ$) $AC = 3$, $BC = 4$. С центром в точке C проведена окружность радиуса, равного $2,4$. Каково взаимное положение этой окружности и прямой AB ?
2. На касательной к окружности от точки касания P по обе стороны от нее отложены два отрезка PA и PB . Точки A и B соединены отрезками с центром окружности O . AO пересекает окружность в точке C , а BO — в точке D . Найдите CD , если радиус окружности равен 7 , а $OA = OB = 25$.

5.

1. В трапеции $ABCD$ $AB = BC = CD$, $AD = 2BC$. С центром в точке A проведена окружность радиусом, равным AB . Каково взаимное положение этой окружности и прямой BD ?
2. Из точки проведены две касательные к окружности, которые образуют между собой угол α . Радиус окружности равен r . Найдите расстояние между точками касания.

6.

1. В прямоугольной трапеции $ABCD$ ($\angle CDA = 90^\circ$) $BC = CD$, $AD = 2BC$. С центром в точке D проведена окружность радиусом, равным BD . Каково взаимное положение этой окружности и прямой AB ?
2. Из некоторой точки проведены две касательные к окружности, которые образуют между собой угол α . Расстояние от центра окружности до хорды, которая соединяет точки касания, равно m . Найдите длины отрезков касательных от данной точки до точки касания.

7.

1. Две окружности разных радиусов внешне касаются. Докажите, что отрезок их общей касательной, заключенный между точками касания, есть среднее пропорциональное между диаметрами этих окружностей.
2. Через концы диаметра AB окружности проведены две касательные к ней. Третья касательная пересекает первые две в точках C и D . Докажите, что квадрат радиуса этой окружности равен произведению отрезков CA и DB .

8.

1. Две окружности разных диаметров внешне касаются. К ним проведены две общие касательные AC и BD , где A и B — точки касания с первой окружностью, а C и D — со второй. Докажите, что $ACDB$ — равнобедренная трапеция.
2. AB — диаметр окружности с центром в точке O . Окружность радиуса r и с центром в точке O_1 внутренне касается первой окружности в точке B . Через конец A диаметра большей окружности проведены две хорды, которые касаются меньшей окружности. Угол между хордами равен 60° . Найдите длины этих хорд.

§ 26. Теорема о вписанном угле

1.

1. Дуга AB окружности с центром в точке O равна 60° . Найдите расстояние от точки A до радиуса OB , если радиус окружности равен 6 см.
2. AB и AC — хорды окружности. $\angle BAC = 70^\circ$, $\cup AB = 120^\circ$. Найдите градусную меру дуги AC .

2.

1. В окружности с центром в точке O проведены два радиуса OA и OB так, что расстояние от точки A до радиуса OB в два раза меньше длины радиуса. Найдите градусную меру дуги AB .
2. В окружности проведены диаметр AB и хорда AC . Найдите угол BAC , если градусные меры дуг AC и CB относятся как 7 : 2.

3.

1. MA и MB — хорды окружности с центром в точке O , $\angle AMB = 30^\circ$. Найдите длину хорды AB , если радиус окружности равен 10 см.
2. На катете AC прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90^\circ$) как на диаметре построена окружность, пересекающая гипотенузу AB в точке D ; $BD = 4$ см, $AD = 9$ см. Найдите CD .

4.

1. KB и KB — хорды окружности с центром в точке O , $\angle AKB = 45^\circ$, $AB = 3\sqrt{2}$. Найдите длину радиуса этой окружности.
2. В равнобедренном треугольнике ABC $AC = CB$. На стороне AC как на диаметре построена окружность, пересекающая сторону AB в точке D ; $CD = 18$, $AD = 16$. Найдите площадь треугольника.

5.

1. На диаметре окружности AB отмечена произвольная точка C . На отрезке CB как на диаметре построена окружность, BE и BF — хорды большей окружности, которые пересекают меньшую окружность соответственно в точках P и K . Докажите, что $\frac{EP}{PB} = \frac{FK}{KB}$.
2. В точке A к окружности проведена касательная AB , AC — хорда этой окружности, $\angle BAC$ острый, $\cup AM = \cup MC$ (точка M лежит на дуге AC и расположена во внутренней области угла BAC). Расстояние от точки M до AC равно 5 см. Найдите расстояние от точки M до AB .

6.

1. На диаметре AB окружности отмечена точка M . С центром в этой точке проведены две окружности, которые расположены внутри данной; BK и BK_1 — хорды большей окружности, которые касаются двух меньших окружностей в точках P и P_1 соответственно.

Докажите, что $\frac{KP}{PB} = \frac{K_1P_1}{P_1B_1}$.

2. В равнобедренном треугольнике угол при вершине равен 40° . На боковой стороне как на хорде построена окружность, которая касается основания в его конце. Две вершины и точка пересечения окружности с другой стороной делят окружность на три части. Найдите их.

7.

1. Через точку пересечения окружности с биссектрисой вписанного угла проведена хорда, параллельная одной стороне угла. Докажите, что эта хорда равна другой стороне вписанного угла.
2. Через точку K окружности с центром O проведены хорда KA и касательная BC ($B - K - C$). Прямая, проведенная через центр O перпендикулярно к радиусу OA , пересекает AK в точке M и BC — в точке N . Докажите, что $NK = NM$.

8.

1. Окружность проходит через вершины B , C , D трапеции $ABCD$ (AD и BC — основания) и касается стороны AB в точке E . Докажите, что $BD = \sqrt{BC \cdot AD}$.
2. Вершины четырехугольника $ABCD$ принадлежат окружности с центром в точке O , $\cup AB + \cup CD = 180^\circ$. Диагонали AC и BD пересекаются в точке E . Вершины ΔAED принадлежат окружности с центром в точке O_1 , $O_1E = 8$ см. Найдите AD .

§ 27. Теорема о произведении отрезков хорд

1.

1. Через точку M , расположенную внутри круга, проведены две хорды AB и CD , причем $AM = MB$, $CM = 16$ см, $DM : MC = 1 : 4$. Найдите AB .
2. AB — диаметр окружности. Точка C лежит на окружности. $CD \perp AB$, $AD = 3$, $DB = 5$. Найдите CD .

2.

1. Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке E . $AE : EB = 1 : 3$, $CD = 20$, $DE = 5$. Найдите AB .
2. AB — диаметр окружности. Точка E лежит на окружности, $EF \perp AB$, $FB = 4$, $EF = 6$. Найдите радиус окружности.

3.

1. Диаметр CD окружности перпендикулярен хорде AB , AB и CD пересекаются в точке E , $CE = 2$ см. Сумма AB и CE равна диаметру окружности. Найдите радиус окружности.
2. С помощью циркуля и линейки постройте отрезок средний пропорциональный между отрезками, длины которых равны 1 см и 2 см.

4.

1. Диаметр CD окружности с центром в точке O пересекается с хордой AB в точке K , $OK = 5$ см. Расстояние от центра окружности до хорды равно 4 см. Найдите радиус окружности, если длина хорды равна 16 см.
2. С помощью циркуля и линейки постройте отрезок, длина которого равна $\sqrt{2 \cdot 3}$ см.

5.

1. AB — диаметр окружности с центром в точке O . На отрезке OB как на диаметре построена окружность с центром в точке O_1 . Хорда большей окружности BC пересекает меньшую окружность в точке E . Через точки O_1 и E проведена прямая, которая пересекает большую окружность в точках K и F ($K - E - F$), $KE = 2$ см, $EF = 8$ см. Найдите BC .
2. Две окружности пересекаются в точках A и B . На продолжении их общей хорды AB выбрана точка M . Из этой точки проведены касательные ME и MF к этим окружностям (E и F — точки касания). Докажите, что $ME = MF$.

6.

1. Вершины треугольника ABC лежат на окружности, $AB : BC = 2 : 3$. Точка D делит дугу AC пополам. BD пересекает AC в точке E . Через точку E проведена хорда KM , $KE = 4$ см, $ME = 6$ см. Найдите AC .
2. Две окружности внешне касаются в точке F . Через эту точку проведена общая касательная к этим окружностям. На этой касательной выбрана точка M . Из этой точки к этим окружностям проведены секущие, которые пересекают первую окружность в точках A и B ($M - A - B$), а вторую — в точках C и D ($M - C - D$), $MA = MC$. Докажите, что $AB = CD$.

7.

1. QP — диаметр окружности с центром в точке O . На диаметре QP между точками O и P выбрана точка O_1 и с центром в этой точке радиусом O_1P проведена окружность. Прямая, проходящая через центр O_1 меньшей окружности, пересекает большую окружность в точках A и D , а меньшую — в точках B и C . Найдите $\frac{r}{R}$, если $AB : BC : CD = 2 : 4 : 3$.
2. Две окружности касаются внешне в точке K . Через эту точку проведена прямая, которая, пересекаясь с окружностями, образует хорды KP и KQ . Из точек P и Q проведены к окружностям касательные PT_1 и QT_2 , где T_1 и T_2 — точки касания. Докажите, что $PT_1^2 + QT_2^2 = PQ^2$.

8.

1. На диаметре CD окружности выбрана точка E . Через эту точку проведена хорда AB , $AE = 4$, $BE = 3$, $AD = 6,5$, $\angle ABC = 60^\circ$. Найдите CE и ED .
2. В треугольнике ABC угол B тупой. Постройте на основании AC точку D такую, что $AB^2 = AD \cdot AC$.

§ 28*. Окружность

1.

1. Две окружности имеют общий центр. Радиус большей окружности равен R , а меньший — r . Найдите длину хорды большей окружности, которая касается меньшей.
2. Две окружности имеют равные радиусы и пересекаются в точках A и B . Через точку A проведена прямая, которая пересекает одну окружность в точке C , а другую — в точке D . Докажите, что $BC = BD$.

2.

1. AB — диаметр окружности с центром в точке O . На отрезке OB как на диаметре построена окружность радиуса r . Из точки A проведена касательная AK к меньшей окружности (K — точка касания). Найдите AK .
2. На окружности отмечены четыре точки A, B, C, D . $\cup BC = \cup AD$. Докажите, что $AB \parallel CD$.

3.

1. Две окружности, радиусы которых равны 8 см и 2 см, касаются внешним образом. Найдите длину их общей касательной.
2. Точка D лежит на радиусе OA окружности с центром в точке O . Хорда BC , проходящая через точку D , перпендикулярна AO . В точке C к окружности проведена касательная до пересечения с продолжением OA в точке E . Докажите, что CA — биссектриса угла BCE .

4.

1. Две окружности, радиусы которых 4 и 6, касаются внешним образом. Их общие внешние касательные пересекаются в точке M . Найдите расстояние от точки M до центра меньшей из окружностей.
2. В окружности проведены хорды AB и AC , DE и DF , причем $AB \parallel DE$ и $AC \parallel DF$. Докажите, что $FB \parallel CE$.

5.

1. Две окружности, радиусы которых равны 1 и 3, внешне касаются в точке C ; AB — их общая внешняя касательная (A и B — точки касания). Найдите площадь треугольника ACB .
2. Вершины A , B , C остроугольного треугольника ABC лежат на окружности с центром в точке O ; $AN \perp BC$. Докажите, что $\angle OAC = \angle BAN$.

6.

1. Окружности с радиусами, равными 4 см и 1 см, внутренне касаются. Хорда AB большей окружности касается меньшей окружности, и прямая AB образует с общей касательной в окружности угол 60° . Найдите AB .
2. Две окружности пересекаются в точках A и B . Через точку A проведены отрезки AC и AD , каждый из которых является хордой одной из окружностей и касается другой. Докажите, что $AC \cdot BA = AD \cdot BC$.

7.

1. Даны два круга одного и того же радиуса r . Расстояние между их центрами равно d . Вычислите площадь четырехугольника, образованного касательными, проведенными к каждому кругу из центра другого.
2. Вершины четырехугольника $ABCD$ лежат на окружности, причем AC — биссектриса угла DAB . Докажите, что $AC \cdot BD = AD \cdot DC + AB \cdot BC$.

8.

1. Вершины квадрата $ABCD$ лежат на окружности с центром в точке O . Квадрат $EMPF$ расположен так, что сторона EF лежит на стороне BC данного квадрата, а вершины M и P лежат на окружности. Найдите сторону квадрата $EMPF$, если сторона квадрата $ABCD$ равна a .
2. Две окружности касаются внутренним образом в точке M . Пусть AB — хорда большей окружности, которая касается меньшей в точке T . Докажите, что MT — биссектриса угла AMB .

§ 29. Четыре замечательные точки треугольника

1.

1. В остроугольном треугольнике ABC $AD \perp BC$, $CF \perp AB$, AD пересекает CF в точке M . Докажите, что $\angle ABM = \angle MCA$.
2. В прямоугольном треугольнике ACB ($\angle C = 90^\circ$) AE — биссектриса, $CE = 5$, $AB = 14$. Найдите площадь треугольника ABE .

2.

1. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) p — срединный перпендикуляр к AB , p пересекает AC в точке K , $AK = 5$, $BC = 4$. Найдите периметр треугольника BKC .
2. В равнобедренном треугольнике ABC $AB = BC$, медианы AE и CF пересекаются в точке K , $BK = 6$, $AC = 10$. Найдите площадь треугольника ABC .

3.

1. В треугольнике ABC биссектрисы AD и CE пересекаются в точке M , $BM = m$, $\angle ABC = \alpha$. Найдите расстояние от точки M до стороны AC .
2. Высоты AD и CE остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке O , $OA = 4$, $OD = 3$, $BD = 4$. Найдите расстояние от точки O до стороны AC .

4.

1. В остроугольном треугольнике ABC h и p — срединные перпендикуляры к сторонам BC и AC . Они пересекаются в точке F , $CF = 10$, $AB = 16$. Найдите расстояние от точки F до стороны AB .
2. Вершины треугольника ABC лежат на окружности. $\angle A = 2 \angle B$. Биссектрисы AF и CE пересекаются в точке O , AO пересекает окружность в точке K . Докажите, что $KC \parallel AB$.

5.

1. В треугольнике ABC $\angle ACB = 120^\circ$, $AC = CB = a$. Серединные перпендикуляры к сторонам AC и CB пересекаются в точке M . Найдите расстояние от точки M до середины стороны AB .
2. Из точки M к окружности с центром в точке O проведены касательные MA и MB (A и B — точки касания), $BF \perp AM$. BF пересекает MO в точке K , $MO = 2OB$. Найдите угол KAB .

6.

1. В треугольнике ABC $\angle ABC$ тупой. Продолжения высот AD и CE пересекаются в точке M , $MB = 5$, $AC = 10$. Найдите площадь четырехугольника $AMCB$.
2. Во внутренней области треугольника ABC взята точка O , равноудаленная от его сторон. Найдите $\angle AOC$, если $\angle ABC = 2\alpha$.

7.

1. Постройте равнобедренный прямоугольный треугольник, в котором расстояние между точками пересечения медиан и биссектрис равно данному отрезку m .
2. Основание AC равнобедренного треугольника ABC равно 6, а боковая сторона равна 5. Найдите расстояние между точками пересечения медиан и высот этого треугольника.

8.

1. Постройте равнобедренный прямоугольный треугольник, в котором расстояние между точками пересечения высот и биссектрис равно данному отрезку p .
2. Основание AC равнобедренного треугольника равно 6, а боковая сторона равна 5. Найдите расстояние между точками пересечения медиан и биссектрис этого треугольника.

§ 30. Вписанная окружность

1.

1. Найдите радиус окружности, вписанной в равносторонний треугольник, если сторона треугольника равна $2\sqrt{3}$ см.
2. Вокруг окружности описана равнобедренная трапеция, периметр которой равен 10 см. Найдите длину боковой стороны.

2.

1. Радиус окружности, вписанной в равносторонний треугольник, равен $\sqrt{3}$ см. Найдите сторону треугольника.
2. Вокруг окружности описана равнобедренная трапеция, угол при основании которой равен 30° . Высота трапеции равна 4 см. Найдите сумму длин оснований трапеции.

3.

1. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник со сторонами 10 см, 10 см, 12 см.
2. Периметр ромба равен 80 см, а одна из диагоналей 32 см. Найдите радиус вписанной в ромб окружности.

4.

1. В прямоугольный треугольник вписана окружность. Точка ее касания с гипотенузой делит ее на части, равные 6 см и 4 см. Найдите радиус окружности.
2. Найдите радиус окружности, вписанной в равнобедренную трапецию, если ее основания равны 8 см и 2 см.

5.

1. В прямоугольный треугольник с углом 60° вписана окружность, радиус которой равен $2\sqrt{3}$ см. Найдите площадь этого треугольника.
2. Расстояния от центра вписанной в прямоугольную трапецию окружности до концов большей боковой стороны равны 6 см и 8 см. Найдите площадь трапеции.

6.

1. В равнобедренном треугольнике расстояние от центра вписанной окружности до вершины не равного угла равно 5 см. Боковая сторона равна 10 см. Найдите длину этого радиуса.
2. Около круга, радиус которого равен 2, описана прямоугольная трапеция. Меньшее основание трапеции равно 3. Найдите площадь трапеции.

7.

1. В треугольник со сторонами 20, 20, 24 вписана окружность. Другая окружность касается основания, боковой стороны и данной окружности. Найдите радиус этой окружности.
2. В трапеции $ABCD$ биссектриса угла A пересекает основание BC (или его продолжение) в точке E . В треугольник ABE вписана окружность, касающаяся стороны AB в точке M и стороны BE в точке P . Найдите угол BAD , если известно, что $BM = MP$.

8.

1. В равнобедренную трапецию, основания которой равны 2 см и 8 см, вписана окружность. Другая окружность касается большего основания, боковой стороны и данной окружности. Найдите радиус этой окружности.
2. В ромб $ABCD$ со стороной, равной 4 см, и углом BAD , равным 60° , вписана окружность. К ней проведена касательная, пересекающая AB в точке M и AD — в точке P . Найдите MB и PD , если $MP = 2$ см.

§ 31. Описанная окружность

1.

1. Вокруг равностороннего треугольника описана окружность, радиус которой равен $3\sqrt{3}$. Найдите периметр треугольника.
2. В окружность, радиус которой равен 10, вписан прямоугольный треугольник, один из катетов которого равен 16. Найдите площадь этого треугольника.

2.

1. Треугольник ABC вписан в окружность. Найдите радиус этой окружности, если $AB = 24$ см, а центр окружности удален от этой стороны на 5 см.
2. Найдите периметр прямоугольного треугольника, вписанного в окружность радиуса 7,5 см, если один из катетов равен 9 см.

3.

1. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами 10 см, 10 см, 12 см.
2. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность так, что сторона AD является диаметром этой окружности, $\angle ABC = 130^\circ$, $\angle BCD = 140^\circ$. Найдите углы BAD , CDA , ACB .

4.

1. Основание тупоугольного равнобедренного треугольника равно 24 см, а радиус описанной около него окружности 13 см. Найдите боковую сторону треугольника.
2. Сторона равностороннего треугольника ABC равна $\sqrt{3}$ см. Высоты треугольника AD и BE пересекаются в точке M . Докажите, что вокруг четырехугольника $MDCE$ можно описать окружность, и найдите ее радиус.

5.

1. Около равнобедренного треугольника ABC с основанием AB и углом 120° при вершине описана окружность. Докажите, что отрезок, соединяющий центр описанной окружности с точкой пересечения продолжения высот треугольника, равен диаметру описанной окружности.
2. Трапеция вписана в окружность. Ее основания равны 6 дм и 8 дм, а высота 1 дм. Найдите радиус этой окружности, если известно, что основания трапеции находятся по одну сторону от центра.

6.

1. Угол при вершине B равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) равен 72° . Через вершину A и центр описанной окружности проведена прямая до пересечения в точке K со стороной BC , $BK = a$. Найдите радиус описанной окружности.
2. Трапеция $ABCD$ (AD и BC — основания) вписана в окружность, радиус которой равен 4 см; AC — биссектриса угла A , $\angle BCA = 30^\circ$. Найдите площадь трапеции.

7.

1. Докажите, что точки, симметричные точке пересечения высот треугольника ABC относительно его сторон, лежат на окружности, описанной около этого треугольника.
2. Вокруг треугольника ABC описана окружность, радиус которой равен R ; $AC = a$, $BC = b$. Точка D лежит на стороне AC , $\angle ABC = \angle BDC$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BDC .

8.

1. Пусть AA_1 , BB_1 , CC_1 — высоты треугольника ABC . Докажите, что биссектрисы треугольника $A_1B_1C_1$ лежат на этих высотах.
2. В окружность вписан треугольник ABC , $AC = b$, $AB = c$. К окружности в точке A проведена касательная. Прямая CB пересекает эту касательную в точке M ($C - B - M$). Радиус окружности, описанной около треугольника AMC , равен R . Найдите радиус окружности, описанной около треугольника AMB .

§ 32. Понятие вектора

1.

$ABCD$ — параллелограмм. Укажите пары векторов, изображенных на рисунке 17, которые: а) коллинеарны; б) сонаправлены; в) противоположно направлены; г) равны. Можно ли на прямой AC от точки A отложить вектор, равный вектору $\vec{a}$?

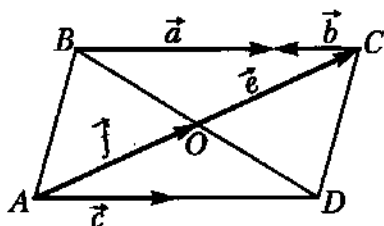


Рис. 17

2.

$ABCD$ — параллелограмм. Укажите пары векторов, изображенных на рисунке 18, которые:

- а) коллинеарны;
- б) сонаправлены;
- в) противоположно направлены;
- г) имеют равные длины.

Можно ли на прямой AB от точки B отложить вектор, равный вектору $\vec{e}$?

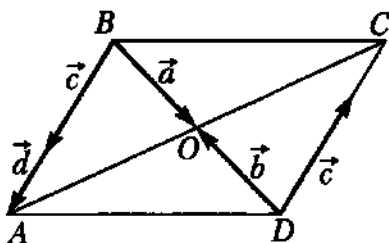


Рис. 18

3.

1. ABC — прямоугольный треугольник ($\angle C = 90^\circ$), $\angle A = 45^\circ$. Какие из следующих записей имеют смысл:

- а) $\overrightarrow{AB} > \overrightarrow{BC}$;
- б) $|\overrightarrow{AB}| > |\overrightarrow{BC}|$;
- в) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$;
- г) $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}|$;

2. Какие из векторов, изображенных на рисунке 19:

- а) коллинеарны;
- б) сонаправлены;
- в) противоположно направлены;
- г) имеют равные длины? Отложите эти векторы от одной точки.

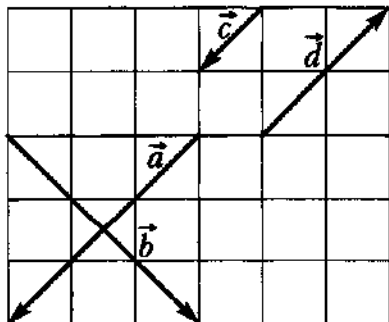


Рис. 19

4.

1. $ABCD$ — прямоугольник. Какие из следующих записей имеют смысл:
 а) $\overrightarrow{AD} < \overrightarrow{AC}$; в) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$;
 б) $|\overrightarrow{AD}| < |\overrightarrow{AC}|$; г) $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$?
2. Какие из векторов, изображенных на рисунке 20:
 а) коллинеарны;
 б) сонаправлены;
 в) противоположно направлены;
 г) имеют равные длины?
 Отложите эти векторы от одной точки.

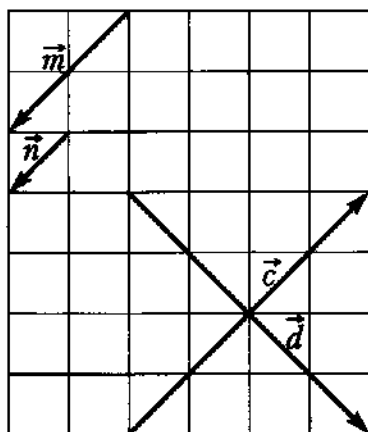


Рис. 20

5.

1. В четырехугольнике $ABCD$ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Через точку O пересечения его диагоналей проведена прямая, пересекающая стороны BC и AD соответственно в точках E и F . Какие из векторов $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{DF}$:
 а) коллинеарны;
 б) сонаправлены;
 в) противоположно направлены;
 г) равны;
 д) имеют равные длины?
2. В круге проведены диаметр AC и хорда AB . Внутри круга выбрана точка M . От этой точки отложены векторы $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{MF}$, соответственно равные векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Чему равен угол MNF ?

6.

1. В четырехугольнике $ABCD$ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, точка E — середина BC . Прямая AE пересекает продолжение DC в точке F . Среди векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CF}$ укажите пары:
 а) коллинеарных векторов;
 б) сонаправленных векторов;
 в) противоположно направленных векторов;
 г) равных векторов;
 д) векторов, имеющих равные длины.
2. В ромбе $ABCD$ $|\overrightarrow{AC}| = 12$ см, $|\overrightarrow{BD}| = 16$ см. От вершины A отложен вектор $\overrightarrow{AE}$, равный вектору $\overrightarrow{BD}$. Найдите длину вектора $\overrightarrow{EC}$.

7.

1. На рисунке 21 $ABCD$ и $EFCD$ — параллелограммы. Сколько существует различных векторов с началом и с концом в вершинах данных параллелограммов?
2. Точка M лежит внутри треугольника ABC . От этой точки отложены векторы $\overrightarrow{MF}$, $\overrightarrow{ME}$, $\overrightarrow{MD}$, соответственно равные векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$. Докажите, что $MFED$ — параллелограмм.

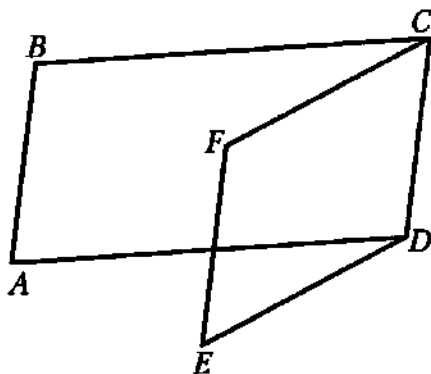


Рис. 21

8.

1. На рисунке 22 $ABCD$ и $FADE$ — параллелограммы. Сколько существует различных векторов с началом и с концом в вершинах данных параллелограммов?
2. ABC — правильный треугольник. Точка M лежит вне треугольника. От точки M отложены векторы $\overrightarrow{MK}$, $\overrightarrow{ML}$, $\overrightarrow{MP}$, соответственно равные векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$. Докажите, что $ML \perp KP$.

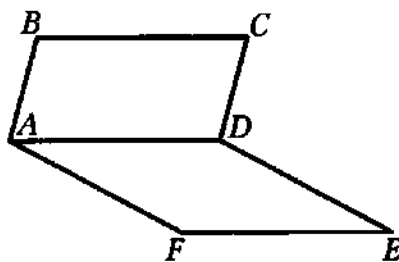


Рис. 22

§ 33. Сложение векторов

1.

1. На рисунке 23 изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$. Постройте вектор $\vec{a} + \vec{c}$ двумя способами.

2. M, H, P, O, S — произвольные точки.

Найдите сумму

$$\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{SM} + \overrightarrow{HP} + \overrightarrow{OS}.$$

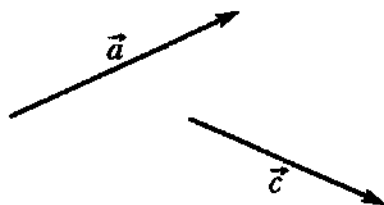


Рис. 23

2.

1. На рисунке 24 изображены два вектора $\vec{m}$ и $\vec{n}$. Постройте вектор $\vec{m} + \vec{n}$ двумя способами.

2. Даны произвольные точки A, B, C, D, E . Докажите, что $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{BD}$.

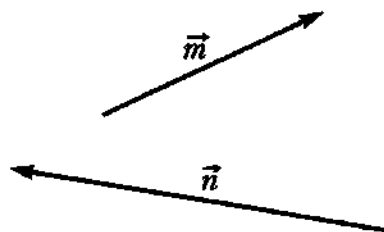


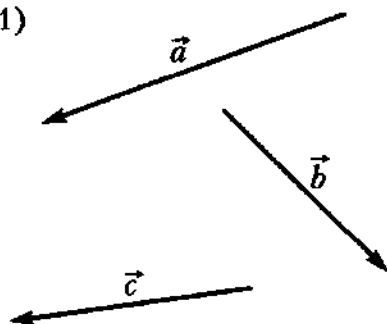
Рис. 24

3.

1. На рисунке 25 изображены векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{m}, \vec{n}$.

1) Постройте сумму $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.2) Постройте сумму $\vec{m} + \vec{n}$.

1)



2)

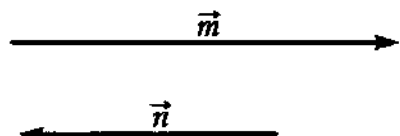


Рис. 25

2. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке M . Докажите, что $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DA}$.

4.

1. На рисунке 26 изображены векторы $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{p}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$.

1) Постройте сумму $\vec{m} + \vec{n} + \vec{p}$.

2) Постройте сумму $\vec{a} + \vec{b}$.

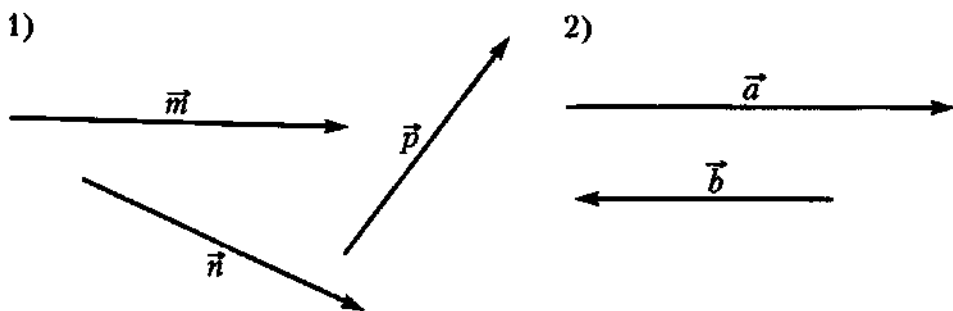


Рис. 26

2. $ABCD$ — прямоугольник. Диагонали его пересекаются в точке O . Докажите, что $|\vec{AO} + \vec{DC} + \vec{OD}| = |\vec{DA} + \vec{DC}|$.

5.

1. Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\vec{a}$ и $\vec{c}$ равен 120° , $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}|$. Докажите, что $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$.

2. На рисунке 27 $ABCD$ и $CFED$ — параллелограммы. Укажите такой вектор $\vec{x}$, что $\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{DE} + \vec{CD} + \vec{x} = \vec{AD}$.

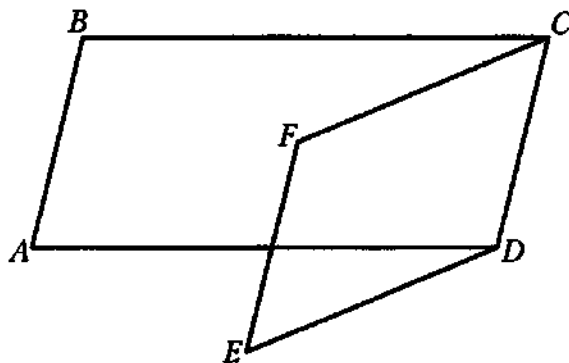


Рис. 27

6.

1. Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 90° , а углы между векторами $\vec{a}$ и $\vec{c}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ равны 135° , $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $|\vec{c}| = \sqrt{2}$.

Докажите, что $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$.

2. На рисунке 28 $ABCD$ и $ADEF$ — параллелограммы. Укажите такой вектор $\vec{y}$, что $\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{CD} + \vec{AF} + \vec{y} = \vec{AF}$.

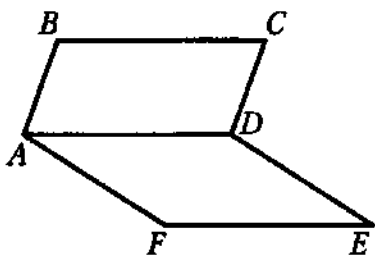


Рис. 28

7.

1. Даны два параллелограмма $ABCD$ и A_1BC_1D . Докажите, что $\vec{AA_1} = \vec{C_1C}$.
2. В треугольнике ABC M — точка пересечения медиан. Докажите, что $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$.

8.

1. Даны два треугольника ABC и AB_1C_1 , имеющие общую медиану AA_1 . Докажите, что $\vec{CB_1} = \vec{C_1B}$.
2. $ABCD$ — параллелограмм. O — точка пересечения его диагоналей. Докажите, что $\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} + \vec{PD} = 4\vec{PO}$, где P — любая точка плоскости.

§ 34. Вычитание векторов

1.

1. На рисунке 29 изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Постройте вектор $\vec{a} - \vec{b}$.
2. Дан треугольник ABC . Выразите вектор $\vec{CB}$ через векторы $\vec{AC}$ и $\vec{AB}$.
3. В равнобедренном треугольнике ABC точка M — середина основания AC . Найдите $|\vec{MB} - \vec{MC} + \vec{BA}|$, если $AB = 5$ см, $BM = 4$ см.

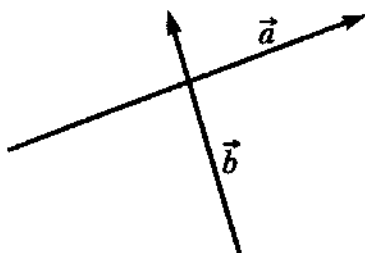


Рис. 29

2.

1. На рисунке 30 изображены векторы $\vec{d}$ и $\vec{c}$. Постройте вектор $\vec{d} - \vec{c}$.
2. Дан треугольник ABC . Выразите вектор $\vec{BA}$ через векторы $\vec{CB}$ и $\vec{CA}$.
3. CM — медиана равнобедренного прямоугольного треугольника ABC , проведенная из вершины C прямого угла. Найдите $|\vec{AB} - \vec{AC} + \vec{BM}|$, если $AB = 10$.

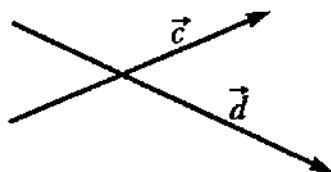


Рис. 30

3.

1. На рисунке 31 изображены векторы $\vec{p}$, $\vec{k}$, $\vec{m}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$.
 - 1) Постройте вектор $\vec{p} - \vec{k} + \vec{m}$.
 - 2) Постройте вектор $\vec{a} - \vec{b}$.

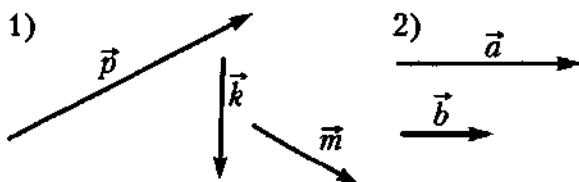


Рис. 31

2. В параллелограмме $ABCD$ $\vec{CA} = \vec{a}$, $\vec{CD} = \vec{c}$. Выразите векторы $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{DA}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$.
3. В прямоугольнике $ABCD$ $AD = 12$, $CD = 5$, O — точка пересечения диагоналей. Найдите $|\vec{AB} + \vec{AD} - \vec{DC} - \vec{OD}|$.

4.

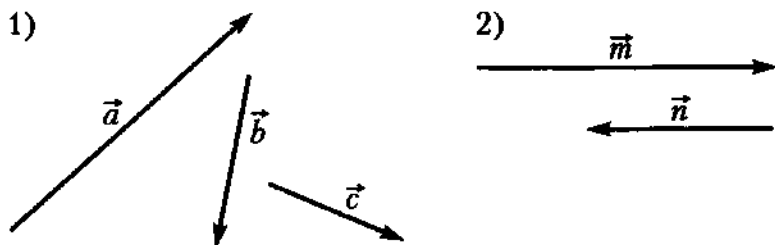
1. На рисунке 32 изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{m}$, $\vec{n}$.1) Постройте вектор $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$.2) Постройте вектор $\vec{n} - \vec{m}$.

Рис. 32

2. В параллелограмме $ABCD$ $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AC} = \vec{d}$. Выразите векторы $\vec{CB}$, $\vec{AD}$, $\vec{DC}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{d}$.3. В ромбе $ABCD$ $AD = 20$, $BD = 24$, O — точка пересечения диагоналей. Найдите $|\vec{AD} + \vec{AB} - \vec{BC} - \vec{OB}|$.

5.

1. Выразите вектор $\vec{AB}$ в виде алгебраической суммы следующих векторов: $\vec{AC}$, $\vec{DC}$, $\vec{BD}$.2. Даны параллелограмм $ABCD$ и произвольная точка O . Выразите вектор $\vec{OA}$ через векторы $\vec{OB}$, $\vec{OC}$, $\vec{OD}$.3. В трапеции $ABCD$ (AD и BC — основания) с прямым углом A проведена диагональ AC , $\angle BCA = 45^\circ$, $\angle ACD = 90^\circ$, $AC = a$. Найдите $|\vec{CB} - \vec{CA} + \vec{CD}|$.

6.

1. Выразите вектор $\vec{AB}$ в виде алгебраической суммы следующих векторов: $\vec{DA}$, $\vec{DC}$, $\vec{CB}$.2. В четырехугольнике $ABCD$ $\vec{OB} + \vec{OD} = \vec{OA} + \vec{OC}$, где O — произвольная точка плоскости. Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.3. В трапеции $PKHM$ (PM и KH — основания) с прямым углом P проведена диагональ HP , $\angle PHK = 30^\circ$, $\angle PHM = 90^\circ$. Найдите $|\vec{KP} + \vec{MK} - \vec{MH}|$, если $PM = a$.

7.

1. В треугольнике ABC O — точка пересечения его медиан. Постройте вектор $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$ и найдите его длину, если медиана CC_1 равна m .
2. В треугольнике ABC M и N соответственно середины сторон AB и AC , O — произвольная точка, M_1 — точка, симметричная точке M относительно центра O , а N_1 — точка, симметричная точке N относительно того же центра. Используя векторы, докажите, что $M_1N_1 \parallel BC$ и что $M_1N_1 = \frac{1}{2}BC$.

8.

1. O — точка пересечения медиан треугольника ABC . Постройте вектор $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$ и найдите его длину, если медиана AA_1 равна m .
2. Дан треугольник ABC . O — произвольная точка, A_1, B_1, C_1 — точки, симметричные соответственно точкам A, B, C относительно точки O . Используя векторы, докажите, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ и что стороны их соответственно параллельны.

§ 35. Умножение вектора на число

1.

1. Начертите два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Постройте вектор $2\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$.
2. В параллелограмме $ABCD$ O — точка пересечения диагоналей, K — середина стороны CD . Выразите векторы $\vec{OA}$ и $\vec{AK}$ через векторы $\vec{AB} = \vec{a}$ и $\vec{AD} = \vec{b}$.

2.

1. Начертите два неколлинеарных вектора $\vec{m}$ и $\vec{n}$. Постройте вектор $3\vec{m} - \frac{1}{2}\vec{n}$.
2. В параллелограмме $ABCD$ P — точка пересечения диагоналей, M — середина BC . Выразите векторы $\vec{DP}$ и $\vec{DM}$ через векторы $\vec{DA} = \vec{p}$ и $\vec{DC} = \vec{m}$.

3.

1. Дан треугольник ABC . Постройте вектор $-\frac{3}{2}(\vec{AB} + \vec{BC} - \frac{1}{2}\vec{AC})$.
2. На стороне BC параллелограмма $ABCD$ взята точка K так, что $BK : KC = 1 : 4$. Выразите векторы $\vec{AK}$ и $\vec{KD}$ через векторы $\vec{AB} = \vec{p}$ и $\vec{AD} = \vec{k}$.

4.

1. Дан треугольник ABC . Постройте вектор $-3(\vec{AC} - \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{CB})$.
2. На стороне HK ромба $MHKS$ взята точка E так, что $KE = \frac{1}{5}HE$, T — середина стороны MH . Выразите векторы $\vec{CE}$ и $\vec{ET}$ через векторы $\vec{CK} = \vec{p}$ и $\vec{CM} = \vec{a}$.

5.

1. Даны четыре точки O, A, M, B такие, что $\overrightarrow{OM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OB}$. Докажите, что точки A, M, B лежат на одной прямой.
2. Точка M лежит на диагонали AC параллелограмма $ABCD$, а точка H — на стороне AD , причем $AM : MC = 2 : 1$ и $AH = HD$. Выразите вектор $\overrightarrow{MH}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{p}$, где $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{p} = \overrightarrow{AD}$.

6.

1. Даны четыре точки E, K, F, O такие, что $\overrightarrow{OE} = \frac{9}{7}\overrightarrow{OK} - \frac{2}{7}\overrightarrow{OF}$. Докажите, что точки E, K, F лежат на одной прямой.
2. Точка T лежит на стороне BC параллелограмма $ABCD$, а точка E — на его диагонали BD , причем $BE : ED = 2 : 1$ и $BT = TC$. Выразите вектор $\overrightarrow{ET}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{p}$, где $\vec{a} = \overrightarrow{DA}$ и $\vec{p} = \overrightarrow{DC}$.

7.

1. На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC отмечены соответственно точки A_1, B_1, C_1 такие, что $\overrightarrow{AC_1} = k\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA_1} = k\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB_1} = k\overrightarrow{CA}$. Найдите сумму векторов $\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{CC_1}$.
2. В шестиугольнике $ABCDEF$ $AB \parallel DE \parallel CF$, $BC \parallel EF \parallel AD$, $CD \parallel FA$. Используя векторы, докажите, что $BE \parallel AF$.

8.

1. На сторонах AB, BC, CD, DE параллелограмма $ABCD$ даны точки P, E, F, M так, что $\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BE} = k\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CF} = k\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DM} = k\overrightarrow{DA}$. Докажите, что $PEFM$ — параллелограмм.
2. В окружности с центром O проведены две перпендикулярные хорды AB и CD . Хорды или их продолжения пересекаются в точке M . Докажите, что

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}).$$

§ 36. Применение векторов к решению задач

1.

1. В треугольнике ABC AA_1 — медиана, M — середина AA_1 . Выразите вектор $\overrightarrow{BM}$ через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{BA}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$.
2. В четырехугольнике $ABCD$ $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$. В каком отношении диагонали этого четырехугольника делятся точкой их пересечения?

2.

1. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O , K — середина BO . Выразите вектор $\overrightarrow{AK}$ через $\overrightarrow{AB} = \vec{m}$ и $\overrightarrow{AC} = \vec{p}$.
2. Даны четырехугольник $ABCD$ и произвольная точка O . Известно, что $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC}$, $\angle A = 15^\circ$. Найдите остальные углы этого четырехугольника.

3.

1. На сторонах AB и BC треугольника ABC отмечены соответственно точки M и N так, что $AB = 3BM$, $BC = 3BN$. Используя векторы, докажите, что $MN \parallel AC$ и $MN = \frac{1}{3}AC$.
2. E и F — середины сторон BC и AD четырехугольника $ABCD$. Выразите вектор $\overrightarrow{EF}$ через векторы $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{CD}$.

4.

1. Отрезки BA и CD пересекаются в точке O , причем $AO = 2OB$ и $OD = 2OC$. Используя векторы, докажите, что $BC \parallel AD$ и $BC = \frac{1}{2}AD$.
2. Дан треугольник ABC . Точки A_1, B_1, C_1 — середины соответственно сторон BC, AC, AB . Докажите, что $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1}$, где O — произвольная точка плоскости.

5.

1. $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ — параллелограммы, M, P, F, H — середины соответственно отрезков AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 . Докажите, что точки M, P, F, H являются вершинами параллелограмма или лежат на одной прямой.
2. Докажите, что в треугольнике ABC $OM \leq \frac{1}{3}(OA + OB + OC)$, где M — точка пересечения медиан, а O — произвольная точка плоскости.

6.

1. $ABCD$ — произвольный четырехугольник, E и F — середины соответственно сторон AB и CD . Докажите, что середины отрезков EC, BF, AF, ED служат вершинами параллелограмма или лежат на одной прямой.
2. Используя векторы, докажите, что диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

7.

1. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O . Точка K лежит на стороне BC , а точка E — на стороне AD , причем $BK : KC = DE : AE = 1 : 2$. Используя векторы, докажите, что точка O — середина KE .
2. Используя векторы, докажите, что в любом треугольнике медианы пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении $2 : 1$, считая от вершины.

8.

1. Два параллелограмма $ABCD$ и $AB_1C_1D_1$ имеют общую вершину A . Докажите, что $CC_1 \leq BB_1 + DD_1$.
2. Точка A_1 лежит на стороне BC , а точка B_1 — на стороне AC треугольника ABC ; O — точка пересечения отрезков AA_1 и BB_1 , причем $AO : OA_1 = BO : OB_1 = 2 : 1$. Используя векторы, докажите, что AA_1 и BB_1 — медианы треугольника ABC .

§ 37. Средняя линия трапеции

1.

1. Разность оснований трапеции равна 4 см, а средняя линия 10 см. Найдите основание трапеции.
2. В равнобедренной трапеции $ABCD$ перпендикуляр, проведенный из вершины B на большее основание AD трапеции, делит его на отрезки, равные 4 см и 10 см. Найдите основания и среднюю линию трапеции.

2.

1. В трапеции одно из оснований больше другого в два раза. Средняя линия трапеции равна 15 см. Найдите основания трапеции.
2. В равнобедренной трапеции $MHKP$ проведен перпендикуляр HE к большему основанию MP , $ME = 6$ см, $HK = 10$ см. Найдите большее основание и среднюю линию трапеции.

3.

1. В трапеции $ABCD$ (AD и BC — основания) $\angle A = 90^\circ$, $\angle C = 135^\circ$, $AB = 2$ см. Найдите среднюю линию трапеции, если ее диагональ перпендикулярна к боковой стороне.
2. В равнобедренной трапеции острые углы равны по 60° , боковая сторона равна 10 см, а большее основание 15 см. Найдите меньшее основание и среднюю линию трапеции.

4.

1. В трапеции $MHKP$ (MP и HK — основания) $\angle M = 90^\circ$, $\angle K = 150^\circ$, $HK = 2$ см. Найдите среднюю линию трапеции, если известно, что ее диагональ перпендикулярна к боковой стороне.
2. В равнобедренной трапеции острые углы равны по 45° , меньшее основание равно 5 см, а высота трапеции 4 см. Найдите большее основание и среднюю линию трапеции.

5.

1. В равнобедренной трапеции диагональ, равная 4 см, составляет с основанием угол 60° . Найдите среднюю линию трапеции.
2. Докажите, что если трапецию можно разделить двумя прямыми на три равносторонних треугольника, то средняя линия такой трапеции в полтора раза больше меньшего основания.

6.

1. В равнобедренной трапеции диагональ составляет с основанием угол 45° . Высота трапеции равна 8 см. Найдите среднюю линию трапеции.
2. Докажите, что если трапецию можно разделить одной прямой на ромб и равносторонний треугольник, то средняя линия трапеции составляет $\frac{3}{4}$ большего основания.

7.

1. В трапеции $ABCD$ (AD и BC — основания) K — точка пересечения биссектрис внешних углов A и B трапеции, а L — точка пересечения биссектрис внешних углов D и C . Вычислите периметр трапеции $ABCD$, если $KL = 25$ см.
2. В прямоугольной трапеции $ABCD$ ($\angle C = \angle D = 90^\circ$) $BC : CD = 1 : 2$. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны. Средняя линия трапеции равна 10 см. Найдите основания трапеции.

8.

1. В равнобедренной трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) диагонали взаимно перпендикулярны, высота трапеции равна 12 см. Расстояние от вершины A до прямой CD в три раза больше, чем расстояние от вершины B до этой прямой. Найдите основания трапеции.
2. В трапеции $ABCD$ угол при вершине A прямой, а угол при вершине D равен 30° . Окружность, центр которой лежит на стороне AD , касается прямых AB , BC , CD . Найдите радиус окружности, если средняя линия трапеции равна $6 - \sqrt{3}$.

§ 38. Итоговое повторение (четырёхугольники, площади, подобные треугольники)

1.

$ABCD$ — квадрат со стороной 4 см. На сторонах AB и CD отложены отрезки AM и KC так, что $AM = KC = 3$.

а) Докажите, что $MBKD$ — параллелограмм.

б) Найдите его периметр и площадь.

2.

В прямоугольнике $ABCD$ на сторонах BC и AD отмечены точки M и K соответственно так, что $\angle BAM = 40^\circ$, $\angle DCK = 50^\circ$. Известно, что $CK = 8$ см, $BC = 20$ см.

а) Докажите, что $BM : CD = AM : KC$.

б) С помощью микрокалькулятора вычислите отрезки KD , CD , BM и площадь четырёхугольника $AMCK$.

3.

$ABCD$ — прямоугольник. $AB = 8$ см, $BC = 4$ см. На сторонах AB и CD отмечены точки K и P соответственно так, что $AK : AB = CP : CD = 3 : 8$.

а) Докажите, что $KBPD$ — ромб.

б) Найдите его периметр и площадь.

4.

В прямоугольнике $ABCD$ точка M делит сторону AB в отношении $2 : 1$, считая от вершины A . Прямые MD и BC пересекаются в точке E , $\angle MDA = 40^\circ$, $AD = 10$ см.

а) Докажите, что треугольники AMD и ECD подобны.

б) С помощью микрокалькулятора вычислите площадь треугольника DCE .

5.

В ромбе $ABCD$ $AB = 5$ см, $BD = 2\sqrt{5}$ см. На сторонах AB и CD отмечены точки M и K соответственно так, что $AM : MB = CK : KD = 1,5$.

а) Докажите, что $MBKD$ — прямоугольник.

б) Найдите его периметр и площадь.

6.

1. В параллелограмме $ABCD$ диагональ BD перпендикулярна стороне BC . На стороне BC выбрана точка E . Отрезки AE и BD пересекаются в точке O , причем $BO : OD = 2 : 3$, $BC = 9$ см и $AE = 20$ см. С помощью микрокалькулятора вычислите $\angle AOD$.
2. В треугольнике ABC на сторонах BC и AC соответственно отмечены точки H и P так, что $PC = 8$ см, $\angle HPC = \angle ABC$. Площади треугольников PHC и ABC относятся как $4 : 25$, $\cos \angle C = \frac{4}{5}$. Найдите высоту BE треугольника ABC .

7.

1. В трапеции $ABCD$ (AD и BC — основания) $\angle ABC = \angle ACD$, $BC = 2$ см, $AD = 8$ см, $\angle CAD = 40^\circ$. Используя микрокалькулятор, найдите площадь трапеции.
2. В параллелограмме $ABCD$ угол A острый. Из вершины A проведены высоты параллелограмма AM и AN к сторонам BC и CD соответственно, $MN : AC = 3 : 4$. Найдите отношение площадей треугольников MAN и ABC .

8.

1. В трапеции $ABCD$ (AD и BC — основания) $\angle ABC = \angle ACD$, $BC = 2$ см, $AD = 8$ см, $\angle CAD = 50^\circ$. Используя микрокалькулятор, найдите площадь трапеции.
2. В параллелограмме $ABCD$ угол A острый, BM и BH — высоты параллелограмма, проведенные к сторонам AD и DC соответственно, $MH : BD = 2 : 3$. Найдите отношение площадей треугольников MHB и BDC .

§ 39. Итоговое повторение (окружность)

1.

1. Через точку A , лежащую на окружности радиуса 10 см с центром O , проведена касательная AM . Отрезок OM пересекает окружность в точке B . Найдите градусную меру меньшей из дуг AB , если $AM = 10\sqrt{3}$ см.
2. Треугольник вписан в окружность так, что одна из его сторон проходит через центр окружности, а две другие удалены от него на 3 см и $3\sqrt{3}$ см. Найдите радиус окружности.

2.

1. Отрезок AB — диаметр некоторой окружности радиуса 5 см, прямая BC — касательная к ней, $AC = 10\sqrt{2}$ см. Найдите градусную меру дуги данной окружности, заключенной внутри треугольника ABC .
2. В треугольник ABC , в котором $\angle A = 90^\circ$, вписана окружность с центром O . Найдите отрезки, на которые точка касания этой окружности и прямой AC делит сторону AC , если $OC = 5$ дм и $AO = 3\sqrt{2}$ дм.

3.

1. Через концы хорды AB окружности с центром O проведены касательные, пересекающиеся в точке M . Найдите градусную меру меньшей из дуг AB , если $AM = 10$ см, а периметр четырехугольника $OAMB$ равен 40 см.
2. Диагональ трапеции составляет с большим основанием угол 30° , а центр окружности, описанной около трапеции, принадлежит этому основанию. Найдите площадь трапеции, если ее боковая сторона равна 2 см.

4.

1. AB и AD — две касательные к некоторой окружности радиуса 5 см (B и D — точки касания). Точка C принадлежит большей из дуг BD . Найдите $\angle BCD$, если $AB = 5$ см.
2. В некоторой трапеции один из углов прямой, а другой равен 30° . Большая боковая сторона трапеции равна 12 см. Найдите площадь трапеции, если известно, что в нее можно вписать окружность.

5.

1. AB и AC — касательные к окружности с центром O (C и B — точки касания). Найдите градусную меру меньшей из дуг BC , если расстояние от центра окружности до точки A равно 8 см, а до хорды BC равно 6 см.
2. Где внутри трапеции: вне или на основании — расположен центр окружности, описанной около равнобедренной трапеции с основаниями 10 см, 24 см и высотой 17 см?

6.

1. Из точки A к окружности диаметром BC проведена касательная AC . Отрезок AB пересекается с окружностью в точке D , $AD = 2$ см, $BD = 6$ см. Найдите градусную меру дуги окружности, заключенной внутри треугольника ABC .
2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ угол A прямой. Диагональ BD образует со сторонами BC , CD , AD углы 90° , 45° , 30° соответственно. Могут ли биссектрисы углов данного четырехугольника пересекаться в одной точке?

7.

Два круга, касающиеся друг друга, вписаны в полукруг. Найдите отношение радиусов этих кругов, если радиус одного из них в три раза меньше радиуса полукруга, а точки касания с диаметром полукруга лежат по разные стороны от его центра.

8.

В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) на стороне AC выбрана точка D , причем $AD = a$, $DC = b$. В треугольники ABD и DBC вписаны окружности. Первая окружность касается BD в точке E , а вторая — в точке F . Найдите расстояние между E и F .

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

№ 1. Четырехугольники

Вариант 1

- 1°. В трапеции $ABCD$ точка E — середина большего основания AD , $ED = BC$, $\angle B = 120^\circ$. Найдите углы AEC и BCE .
- 2°. Постройте ромб по его диагонали и стороне.
3. В прямоугольнике $ABCD$ точка O является центром симметрии, а точки P и K — середины сторон AB и BC соответственно.
 - а) Определите вид выпуклого четырехугольника $OPBK$.
 - б) Докажите, что $PK = OD$.
- 4*. Найдите сумму углов, отмеченных на рисунке 33.

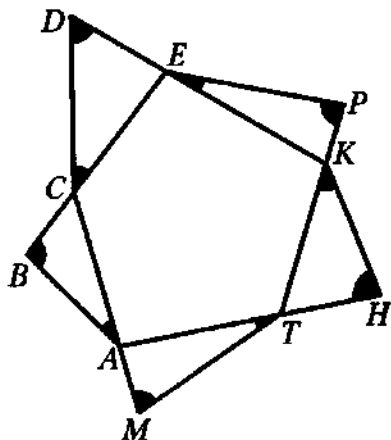


Рис. 33

Вариант 2

- 1°. Дан четырехугольник $ABCD$, в котором диагонали имеют общую середину. На продолжении стороны AD за вершину D взята точка E , $DC = EC$. Докажите, что четырехугольник $ABCE$ является равнобедренной трапецией.
- 2°. Постройте прямоугольник по стороне и углу, который эта сторона образует с диагональю.
3. В ромбе $ABCD$ точка O является центром симметрии, а точки P и K принадлежат сторонам AB и BC соответственно, так что $OP \parallel BC$, $OK \parallel AB$.
 - а) Определите вид выпуклого четырехугольника $OPBK$.
 - б) Найдите угол BCA , если угол BPK равен 40° .
- 4*. Может ли выпуклый шестиугольник иметь четыре острых угла?

Вариант 3

- 1°. В четырехугольнике $ABCD$ $AB = CD$, $BC = AD$. $\angle A = 30^\circ$. На стороне BC взята точка E так, что $\angle CDE = 60^\circ$. Докажите, что четырехугольник $ABED$ является прямоугольной трапецией.
- 2°. Постройте квадрат по его периметру.
3. На сторонах AB , BC , CD , AD ромба $ABCD$ взяты точки P , K , H , M соответственно. Каждая из прямых PM , KH , PK параллельна одной из осей симметрии ромба. Диагональ AC пересекает отрезок PM в точке E , а отрезок KH — в точке T .
 - а) Докажите, что диагонали четырехугольника $EPKT$ равны.
 - б) Определите вид выпуклого четырехугольника $MPKH$.
- 4*. Чему равна сумма углов, отмеченных на рисунке 34?

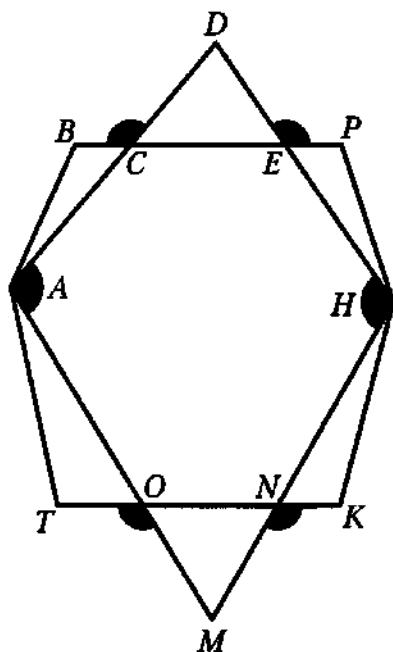


Рис. 34

Вариант 4

- 1°. В трапеции $ABCD$ на большем основании AD взята точка E . Известно, что $\angle ABC = 130^\circ$, $\angle BCE = 50^\circ$. Докажите, что отрезки AC и BE имеют общую середину.
- 2°. Постройте ромб по диагонали и углу между стороной и этой диагональю.
3. Ось симметрии прямоугольника $ABCD$ пересекает его стороны BC и AD в точках M и K соответственно. На стороне AB взята точка P , на стороне CD — точка T , причем $PM \parallel KT$, $PM = PK$.
 - а) Определите вид выпуклого четырехугольника $PMTK$.
 - б) Докажите, что расстояние от точки пересечения диагоналей четырехугольника $PMTK$ до точки C равно PK .
- 4*. В некотором выпуклом n -угольнике сумма $(n - 1)$ углов равна 359° . Найдите n .

№ 2. Площадь

Вариант 1

10. На стороне AD параллелограмма $ABCD$ взята точка E так, что $AE = 4$ см, $ED = 5$ см, $BE = 12$ см, $BD = 13$ см. Докажите, что треугольник BED прямоугольный, и найдите площадь параллелограмма.
20. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AK и CE , $CE = 12$ см, $BE = 9$ см, $AK = 10$ см. Найдите площадь треугольника ABC .
3. В равнобедренной трапеции $ABCD$ $AD \parallel BC$, $\angle A = 30^\circ$, высота BK равна 1 см, $BC = 2\sqrt{3}$ см.
 - а) Найдите площадь трапеции.
 - б) Найдите площадь треугольника AMD , если M — середина отрезка BD .
- 4*. На рисунке 35 площади четырехугольников $ABDE$ и $ACDE$ равны. Докажите, что $BC \parallel AD$.

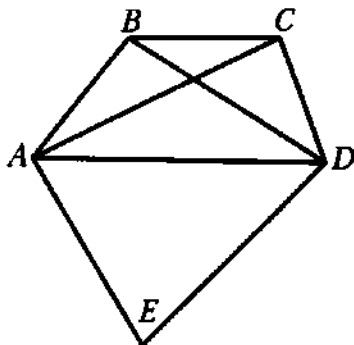


Рис. 35

Вариант 2

10. В трапеции $ABCD$ AD и BC — основания, $\angle A = 90^\circ$, $BC = 4$ см, $CD = 10$ см. Высота CK равна 8 см. Найдите площадь трапеции.
20. В остроугольном треугольнике ABC $\angle A = 45^\circ$, $BC = 13$ см. На стороне AC взята точка D так, что $DC = 5$ см, $BD = 12$ см. Докажите, что треугольник BDC прямоугольный, и найдите площадь треугольника ABC .
3. В параллелограмме $ABCD$ $\angle A = 60^\circ$, диагональ BD перпендикулярна к стороне AB . Прямая, проходящая через середину отрезка BD — точку M — параллельно AD , пересекает сторону AB в точке K , $MK = 4$ см.
 - а) Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.
 - б) Найдите площадь треугольника AMD .
- 4*. На рисунке 36 $BC \parallel KD$. Докажите, что площадь четырехугольника $AKCD$ равна площади треугольника ABD .

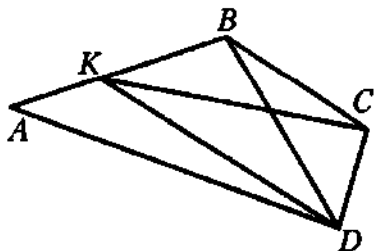


Рис. 36

Вариант 3

- 1⁰. В трапеции $ABCD$ AD — большее основание, CK — высота, $AB = 5$ см. На отрезке AK взята точка E так, что $AE = 3$ см, $EK = 6$ см, $KD = 1$ см, $BE = 4$ см. Определите вид треугольника ABE и найдите площадь трапеции.
- 2⁰. В треугольнике ABC угол A тупой, BK и CD — высоты, $BK = 12$ см, $AK = 9$ см, $CD = 10$ см. Найдите площадь треугольника ABC .
3. В ромбе $ABCD$ $AC = 10$ дм, $BD = 24$ дм. Высота AK проведена к стороне BC .
 - а) Найдите AK .
 - б) Найдите площадь треугольника AOM , если O — точка пересечения диагоналей ромба, M — середина стороны AB .
- 4*. На рисунке 37 площади четырехугольников $ABCP$ и $DTBC$ равны. Докажите, что $TP \parallel AD$.

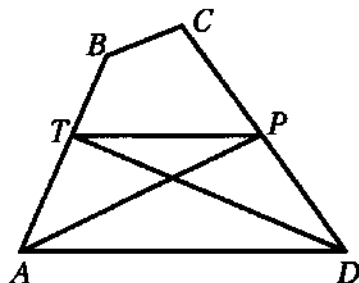


Рис. 37

Вариант 4

- 1⁰. В параллелограмме $ABCD$ BK и BT — высоты. Точки K и T принадлежат сторонам AD и DC , $BK = 10$ см, $BT = 9$ см, $TC = 12$ см. Найдите площадь параллелограмма.
- 2⁰. В треугольнике ABC $\angle A = 45^\circ$, $\angle C$ — тупой, $BC = 17$ см. На продолжении стороны AC за точку C взята точка D так, что $CD = 8$ см, $BD = 15$ см. Докажите, что треугольник BCD прямоугольный, и найдите площадь треугольника ABD .
3. В трапеции $ABCD$ $\angle A = 90^\circ$, боковая сторона CD перпендикулярна диагонали AC , $CD = 3$ см, $AD = 5$ см.
 - а) Найдите площадь трапеции.
 - б) Найдите площадь треугольника AMD , если M — середина CD .
- 4*. На рисунке 38 площади невыпуклых пятиугольников $ABOCD$ и $ABOCB$ равны. Докажите, что $AB \parallel DC$.

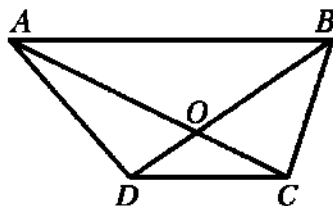


Рис. 38

№ 3. Подобные треугольники

Вариант 1

- 1⁰. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ все стороны имеют разные длины. Диагонали четырехугольника пересекаются в точке O , $OC = 5$ см, $OB = 6$ см, $OA = 15$ см, $OD = 18$ см.
- а) Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является трапецией.
- б) Найдите отношение площадей треугольников AOD и BOC .
2. В треугольнике ABC на сторонах AB и BC взяты точки K и M соответственно, причем $\angle KMC + \angle A = 180^\circ$.
- а) Докажите, что $\frac{KM}{AC} = \frac{BK}{BC}$.
- б) Найдите отношение $AB : BM$, если площадь четырехугольника $AKMC$ относится к площади треугольника BKM как $8 : 1$.
- 3*. В трапеции $ABCD$ на меньшем основании BC и на боковой стороне CD взяты точки E и K соответственно, а на отрезке AE отмечена точка O . Найдите отношение $\frac{AB}{BE}$, если $KC = 2$ см, $KD = 3$ см, $OK \parallel AD$, $\angle OBA = \angle OBE$.

Вариант 2

- 1⁰. Через точку M стороны AB треугольника ABC проведена прямая, перпендикулярная высоте BD и пересекающая сторону BC в точке P , $BM = 5$ см, $BP = 8$ см, $BC = 24$ см.
- а) Найдите AB .
- б) Найдите отношение площадей треугольников MPB и ABC .
2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагональ BD делит угол B пополам, $\frac{BD^2}{BC} = AB$.
- а) Докажите, что $\angle BAD = \angle BDC$.
- б) Найдите отношение площадей четырехугольника $ABCD$ и треугольника ABD , если $DC = 1,5 AD$.
- 3*. На боковых сторонах AB и CD трапеции $ABCD$ взяты точки P и K соответственно так, что $PK \parallel AD$, $\angle DBK = \angle KBC$, $BC : BD = 3 : 4$. Найдите $BP : PA$.

Вариант 3

- 1⁰. На сторонах AB , BC , AC треугольника ABC отмечены точки D , E , P соответственно, $AB = 9$ см, $AD = 3$ см, $AP = 6$ см, $DP = 4$ см, $BE = 8$ см, $DE = 12$ см.
- а) Докажите, что $DE \parallel AC$.
- б) Найдите отношение площадей треугольников DBE и ADP .
2. В трапеции $ABCD$ $\angle A = 90^\circ$. Высота CE делит основание AD на два равных отрезка, точка O — середина отрезка AC .
- а) Докажите, что $\frac{BO}{BC} = \frac{CD}{AD}$.
- б) Найдите площадь треугольника ACD , если площадь невыпуклого пятиугольника $AOBCD$ равна S .
- 3*. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты точки M и K соответственно так, что $\angle MKB = \angle A$. Отрезок BO является биссектрисой треугольника MBK , $MO = 2$ см, $OK = 3$ см. Найдите $BC : AB$.

Вариант 4

- 1⁰. В трапеции $ABCD$ точка O — середина меньшего основания BC . Прямые AO и CD пересекаются в точке E , $AD = 6$ дм, $BC = 4$ дм.
- а) Найдите $\frac{EC}{CD}$.
- б) Найдите отношение площадей треугольников EOC и AED .
2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $AD = 2BC$, $AC = CD$, O — середина AC , $\angle OBC = \angle OCB$.
- а) Докажите, что $BC \parallel AD$.
- б) Найдите отношение площадей треугольника BOC и выпуклого пятиугольника $AOBCD$.
- 3*. На сторонах AB и BC треугольника ABC отмечены точки D и E . Биссектриса BK этого треугольника пересекает отрезок DE в точке T , $DT = 3$ дм, $TE = 4$ дм, $AK = 8$ дм, $KC = 6$ дм. Докажите, что $\angle C = \angle BDE$.

№ 4. Применение подобия, решение прямоугольных треугольников

Вариант 1

- 1°. На рисунке 39 $BC \perp AC$, $EC \perp MB$, O — точка пересечения медиан треугольника ABC , $MC = 30$ мм, $ME = 20$ мм. Найдите $\cos \angle EMC$ и OM .

- 2°. Постройте отрезок, равный $\frac{2}{5}$ данного отрезка.

3. В трапеции $ABCD$ $BC \parallel AD$, $AB \perp BD$, точки M и K — середины отрезков BC и CD соответственно, $MK = \sqrt{5}$ см, $AD = 2\sqrt{10}$ см.

а) Найдите $\angle DBC$.

б) Найдите BE , если CE — высота треугольника BCD , а тангенс угла ECD равен 3.

- 4*. Будут ли подобны внешний и внутренний прямоугольники рамки для картины, если ее ширина в любом месте одинакова?

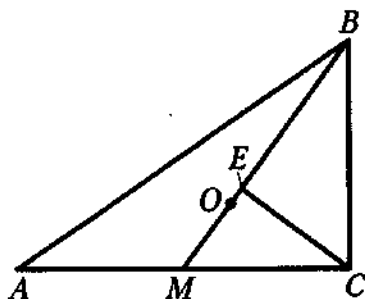


Рис. 39

Вариант 2

- 1°. На рисунке 40 $AB \perp BC$, $BD \perp AC$, точки E и T — середины отрезков BD и BC , $AD = 25$ дм, $ET = 8$ дм. Найдите BD и $\operatorname{tg} \angle A$.

- 2°. Даны отрезки P_1Q_1 , P_2Q_2 , P_3Q_3 . Постройте отрезок AB такой, что $\frac{P_1Q_1}{P_2Q_2} = \frac{P_3Q_3}{AB}$.

3. В треугольнике ABC медиана BD составляет со стороной BC угол DBC , равный 60° . Точка пересечения медиан удалена от прямой BC на $\sqrt{3}$ см.

а) Найдите BD .

б) Найдите AB , если $\angle ABD = 30^\circ$.

- 4*. Прямая, проходящая через середины противоположных сторон прямоугольника, разделяет этот прямоугольник на два. Может ли один из образовавшихся прямоугольников быть подобным данному?

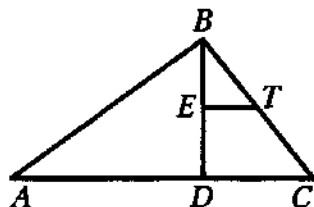


Рис. 40

Вариант 3

- 1⁰. На рисунке 41 $\angle BCA = 90^\circ$, O — точка пересечения медиан треугольника ABC , $\angle COM = 90^\circ$, $OM = \sqrt{2}$ дм. Найдите OC и $\operatorname{tg} \angle OBC$.
2. Постройте отрезок, равный $\frac{6}{5}$ данного отрезка.
3. В трапеции $ABCD$ $\angle A = 90^\circ$. Расстояние между серединами большего основания AD и боковой стороны CD равно $\sqrt{18}$ см, $BC = 6$ см.
 - а) Найдите угол CAD .
 - б) Найдите расстояние от точки D до прямой AC , если тангенс угла ACD равен 2.
- 4*. Можно ли разрезать квадрат на два подобных не равных прямоугольника?

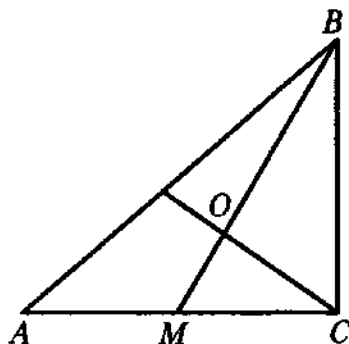


Рис. 41

Вариант 4

- 1⁰. На рисунке 42 $AC \perp BC$, $CD \perp MB$. Точки E и K — середины отрезков AB и AM , $EK = 12,5$ см, $DM = 9$ см. Найдите CM и $\sin \angle MBC$.
- 2⁰. Даны отрезки P_1Q_1 и P_2Q_2 . Постройте отрезок AB так, чтобы $\frac{P_1Q_1}{P_2Q_2} = \frac{P_2Q_2}{AB}$.
3. В треугольнике ABC BD — медиана, O — точка пересечения медиан, $\angle BDC = 60^\circ$. Из точки O опущен перпендикуляр OM к прямой AC , $OM = 2\sqrt{3}$ дм.
 - а) Найдите BD .
 - б) Найдите расстояние от точки пересечения прямых OM и AB до вершины A , если $\angle ABD = 30^\circ$.
- 4*. Можно ли разрезать прямоугольник на два подобных не равных прямоугольника?

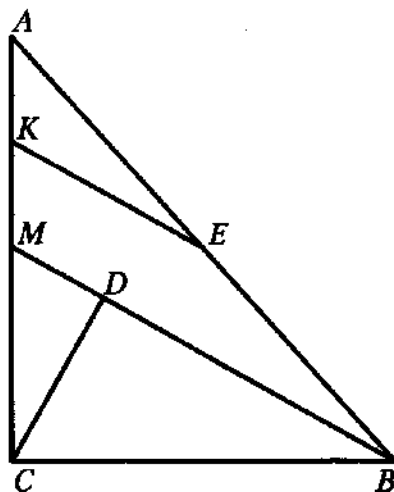


Рис. 42

№ 5. Окружность

Вариант 1

- 1⁰. В равностороннем треугольнике сторона равна $2\sqrt{3}$ см. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник.
- 2⁰. Около остроугольного треугольника ABC описана окружность. Точка O пересечения серединных перпендикуляров удалена от прямой AB на 6 см. Найдите $\angle OBA$ и радиус окружности, если $\angle AOC = 90^\circ$, $\angle OBC = 15^\circ$.
3. В параллелограмм $ABCD$ с углом A , равным 45° , и стороной AD , равной $10\sqrt{2}$ дм, вписана окружность.
 - а) Найдите радиус окружности.
 - б) Найдите с помощью микрокалькулятора сумму расстояний от вершины D до точек касания окружности с прямыми AD и DC .
- 4*. Даны окружность диаметра AB и точка O внутри нее. Используя только линейку без делений, опустите перпендикуляр из точки O на прямую AB .

Вариант 2

- 1⁰. В равнобедренном треугольнике ABC $\angle B = 120^\circ$. Радиус окружности, описанной около треугольника, равен 2 см. Найдите сторону AB .
- 2⁰. В треугольник ABC с прямым углом C вписана окружность с центром O , касающаяся сторон треугольника AB , BC , AC в точках M , T , P соответственно. Расстояние от точки пересечения биссектрис треугольника ABC до вершины C равно $\sqrt{8}$ см. Найдите радиус окружности, угол TOP и угол TMP .
3. Стороны AB и CD четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность радиуса 4 см, параллельны и имеют равные длины, $\angle ADB = 60^\circ$.
 - а) Найдите AB .
 - б) Какие значения может принимать угол MBC , если M — точка окружности равноудалена от концов отрезка BC ?
- 4*. Даны два отрезка PQ и ET ($ET > PQ$). Постройте четырехугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = PQ$, $BD = ET$, диагонали пересекаются в точке O и $AO \cdot OC = BO \cdot OD$.

Вариант 3

- 1°. В треугольнике ABC $\angle A = 60^\circ$. Радиус окружности, вписанной в этот треугольник, равен 1 см. Найдите расстояние от точки касания окружности и прямой AC до вершины A .
- 2°. В $\triangle ABC$ с тупым углом B O — точка пересечения серединных перпендикуляров, $AC = 4\sqrt{2}$ дм, $\angle AOC = 90^\circ$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника, и $\angle ABC$.
3. В трапецию $ABCD$ вписана окружность с центром O и радиусом 6 см, $\angle CAD = 45^\circ$, $\angle ACD = 90^\circ$.
 - а) Найдите $BC + AD$, если $AB = 10\sqrt{2}$ см.
 - б) Найдите $OC \cdot OD$.
- 4*. Даны окружность диаметра AB и точка O вне ее. Используя только линейку без делений, опустите перпендикуляр из точки O на прямую AB .

Вариант 4

- 1°. Радиус окружности, описанной около $\triangle ABC$, $\sqrt{8}$ см, а два угла треугольника равны по 45° . Найдите стороны $\triangle ABC$.
- 2°. В равнобедренном треугольнике ABC $\angle B = 120^\circ$, O — точка пересечения биссектрис. Окружность радиуса $2\sqrt{3}$ см вписана в этот треугольник и касается прямых BC и AC в точках D и E соответственно. Найдите BO и BE .
3. Трапеция $ABCD$ вписана в окружность, $\angle A = 60^\circ$, $\angle ABD = 90^\circ$, $CD = 4$ см.
 - а) Найдите радиус окружности.
 - б) Какие значения может принимать угол BMC , если M — произвольная точка окружности?
- 4*. Даны два отрезка PQ , ET и угол H . Постройте четырехугольник $ABCD$, в котором O — точка пересечения диагоналей, $BO = PQ$, $DO = ET$, $\angle DOC = \angle H$ и $AO \cdot OC = DO \cdot OB$.

№ 6. Векторы

Вариант 1

- 1⁰. Начертите параллелограмм $ABCD$ и постройте векторы $\frac{2}{3}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$, $\frac{1}{4}(\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC})$.
2. В треугольнике ABC B_1 — середина AC , M — точка пересечения медиан.
 - а)⁰ Выразите $\overrightarrow{MB_1}$ через $\overrightarrow{MA}$ и $\overrightarrow{MC}$.
 - б) Выразите $\overrightarrow{CM}$ через $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{CA}$.
 - в) Выразите $\overrightarrow{MA_1}$ через $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, если $A_1 \in BC$ и $BA_1 : A_1C = 1 : 2$.
 - г)* Используя векторы, покажите, что середина отрезка BB_1 лежит на прямой AA_1 , если $A_1 \in BC$ и $BA_1 : A_1C = 1 : 2$.

Вариант 2

- 1⁰. Начертите два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, отложенных от разных точек. Постройте векторы $\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{d} = \vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$.
2. В трапеции $ABCD$ основания AD и BC относятся как 3 : 1. Диагонали трапеции пересекаются в точке O .
 - а)⁰ Выразите $\overrightarrow{AC}$ через $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.
 - б) Выразите $\overrightarrow{BO}$ через $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AO}$.
 - в) Выразите $\overrightarrow{AO}$ через $\overrightarrow{DE}$ и $\overrightarrow{DM}$, если точки E и M — середины сторон AB и BC соответственно.
 - г)* Докажите, что $DE < \frac{2}{3}DA + \frac{1}{2}DC$, если точка E — середина стороны AB .

Вариант 3

- 1⁰. Начертите треугольник ABC и постройте векторы $\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ и $\frac{1}{5}(\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC})$.
2. В параллелограмме $ABCD$ точка M — середина стороны BC , отрезки BD и AM пересекаются в точке O .
- а)⁰ Выразите $\overrightarrow{AM}$ через $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.
- б) Выразите $\overrightarrow{BO}$ через $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$.
- в) Выразите $\overrightarrow{OD}$ через $\overrightarrow{AP}$ и $\overrightarrow{AM}$, если P — середина отрезка CD .
- г)* Докажите, что $OP < \frac{2}{3}AD + \frac{1}{6}AB$, если P — середина отрезка CD .

Вариант 4

- 1⁰. Начертите два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, отложенных от разных точек. Постройте векторы $\vec{c} = \frac{1}{3}\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{d} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}$.
2. Основания BC и AD трапеции $ABCD$ относятся как $1 : 2$, E — середина стороны CD , O — точка пересечения диагоналей.
- а)⁰ Выразите $\overrightarrow{OE}$ через $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OD}$.
- б) Выразите $\overrightarrow{BO}$ через $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AB}$.
- в) Выразите $\overrightarrow{CO}$ через $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.
- г)* Используя векторы, докажите, что точка M , делящая отрезок AE в отношении $1 : 4$, считая от точки E , принадлежит прямой BD .

№ 7. Итоговое повторение

Вариант 1

1. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы A и B — прямые, $BC = 6$, $AD = 8$, $AB = 2\sqrt{3}$.
 - а)⁰ Найдите площадь четырехугольника $ABCD$.
 - б)⁰ Найдите углы C и D четырехугольника $ABCD$.
 - в)⁰ Найдите длину отрезка, соединяющего середины сторон AB и CD .
 - г)⁰ Выясните, можно ли вписать в четырехугольник $ABCD$ окружность.
 - д)⁰ Выясните, можно ли провести окружность через точки A , B , C , D .
 - е) Выясните, подобны ли треугольники ABC и ACD .
 - ж) Выразите вектор $\overrightarrow{CA}$ через векторы $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{CD}$.
- 2*. Постройте отрезок, длина которого в $\sqrt{5}$ раз больше данного отрезка.

Вариант 2

1. В равнобедренном треугольнике ABC угол B равен 120° , точки M и N — середины сторон AB и BC соответственно, $AC = 4\sqrt{3}$.
 - а)⁰ Найдите площадь треугольника ABC .
 - б)⁰ Найдите расстояние между серединами отрезков AM и NC .
 - в)⁰ Докажите, что треугольники ABC и MBN подобны, и найдите отношение их площадей.
 - г)⁰ Выразите вектор $\overrightarrow{MB}$ через векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{NB}$.
 - д)⁰ Выясните, можно ли провести окружность через точки A , M , N , C .
 - е) Найдите синус угла HME , если точка E — основание перпендикуляра HE , проведенного к прямой AC .
 - ж) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник MBN .
- 2*. Постройте отрезок, длина которого в $\sqrt{12}$ раз больше данного.

Вариант 3

1. На окружности с центром O и диаметром AB , равным 4, взята точка M , расположенная ближе к точке A , чем к точке B . Через точку M проведена касательная к окружности, а через точки A и B — лучи, перпендикулярные к AB и пересекающие касательную в точках D и C соответственно, $\angle DCB = 60^\circ$.
- а)⁰ Найдите углы OCB , ADC , ODC .
- б)⁰ Найдите отрезки AD и CB .
- в)⁰ Найдите площадь четырехугольника $ABCD$.
- г)⁰ Найдите углы четырехугольника $MOBC$.
- д)⁰ Докажите, что треугольники AOD и COB подобны.
- е) Докажите, что расстояние от точки O до середины отрезка DC равно $0,5(MD + BC)$.
- ж) Выразите $\overline{OM}$ через $\overline{OD}$ и $\overline{OC}$.
- 2*. Постройте отрезок, длина которого в $\sqrt{14}$ раз больше данного.

Вариант 4

1. В параллелограмме $ABCD$ $\angle A = 45^\circ$, $AD = 4$. На продолжении стороны AB отложен отрезок BP так, что угол PDA равен 90° . Отрезки BC и PD пересекаются в точке T , $PT : TD = 3 : 1$.
- а)⁰ Докажите, что треугольники BPT и TCD подобны, и найдите отношение их площадей.
- б)⁰ Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.
- в)⁰ Найдите расстояние между серединами отрезков AB и TD .
- г)⁰ Выясните, можно ли провести окружность через точки A , B , T , D .
- д)⁰ Выразите вектор $\overline{AB}$ через векторы $\overline{CA}$ и $\overline{TB}$.
- е) Найдите синус угла CAD .
- ж) Найдите градусные меры дуг, на которые точки касания делят окружность, вписанную в треугольник BPT .
- 2*. Постройте отрезок, длина которого в $\sqrt{3}$ раз меньше данного.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ДИКТАНТЫ

№ 1. Четырехугольники

Вариант 1

1. Найдите углы четырехугольника, если три угла его равны между собой, а четвертый меньше одного из них на 40° .
2. В параллелограмме $ABCD$ $\angle C = 40^\circ$. Точка E лежит на стороне BC , причем $\angle BAE = 20^\circ$. $EC = 2$ см; $AB = 10$ см. Найдите AD .
3. В параллелограмме $ABCD$ сторона AB равна 10 см. Диагонали AC и BD пересекаются в точке O и соответственно равны 14 см и 10 см. Найдите периметр треугольника AOB .
4. В четырехугольнике $ABCD$ $AB = CD$ и $AB \parallel CD$. $\angle CBD = 15^\circ$. Чему равен $\angle BDA$?
5. В параллелограмме $ABCD$ на сторонах AB и CD от вершин A и C отложены равные отрезки AF и CE . В четырехугольнике $FBED$ $\angle BFD = 50^\circ$. Чему равен угол BED ?
6. В прямоугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O . $\angle COD = 60^\circ$; $CD = 10$ см. Чему равны диагонали прямоугольника?
7. Угол между высотами ромба, проведенными из одной из его вершин, равен 30° . Высота ромба равна 5 см. Найдите периметр ромба.
8. В квадрате сумма расстояний от его центра до сторон равна 20 см. Чему равен периметр квадрата?
9. В равнобедренной трапеции $ABCD$ (AD и BC — основания) диагонали взаимно перпендикулярны. $BE \perp AD$. $ED = 4$ см. Чему равна высота трапеции?
10. В прямоугольном треугольнике ABC $\angle A = 45^\circ$ ($\angle C = 90^\circ$). E — середина AB . Через точку E проведена прямая, параллельная AC , которая пересекает BC в точке F . $EF = 10$ см. Найдите BC .

Вариант 2

1. Найдите углы четырехугольника, если три угла его равны между собой, а четвертый больше одного из них на 80° .
2. В параллелограмме $ABCD$ $\angle B = 140^\circ$. Точка F лежит на стороне BC , причем $\angle ADF = 70^\circ$, $BF = 5$ см. $AD = 20$ см. Найдите AB .

3. В параллелограмме диагонали пересекаются в точке O . Сторона BC равна 18 см, $BD = 16$ см. Периметр треугольника BOC равен 38 см. Найдите длину диагонали AC .
4. В четырехугольнике $ABCD$ $BC = AD$ и $BC \parallel AD$. $\angle BAC + \angle ACD = 80^\circ$. Найдите эти углы.
5. В параллелограмме $ABCD$ на сторонах AD и BC от вершин B и D отложены равные отрезки BE и DF . В четырехугольнике $AECF$ диагонали пересекаются в точке O . $AC + EF = 30$ см. Найдите $AO + OF$.
6. В прямоугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O . $\angle ACD = 60^\circ$. $BD = 10$ см. Чему равна сторона CD ?
7. Высота ромба делит его сторону пополам. Чему равен угол между высотами ромба, проведенными из одной из его вершин.
8. Периметр квадрата равен 80 см. Чему равно расстояние от его центра до стороны?
9. В равнобедренной трапеции $ABCD$ (AD и BC — основания) диагонали взаимно перпендикулярны. $BK \perp AD$, $BK = 7$ см. Чему равна длина отрезка KD ?
10. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$, $\angle B = 45^\circ$) O — середина AB . Через точку O проведена прямая, параллельная AC , которая пересекает BC в точке K . $BC = 18$ см. Найдите длину отрезка OK .

№ 2. Площадь

Вариант 1

1. Сторона квадрата равна 4 см. На его диагонали построен новый квадрат. Его площадь равна ...
2. В параллелограмме $ABCD$ диагональ $AC = 12$ см, а сторона $AD = 10$ см, $\angle CAD = 30^\circ$. Найдите площадь параллелограмма.
3. В параллелограмме $ABCD$ на диагонали AC взята точка M . Площадь треугольника BMC равна Q . Чему равна площадь треугольника DMC ?
4. Основания треугольников равны, а высота одного из треугольников в три раза больше высоты другого. Найдите отношение площадей этих треугольников.
5. В треугольнике ABC AE и BD — высоты. $AC = 10$, $BD = 8$, $BC = 16$. Найдите AE .

6. В прямоугольной трапеции $ABCD$ (AD и BC — основания) $\angle CDA = 90^\circ$, $BC = 2$ см, $AD = 6$ см, $AB = 10$ см; $\angle A = 30^\circ$. Площадь трапеции равна ...
7. В прямоугольнике диагональ равна 25, а одна из сторон — 15. Найдите катеты равновеликого ему равнобедренного прямоугольного треугольника.
8. В треугольнике ABC $AB = m$, $BC = n$ ($n > m$). BD — высота треугольника и $BD = h$. Найдите AC .
9. В ромбе один из углов равен 60° . Меньшая диагональ равна $\sqrt{3}$. Высота ромба равна ...
10. Стороны треугольника равны 7, 24 и 25. Найдите площадь треугольника.

Вариант 2

1. На диагонали квадрата построен новый квадрат, площадь которого равна 8 см^2 . Сторона квадрата равна...
2. В параллелограмме $ABCD$ диагональ $AC = 10$ см, а расстояние от вершины B до этой диагонали в два раза меньше ее длины. Найдите площадь параллелограмма.
3. В параллелограмме $ABCD$ на продолжении диагонали BD за точку D взята точка P . Площадь треугольника ADP равна S . Чему равна площадь треугольника CDP ?
4. Высоты треугольников равны, а основание одного из них в два раза меньше другого. Найдите отношение площадей этих треугольников.
5. В треугольнике ABC BD и CF — высоты. $BD = 12$, $CF = 10$; $AC = 5$. Найдите AB .
6. В прямоугольной трапеции (AD и BC — основания) $\angle CDA = 90^\circ$. $\angle A = 45^\circ$; $BC = 2$; $CD = 6$. Площадь трапеции равна...
7. В прямоугольнике расстояния от точки пересечения диагоналей до вершин и до одной из его сторон соответственно равны 6,5 и 6. Найдите сторону равновеликого ему квадрата.
8. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) точка D принадлежит стороне BC , $AB = a$; $AD = b$; $AC = m$. Найдите BD .
9. В ромбе один из углов равен 60° . Высота ромба равна $\sqrt{3}$. Найдите длину меньшей диагонали.
10. Сторона треугольника равна 8, 15 и 17. Найдите площадь треугольника.

№ 3. Подобные треугольники

Вариант 1

1. В треугольнике ABC $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{5}$. AD — биссектриса угла. Площадь треугольника ABD равна 9 см^2 . Площадь треугольника ACD равна...
2. В треугольниках ABC и MPL $\angle A = \angle M$; $\angle C = \angle L$, $\frac{AB}{MP} = \frac{2}{3}$, $AC = 10$ см. Сторона ML равна...
3. В треугольнике ABC на сторонах AB и BC взяты соответственно точки E и F ; $\frac{EB}{BF} = \frac{BC}{AB}$, $\angle BFE = 40^\circ$. Чему равен угол A ?
4. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{5}{2}$. Сумма площадей этих треугольников равна 58 см^2 . Найдите площадь каждого треугольника.
5. В треугольнике ABC медианы AE и BF пересекаются в точке O . Площадь треугольника ABC равна 12 см^2 . Найдите площадь треугольника ABO .
6. Площадь треугольника ABC равна 12 см^2 . DE — средняя линия ($D \in AB$; $E \in BC$). Найдите площадь трапеции $ADEC$.
7. CK — высота прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90^\circ$), $\frac{AC}{BC} = \frac{3}{4}$. Как относятся площади треугольников AKC и BKC ?
8. В равнобедренном треугольнике ABC $AB = BC$, $BD \perp AC$, $BD = 12$; $AC = 10$. Найдите: $\cos \angle A$ и $\sin \angle ABD$.
9. В ромбе $ABCD$ $\angle A = \alpha$; $AC = d$. Найдите сторону ромба.
10. Диагонали параллелограмма равны m и n , угол между ними равен 60° . Найдите площадь параллелограмма.

Вариант 2

1. В треугольнике ABC BM — биссектриса. Площади треугольников ABM и CBM относятся как $1 : 3$; $AB = 4$ см. Сторона равна...
2. В треугольниках EPF и CDK $\angle P = \angle D$ и $\angle F = \angle K$. $\frac{EP}{CD} = \frac{2}{5}$; $DK = 10$ см. Сторона PF равна...
3. В треугольнике ABC на сторонах AB и BC взяты соответственно точки D и K , $\frac{BD}{BC} = \frac{BK}{AB}$; $\angle BCA = 50^\circ$. Чему равен угол BDK ?

4. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$, $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{9}{16}$. $AC + A_1A_1 = 14$ см. Найдите эти стороны.
5. В треугольнике ABC медианы BK и CD пересекаются в точке O . Площадь треугольника COK равна 30 см^2 . Найдите площадь треугольника ABC .
6. EF — средняя линия треугольника ABC ($E \in AB$; $F \in AC$). Площадь трапеции $EBCF$ равна 9 см^2 . Найдите площадь треугольника ABC .
7. CD — высота прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90^\circ$). $\frac{S_{ADC}}{S_{C_1D_1A_1}} = \frac{25}{36}$. Как относятся катеты AC и CB ?
8. В равнобедренном треугольнике ABC $AB = BC$, $BD \perp AC$, $AB = 25$, $AC = 48$. Найдите: $\sin \angle A$ и $\cos \angle ABD$.
9. В ромбе $ABCD$ $\angle A = \alpha$; сторона ромба равна a . Найдите диагональ AC .
10. Диагонали параллелограмма равны d_1 и d_2 , угол между ними равен 45° . Найдите площадь параллелограмма.

№ 4. Окружность

Вариант 1

1. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) $\angle B = 60^\circ$, $BC = \sqrt{3}$ с центром в точке A проведена окружность, радиус которой равен $2,7$. Сколько общих точек имеет эта окружность с прямой BC ?
2. Дана окружность с центром в точке O . Радиус окружности равен 5 см. Прямая l касается окружности в точке A . На касательной от точки A отложен отрезок AB , равный 12 см. Отрезок OB пересекает окружность в точке K . Отрезок KB равен...
3. Из точки M к окружности с центром в точке O проведены две касательные MA и MB (A и B — точки касания). Радиус окружности равен $2\sqrt{3}$, $\angle AMB = 60^\circ$. Расстояние между точками касания AB равно...
4. Вписанный в окружность угол BAC , равный 45° , опирается на дугу BC . Радиус окружности равен a . Найдите площадь треугольника BOC (O — центр окружности).

5. AB — хорда окружности. Прямая l касается окружности в точке A . На прямой l выбрана точка M такая, что $\angle MAB$ — тупой. Вписанный в окружность угол ACB опирается на дугу AB и равен 20° . Чему равен угол MAB ?
6. Из точки C , принадлежащей окружности, на диаметр AB опущен перпендикуляр CK . $AK = 2$; $CK = 4$. Чему равен отрезок KB ?
7. Катеты прямоугольного треугольника равны 5 и 12. Радиус вписанной в треугольник окружности равен...
8. В прямоугольную трапецию $ABCD$ вписана окружность (AD и BC — основания). $CD \perp AD$. $\angle A = 30^\circ$. $CD = 10$ см. Периметр трапеции равен...
9. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) $\angle A = \alpha$, $BC = a$. Найдите радиус описанной вокруг треугольника окружности.
10. Вокруг трапеции описана окружность. Один из ее углов равен 40° . Остальные углы трапеции равны...

Вариант 2

1. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) $\angle A = 30^\circ$, $AC = 2\sqrt{3}$. С центром в точке B проведена окружность, радиус которой равен 2,2. Сколько общих точек имеет эта окружность с прямой AC ?
2. Прямая l касается окружности с центром в точке O . Радиус окружности равен 8 см. На касательной от точки P отложен отрезок PM . Отрезок OM пересекает окружность в точке F . $FM = 9$ см. Отрезок PM равен...
3. Из точки P к окружности с центром в точке O проведены касательные PA и PB (A и B — точки касания). $\angle APB = 90^\circ$. Расстояние между точками касания AB равно $\sqrt{5}$. Чему равно расстояние OP ?
4. В окружность с центром в точке O вписан угол BAC , равный 30° . $BC = a$. Найдите площадь треугольника BOC .
5. PK — хорда окружности. Прямая m касается окружности в точке P . На прямой m выбрана точка F такая, что $\angle FPK = 160^\circ$. Угол PDK вписан в окружность и опирается на дугу PK . Чему равен угол PDK ?
6. Из точки P , принадлежащей окружности, на диаметр EF опущен перпендикуляр PK . $EK = 4$; $KF = 9$. Чему равен отрезок PK ?
7. Стороны треугольника равны 13, 13 и 24. Радиус вписанной в треугольник окружности равен...

8. В прямоугольную трапецию $ABCD$ вписана окружность (AD и BC — основания), $CD \perp AD$, $\angle A = 30^\circ$. Периметр трапеции равен 24 см. Чему равны стороны AB и CD ?
9. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) $\angle B = \beta$. $AC = b$. Найдите радиус описанной вокруг треугольника окружности.
10. Вокруг трапеции описана окружность. Один из углов трапеции равен 160° . Остальные углы трапеции равны...

№ 5. Векторы

Вариант 1

1. В параллелограмме $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O . $M \in AD$.
 - 1) Какие из указанных векторов коллинеарны: $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{MD}$; $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{CA}$?
 - 2) Какие из указанных векторов равны: $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{BO}$ и $\overrightarrow{OD}$; $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$?
2. Найдите сумму векторов: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}$.
3. Выразите вектор $\overrightarrow{FK}$ через векторы $\overrightarrow{EF}$ и $\overrightarrow{EK}$.
4. При каких k верно равенство: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = k(\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EA})$?
5. Векторы $\vec{a} \neq \vec{0}$ и $\vec{b} \neq \vec{0}$ неколлинеарны. Найдите x и y из равенства: $3\vec{a} + 5\vec{b} = x\vec{a} + (2y + 1)\vec{b}$.
6. В параллелограмме $ABCD$ $K \in AD$, причем $\frac{AK}{KD} = \frac{1}{2}$, P — середина AB . Выразите вектор $\overrightarrow{BK}$ через векторы $\overrightarrow{BP}$ и $\overrightarrow{BC}$.
7. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$); $AB = 10$, $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{CM}$. Найдите $|\overrightarrow{CM}|$.
8. Из точки O выходят два вектора $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Найдите какой-нибудь вектор $\overrightarrow{OM}$, идущий по биссектрисе угла AOB .
9. В трапеции $ABCD$ (BC и AD — основания) EF — средняя линия. Выразите $\overrightarrow{EF}$ через $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{DA}$.
10. В равнобедренную трапецию с углом 30° вписана окружность. Средняя линия трапеции равна 12. Чему равен радиус вписанной окружности?

Вариант 2

1. В параллелограмме $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O , $E \in AB$.
 - 1) Какие из указанных векторов коллинеарны: $\overrightarrow{BE}$ и $\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BE}$; $\overrightarrow{OD}$ и $\overrightarrow{DB}$?
 2. Какие из указанных векторов равны: $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$?
 2. Найдите сумму векторов: $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FK} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{KC}$.
 3. Выразите вектор $\overrightarrow{KM}$ через векторы $\overrightarrow{PM}$ и $\overrightarrow{PK}$.
 4. При каких k верно равенство: $\overrightarrow{PK} + \overrightarrow{KE} + \overrightarrow{EC} = k(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AC})$?
 5. Векторы $\vec{a} \neq \vec{0}$ и $\vec{b} \neq \vec{0}$ неколлинеарны. Найдите x и y из равенства: $(2x - 6)\vec{a} + 3\vec{b} = 2\vec{a} + (y - 3)\vec{b}$.
 6. В параллелограмме $ABCD$ $E \in BC$, причем $\frac{BE}{EC} = \frac{2}{1}$; F — середина AB . Выразите вектор $\overrightarrow{AE}$ через векторы $\overrightarrow{AF}$ и $\overrightarrow{AD}$.
 7. В параллелограмме $ABCD$ $BD = 14$; $2\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$. Найдите $|\overrightarrow{BF}|$.
 8. Из точки O выходят два вектора $\overrightarrow{OA} = \vec{m}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{n}$. Найдите какой-нибудь вектор $\overrightarrow{OM}$, идущий по биссектрисе угла, вертикального с углом AOB .
 9. В трапеции $ABCD$ (BC и AD — основания) PK — средняя линия. Выразите вектор $\overrightarrow{PK}$ через векторы $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{AD}$.
 10. В равнобедренную трапецию с углом 90° вписана окружность с радиусом, равным 6 см. Чему равна средняя линия трапеции?

9 класс

ЗАДАЧИ ДЛЯ УРОКА

Параграф	Тема
1	Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам
2	Координаты вектора
3	Связь между координатами вектора и координатами его начала и конца. Простейшие задачи в координатах
4	Применение метода координат к решению задач
5	Уравнение окружности
6	Уравнение прямой
7	Использование уравнений окружности и прямой при решении задач
8	Площадь треугольника
9	Теорема синусов
10	Теорема косинусов
11	Решение треугольников
12	Скалярное произведение векторов, скалярное произведение векторов в координатах
13	Свойства скалярного произведения векторов. Применение скалярного произведения векторов к решению задач
14	Правильный многоугольник. Окружность, описанная около правильного многоугольника. Окружность, вписанная в правильный многоугольник
15	Формулы для вычисления площади правильного многоугольника, его стороны и радиуса вписанной окружности. Построение правильных многоугольников
16	Длина окружности
17	Площади круга и кругового сектора
18	Понятие движения. Осевая и центральная симметрии
19	Параллельный перенос
20	Поворот

ЗАДАЧИ ДЛЯ УРОКА

§ 1. Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам

1.

1. На рисунке 1 $ABCD$ — трапеция, у которой $AB = CD = 4$, $BC = 2$, $AD = 5$. Найдите, если это возможно, такое число k , что:

1) $\overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{AD}$; 2) $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{DC}$.

2. В треугольнике ABC точка M — середина стороны BC , а E — середина отрезка AM . Разложите вектор $\overrightarrow{AE}$ по векторам $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$.

2.

1. На рисунке 2 $ABCD$ — трапеция, у которой $AC = BD = 15$, $BC = 7$, $AD = 20$. Найдите, если это возможно, такое число m , что:

1) $\overrightarrow{DA} = m\overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{AC} = m\overrightarrow{DB}$.

2. В треугольнике EMK точка P — середина стороны EK , а T — середина MK . Разложите вектор $\overrightarrow{MP}$ по векторам $\overrightarrow{ME} = \vec{m}$ и $\overrightarrow{MT} = \vec{n}$.

3.

1. В трапеции $ABCD$ AD и BC — основания. AC и BD пересекаются в точке O , причем $AO : OC = 3 : 1$. Найдите, если возможно, такое число k , что: 1) $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{CO} = k\overrightarrow{AO}$.

2. В параллелограмме $ABCD$ $M \in CD$ причем $CM : MD = 3 : 2$. Разложите вектор $\overrightarrow{DM}$ по векторам $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{DA} = \vec{b}$.

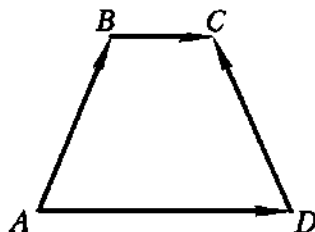


Рис. 1

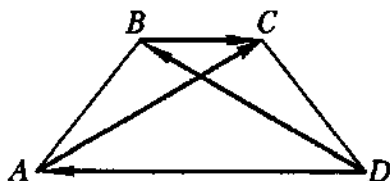


Рис. 2

4.

1. В треугольнике ABC медианы BE и CK пересекаются в точке O . Через точку O проведена прямая, параллельная AC и пересекающая стороны AB и BC точках P и T . Найдите, если возможно, такое число k , что: 1) $\overrightarrow{TP} = k\overrightarrow{AC}$; 2) $\overrightarrow{BO} = k\overrightarrow{OE}$.
2. В параллелограмме $ABCD$ $K \in AB$, причем $AK : KB = 4 : 3$. Разложите вектор $\overrightarrow{KB}$ по векторам $\overrightarrow{AD} = \vec{m}$ и $\overrightarrow{AC} = \vec{n}$.

5.

1. В треугольнике ABC $E \in BC$, причем $BE : EC = 3 : 5$. Разложите вектор $\overrightarrow{AE}$ по векторам $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$.
2. В треугольнике ABC $D \in AB$ и $E \in BC$, причем $\frac{BD}{DA} = \frac{BE}{EC} = \frac{3}{2}$. Используя векторы, докажите, что $DE \parallel AC$.

6.

1. В треугольнике MPO $K \in MP$, причем $MK : KP = 3 : 7$. Разложите вектор $\overrightarrow{OM}$ по векторам $\overrightarrow{OK} = \vec{m}$ и $\overrightarrow{OP} = \vec{n}$.
2. В параллелограмме $ABCD$ $E \in AB$, $P \in BC$, $T \in CD$, $M \in AD$, причем $AE : EB = AM : MD = 2 : 5$ и $BP : PC = DT : TC = 3 : 7$. Используя векторы, докажите, что $ME \parallel PT$.

7.

1. В треугольнике ABC $E \in BC$ и $D \in AC$, причем $\frac{BE}{EC} = \frac{4}{5}$ и $\frac{AD}{DC} = \frac{2}{3}$, AE пересекает BD в точке O . Найдите $\frac{BO}{OD}$. 2. В трапеции $ABCD$, где AD и BC — основания, $M \in AB$ и $N \in CD$, причем $MN \parallel AD$. Докажите, что если $BN \parallel MD$, то и $MC \parallel AN$.

8.

1. В треугольнике MET $A \in MT$, $B \in ET$, AE и MB пересекаются в точке O , причем $\frac{EO}{OA} = \frac{4}{3}$ и $\frac{MA}{AT} = \frac{2}{5}$. Найдите $\frac{EB}{BT}$.
2. В параллелограмме $ABCD$ $N \in AC$ и $M \in AD$, причем $AN : NC = 1 : 5$ и $AM : MD = 1 : 4$. Докажите, что точки B , N и M лежат на одной прямой.

§ 2. Координаты вектора

1.

- 1) Запишите координаты векторов: 1) $\vec{a} = 5\vec{i} - 4\vec{j}$; 2) $\vec{b} = -3\vec{j}$.
- 2) На рисунке 3 $OABC$ — квадрат, $OB = 2\sqrt{2}$. Разложите вектор $\vec{OB}$ по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$.
- 3) Даны два вектора $\vec{a}\{-2; 3\}$ и $\vec{b}\{1; 1\}$:
 - 1) Найдите координаты вектора $\vec{a} + \vec{b}$.
 - 2) Будут ли векторы $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{c}\{-2; 8\}$ коллинеарными?

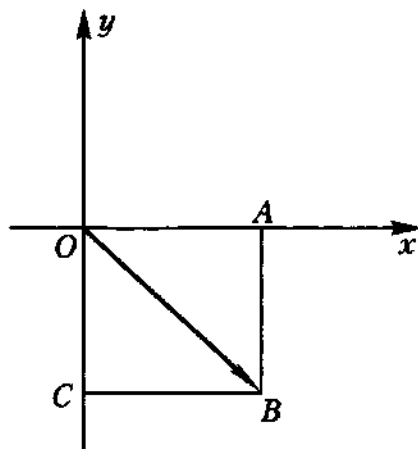


Рис. 3

2.

- 1) Запишите координаты векторов:
 - 1) $\vec{m} = -3\vec{i} + 7\vec{j}$; 2) $\vec{p} = -4\vec{i}$.
- 2) На рисунке 4 $OPT E$ — квадрат, $OT = 5\sqrt{2}$. Разложите вектор $\vec{OT}$ по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$.
- 3) Даны два вектора $\vec{p}\{-3; 4\}$ и $\vec{l}\{1; 2\}$.
 - 1) Найдите координаты вектора $\vec{p} - \vec{l}$.
 - 2) Будут ли векторы $\vec{p} - \vec{l}$ и $\vec{k}\{4; -2\}$ коллинеарными?

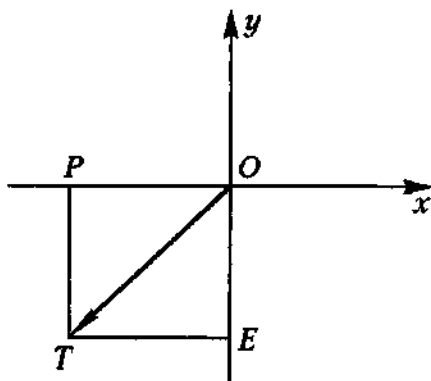


Рис. 4

3.

- Докажите, что лучи, задающие векторы $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$ и $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$, взаимно перпендикулярны.
- На рисунке 5 $OA = OB = 5$, $OM = 3$ ($AB \parallel O\alpha$). Разложите векторы $\vec{AB}$, $\vec{OB}$ и $\vec{OA}$ по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$.
- Даны два вектора $\vec{a}\{-2; 4\}$ и $\vec{b}\{1; 3\}$.
 - Найдите координаты вектора $\vec{m} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$.
 - Сонаправлены или противоположно направлены векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}\{-14; -2\}$?

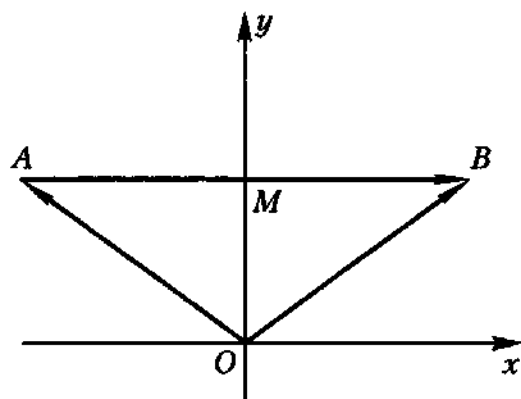


Рис. 5

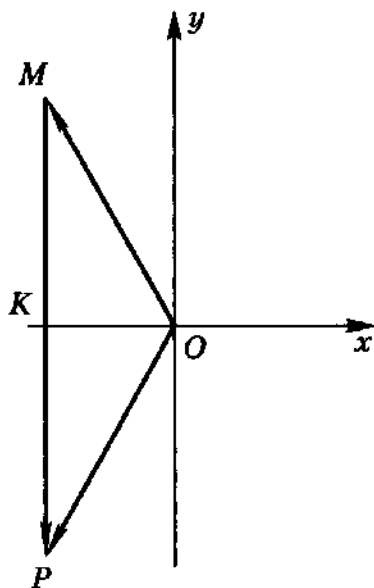


Рис. 6

4.

- Докажите, что лучи, задающие векторы $\vec{m} = -\vec{i} + \vec{j}$ и $\vec{n} = \vec{i} + \vec{j}$, взаимно перпендикулярны.
- На рисунке 6 $OM = OP = 17$, $OK = 8$ ($MP \parallel OY$). Разложите векторы $\vec{MP}$, $\vec{OM}$ и $\vec{OP}$ по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$.
- Даны два вектора $\vec{l}\{3; -2\}$ и $\vec{p}\{-4; 1\}$.
 - Найдите координаты вектора $\vec{a} = 3\vec{l} - 2\vec{p}$.
 - Сонаправлены или противоположно направлены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}\{-34; 16\}$?

5.

1. $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j}$. Постройте вектор, равный сумме векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Какие координаты имеет этот вектор?
2. На рисунке 7 треугольник OAB равносторонний со стороной, равной a . Разложите векторы $\vec{OM}$ и $\vec{BN}$ по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$, если M и N — середины сторон AB и OA .
3. $\vec{a} \{-1; 5\}$, $\vec{b} \{m; 2\}$. При каких значениях m эти векторы будут коллинеарными?

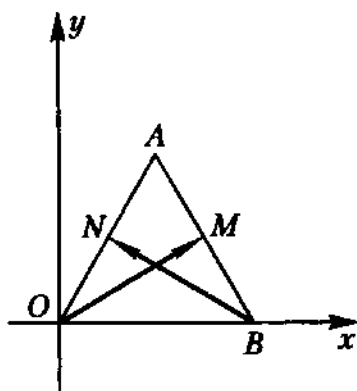


Рис. 7

6.

1. $\vec{m} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$, $\vec{n} = -5\vec{i} + 6\vec{j}$. Постройте вектор, равный разности векторов $\vec{m}$ и $\vec{n}$. Какие координаты имеет этот вектор?
2. На рисунке 8 треугольник OAB равносторонний со стороной, равной m . Разложите векторы $\vec{AE}$ и $\vec{BF}$ по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$, если F и E — середины сторон OA и OB .

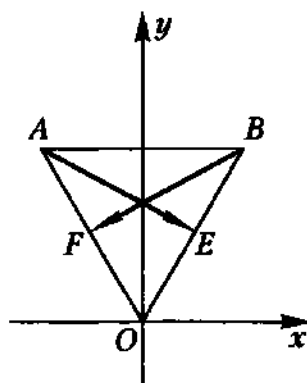


Рис. 8

3. $\vec{a} \{4; -3\}$, $\vec{b} \{m; 0\}$. При каких значениях m векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны?

7.

1. Даны три вектора $\vec{a}\{3; -1\}$, $\vec{b}\{1; -2\}$ и $\vec{c}\{-1; 7\}$. Найдите разложение вектора $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
2. На рисунке 9 $AM = 5$, $MB = 12$. Разложите вектор $\overrightarrow{AM}$ по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$.

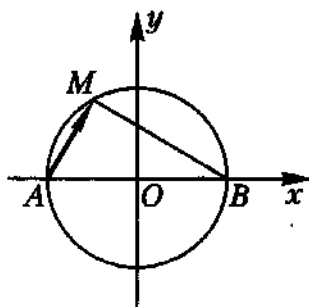


Рис. 9

3. Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ заданы своими координатами: $\overrightarrow{AB}\{3; 4\}$, $\overrightarrow{CD}\{-2; 1\}$. Найдите координаты вектора $-\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{DC}$.

8.

1. Даны три вектора $\vec{m}\{-1; 2\}$, $\vec{p}\{4; -2\}$ и $\vec{t}\{2; -3\}$. Разложите вектор $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{t}$ по векторам $\vec{m}$ и $\vec{p}$.
2. На рисунке 10 $AB = BC = 5$, $AC = 6$, $AF \perp BC$. Разложите вектор $\overrightarrow{KA}$ по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$.

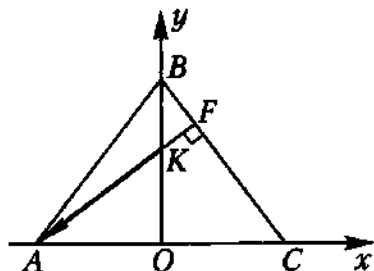


Рис. 10

3. Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ заданы своими координатами $\overrightarrow{AB}\{2; -1\}$ и $\overrightarrow{CD}\{3; 1\}$. Найдите координаты вектора $2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC}$.

§ 3. Связь между координатами вектора и координатами его начала и конца.

Простейшие задачи в координатах

1.

1. Точка A лежит на положительной полуоси Oy , а точка C — на положительной полуоси Ox .
 - 1) Найдите координаты вершин трапеции $OABC$, если $OA = AB = 3$, $OC = 5$.
 - 2) Каковы координаты середин диагоналей трапеции?
 - 3) Чему равно расстояние между этими серединами?
2. $\vec{a} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$, $\vec{b} = -3\vec{i} + \vec{j}$. Найдите $|\vec{a} + \vec{b}|$.

2.

1. Точка A лежит на положительной полуоси Oy , а точка C — на отрицательной полуоси Ox .
 - 1) Найдите координаты вершин трапеции $OABC$, если $OA = 4$, $OC = 2$, $AB = 8$.
 - 2) Каковы координаты середин диагоналей трапеции?
 - 3) Чему равно расстояние между этими серединами?
2. $\vec{m} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{n} = 3\vec{i} + 5\vec{j}$. Найдите $|\vec{m} - \vec{n}|$.

3.

1. На рисунке 11 $OA = 5$, $OB = 4\sqrt{2}$. Луч OB составляет с положительным направлением оси Ox угол 45° . Точка A удалена от оси Ox на расстояние, равное 3.
 - 1) Найдите координаты точек A и B .
 - 2) Найдите длину отрезка AB .
 - 3) Найдите длину медианы треугольника AOB , проведенной из вершины O .
2. Даны точки $A(-1; 3)$ и $B(1; 1)$. На оси Ox найдите точку, удаленную от точки A на расстояние, в два раза большее, чем до точки B .

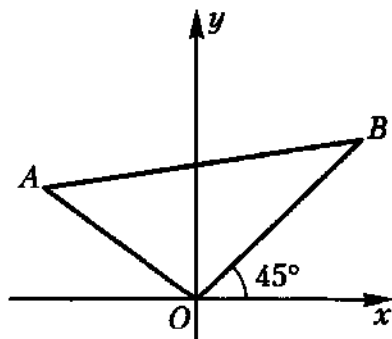


Рис. 11

4.

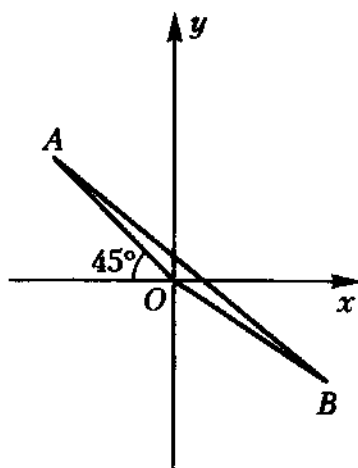


Рис. 12

1. На рисунке 12 $OA = 8\sqrt{2}$, $OB = 10$. Луч OA составляет с отрицательным направлением оси Ox угол 45° , а точка B удалена от оси Oy на расстояние, равное 8.

1) Найдите координаты точек A и B .

2) Найдите длину отрезка AB .

3) Найдите длину медианы треугольника AOB , проведенную из вершины O .

2. Даны точки $M(3; -1)$ и $P(8; 2)$. На оси Oy найдите точку, удаленную от точки M на расстояние, в два раза меньшее, чем до точки P .

5.

1. Даны точки $A(2; 3)$, $B(5; 5)$, $C(8; 3)$ и $D(5; 1)$. Докажите, что отрезки AC и BD пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

2. Треугольник F задан координатами своих вершин: $A(1; 3)$, $B(-1; 1)$, $C(2; 2)$. Определите вид треугольника. Найдите координаты центра описанной вокруг треугольника окружности и ее радиус.

6.

1. Даны точки $A(-4; -6)$, $B(2; 8)$, $C(16; 14)$ и $D(10; 0)$. Докажите, что отрезки AC и BD пересекаются и взаимно перпендикулярны.

2. Треугольник задан координатами своих вершин $A(1; 0)$, $B(2; 1)$, $C\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)$. Найдите радиус описанной вокруг треугольника окружности.

7.

1. Точки A и B имеют координаты $A(1; 2)$, $B(7; 10)$. Найдите координаты точки C , делящей отрезок AB в отношении $1 : 3$, считая от точки A .
2. Лежат ли точки $A(-3; 2)$, $B(2; 2)$ и $C(2; 14)$ на одной прямой?
3. Найдите координаты единичного вектора $\vec{e}$ ($|\vec{e}| = 1$), сонаправленного с вектором $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$.

8.

1. Точка M делит отрезок PK в отношении $3 : 1$, считая от точки P . Найдите координаты точки P , если заданы координаты точек M и K : $M(2; -4)$, $K(3; 5)$.
2. Лежат ли точки $M(1; -2)$, $N(3; -5)$ и $P(5; -8)$ на одной прямой?
3. Найдите координаты единичного вектора $\vec{e}$ ($|\vec{e}| = 1$), противоположно направленного вектору $\vec{m} = 5\vec{i} - 12\vec{j}$.

§ 4. Применение метода координат к решению задач

1.

В треугольнике ABC проведена высота BH . Найдите длину медианы, проведенной из вершины A , если $\angle ABH = 45^\circ$, $BH = 6$, $HC = 8$.

2.

В треугольнике MKP с углом M , равным 45° , высота KH делит сторону MP на отрезки, длины которых 4 и 6, считая от вершины M . Найдите длину медианы, проведенной из вершины M .

3.

В треугольнике ABC $AB = 4$, $AC = 6$, $\angle A = 60^\circ$. Найдите медиану, проведенную из вершины A .

4.

В треугольнике KHP $KH = 8\sqrt{2}$, $KP = 18$, $\angle K = 45^\circ$. Найдите медиану, проведенную из вершины K .

5.

В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$), $AC = 3$, $AB = 5$, AM — биссектриса угла CAB . Найдите длину медианы ME треугольника AMB .

6.

В прямоугольной трапеции $ABCD$ AD и BC — основания, $\angle BAD = 90^\circ$, $AB = AD = 4$, AC пересекает BD в точке O , причем $BO : OD = 1 : 3$. Найдите длину медианы CE треугольника BCD .

7.

Докажите методом координат, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2 : 1, считая от вершин треугольника.

8.

Дан прямоугольник $ABCD$ и точка M . Докажите, что равенство $MB^2 + MD^2 = MA^2 + MC^2$ не зависит от положения точки M .

§ 5. Уравнение окружности

1.

1. Окружность задана уравнением $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 20$.

1) Найдите координаты центра этой окружности и ее радиус.

2) Проходит ли эта окружность через начало координат?

3) На рисунке 13 окружность касается осей координат, $OO_1 = 2\sqrt{2}$. Напишите уравнение этой окружности.

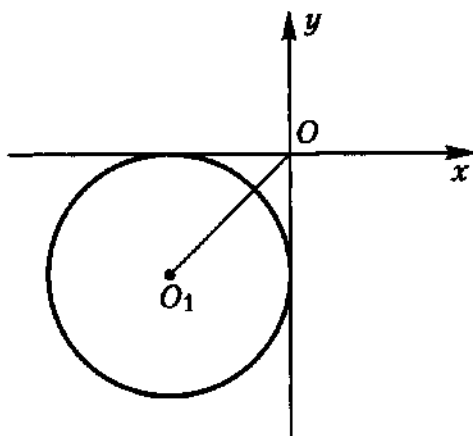


Рис. 13

2.

1. Окружность задана уравнением $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 40$.

1) Найдите координаты центра этой окружности и ее радиус.

2) Пересекает ли эта окружность ось Ox в точке $(5; 0)$?

2. На рисунке 14 окружность касается осей координат, $OO_1 = 3\sqrt{2}$. Напишите уравнение этой окружности.

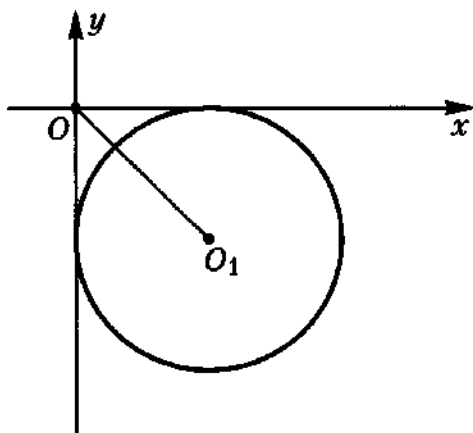


Рис. 14

3.

- Окружность задана уравнением $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$. Докажите, что отрезок AB , где $A(-1; 6)$ и $B(-1; -2)$, является диаметром этой окружности.
- На рисунке 15 окружность касается оси Ox в точке F , а луча OM — в точке E ; $\angle FO_1E = 120^\circ$, $OO_1 = 2\sqrt{3}$. Напишите уравнение этой окружности.

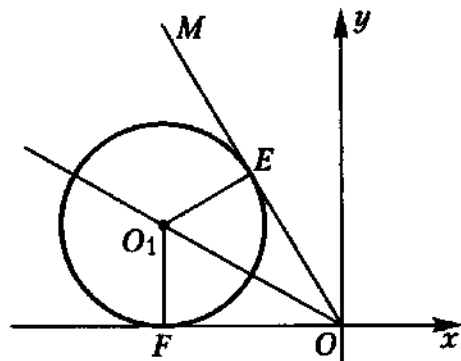


Рис. 15

4.

- Окружность задана уравнением $(x + 3)^2 + y^2 = 9$. Является ли отрезок MN , где $M(-1; \sqrt{5})$ и $N(-5; -\sqrt{5})$, диаметром этой окружности?
- На рисунке 16 окружность касается оси Oy в точке K , а луча OE — в точке P , $\angle KOP = 60^\circ$, $KP = 2\sqrt{3}$. Напишите уравнение этой окружности.

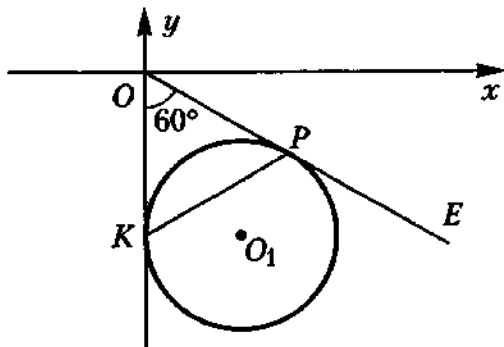


Рис. 16

5.

1. Докажите, что линия, заданная уравнением $x^2 - 8x + y^2 + 15 = 0$, есть окружность. Каково взаимное положение этой окружности и окружности $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$.
2. В прямоугольной системе координат треугольник ABC задан координатами своих вершин: $A(-4; -1)$, $B(0; 2)$, $C(4; -1)$. Напишите уравнение окружности, вписанной в этот треугольник.

6.

1. Докажите, что линия, заданная уравнением $x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0$, есть окружность. Каково взаимное положение этой окружности и окружности $(x - 4)^2 + y^2 = 9$?
2. В прямоугольной системе координат треугольник ABC задан координатами своих вершин. $A(1; 3)$, $B(1; -3)$, $C(-3; 0)$. Напишите уравнение окружности, описанной около этого треугольника.

7.

1. В квадрат вписана окружность. Докажите, что сумма квадратов расстояний от любой точки окружности до вершин квадрата есть величина постоянная.
2. Дана окружность $x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$ и точка $C(5; 4)$. Напишите уравнение окружности, имеющей центр в данной точке и касающейся данной окружности внешним образом.

8.

1. Около квадрата описана окружность. Докажите, что сумма квадратов расстояний от точки окружности до вершин квадрата не зависит от выбора точки на окружности.
2. Дана окружность $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 11 = 0$ и точка $M(3; 1)$. Напишите уравнение окружности, имеющей центр в данной точке и касающейся данной окружности внутренним образом.

§ 6. Уравнение прямой

1.

1. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $A(9; 3)$ и перпендикулярной оси Ox .
2. Треугольник задан координатами своих вершин: $A(2; -6)$, $B(4; 2)$ и $C(0; -4)$. Напишите уравнение прямой, содержащей среднюю линию треугольника, которая параллельна стороне AC .

2.

1. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $B(-3; 10)$ и перпендикулярной оси Oy .
2. В треугольнике ABC PK — средняя линия треугольника, параллельная AB , $P(2; 3)$, $K(-1, 2)$ и $C(0; 0)$. Напишите уравнение прямой, содержащей сторону AB .

3.

1. Даны три последовательные вершины параллелограмма $ABCD$. $A(2; 2)$, $B(4; 8)$ и $C(-6; 10)$. Напишите уравнение прямой AD .
2. Найдите площадь треугольника, ограниченного прямыми $y + x = 0$, $y - x + 6 = 0$ и осью Ox .

4.

1. Даны три последовательных вершины параллелограмма $MPKT$. $M(-1; 2)$, $P(3; 1)$ и $K(1; -2)$. Напишите уравнение прямой PT .
2. Найдите площадь треугольника, ограниченного прямыми $y - x - 4 = 0$, $y + x = 0$ и осью ординат.

5.

1. Составьте уравнение прямой, если точка $C(3; 4)$ служит основанием перпендикуляра, проведенного из начала координат на эту прямую.
2. Найдите площадь треугольника, ограниченного прямыми $y - x = 0$, $y + x = 0$ и $y - 2x + 4 = 0$.

6.

1. Прямая $y + 2x - 1 = 0$ пересекает ось Oy в точке A . Напишите уравнение прямой, проходящей через точку A и перпендикулярной к данной прямой.
2. Найдите площадь треугольника, ограниченного прямыми $y + x = 0$, $y + 2x - 4 = 0$ и $y - 3x - 4 = 0$.

7.

1. При каких значениях k прямая $y - kx - 5 = 0$ удалена от начала координат на расстояние, равное 3?
2. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC , $A(-1; 2)$, $B(2; 3)$ и $M(1; 2)$. Напишите уравнение прямой AC и найдите координаты вершины C .

8.

1. Прямая $y - tx - 4 = 0$ пересекает оси координат в точках A и B . При каких значениях t длина медианы OE треугольника AOB равна 7?
2. Даны вершины треугольника ABC : $A(4; 6)$, $B(-4; 0)$, $C(-1; -4)$. Составьте уравнение биссектрисы угла B .

§ 7. Использование уравнений окружности и прямой при решении задач

1.

1. Выясните взаимное положение прямой $x = 19$ и окружности $(x - 7)^2 + (y + 6)^2 = 81$.
2. Найдите множество точек, удаленных от окружности $x^2 + y^2 = 16$ на расстояние, равное 3.

2.

1. Выясните взаимное положение прямой $y = 20$ и окружности $(x - 5)^2 + (y - 10)^2 = 100$.
2. Даны две точки $A(2; 0)$ и $B(6; 0)$. Найдите множество всех таких точек M , для которых $MA = MB$.

3.

1. Выясните взаимное положение прямой $x + y - 3 = 0$ и окружности $x^2 + y^2 = 4$.
2. Даны точки $A(0; 0)$ и $B(0; 2)$. Найдите множество таких точек M , что $MB = 2MA$.

4.

1. Выясните взаимное положение прямой $y - x - 4 = 0$ и окружности $x^2 + y^2 = 8$.
2. Даны точки $A(-1; 2)$ и $B(2; -2)$. Найдите множество точек M таких, что $MA = MB$.

5.

1. Прямая $2y + x - 4 = 0$ пересекает окружность $x^2 + y^2 = 5$. Найдите длину хорды, которая отсекается этой окружностью на прямой.
2. Даны две точки A и B , расстояние между которыми равно 4. Найдите множество всех точек M , для которых $MA^2 + MB^2 = 10$.

6.

1. На прямой $4y + 3x - 12 = 0$ окружность с центром в начале координат отсекает хорду, длина которой равна 2. Напишите уравнение этой окружности.
2. Даны две точки A и B , расстояние между которыми равно 4. Найдите множество точек M , для которых $MA^2 - MB^2 = 4$.

7.

1. Составьте уравнение окружности, если ее центр находится в точке $C(5; 4)$ и окружность отсекает от прямой $x + 2y - 3 = 0$ хорду, длина которой равна 8.
2. Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами a и b ($\angle C = 90^\circ$). Найдите множество точек M , для которых $MA^2 + MB^2 = 2MC^2$.

8.

1. Прямая $y + 2x - 4 = 0$ пересекает окружность $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 16$. Найдите длину хорды, которая отсекается этой окружностью от прямой.
2. Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами a и b ($\angle C = 90^\circ$). Найдите множество точек M , для которых $MA^2 - MB^2 = 2MC^2$.

§ 8. Площадь треугольника

1.

1. Найдите площадь равнобедренного треугольника, если его боковая сторона равна 2 см, а угол при основании 15° .
2. Найдите сторону ромба, если его площадь равна $8\sqrt{2}$ см², а угол равен 45° .

2.

1. В треугольнике ABC $\angle ABC = 120^\circ$, $AB = 6$. Площадь треугольника равна $6\sqrt{3}$. Найдите BC .
2. В параллелограмме $ABCD$ $BC = 3\sqrt{3}$ см, $\angle BAD = 30^\circ$, $BD = BC$. Найдите площадь параллелограмма.

3.

1. В треугольнике ABC $AB = 3$, $BC = 4$, BD — биссектриса, $\angle ABD = \alpha$. Найдите площадь треугольника ABD .
2. Найдите площадь параллелограмма, если его диагонали равны 10 см и 8 см и угол между ними равен 60° .

4.

1. В треугольнике ABC $AC = 8$, $BC = 6$, $\angle C = \alpha$, AA_1 и BB_1 — медианы треугольника. Они пересекаются в точке O . Найдите площадь треугольника AOB_1 .
2. Диагонали параллелограмма равны 6 см и 10 см, а угол между ними — 45° . Найдите площадь параллелограмма.

5.

1. В треугольнике ABC AA_1 и CC_1 — медианы. Они пересекаются в точке O . $AA_1 = 9$ см, $CC_1 = 12$ см, $\angle AOC = 120^\circ$. Найдите площадь треугольника.
2. Трапеция $ABCD$ (AD и BC — основания) вписана в окружность так, что основание AD — диаметр окружности. Диагональ трапеции равна 10 см, а ее площадь — 25 см². Найдите углы трапеции.

6.

1. В треугольнике ABC AA_1 и CC_1 — медианы, они пересекаются в точке O , $AA_1 = \frac{9}{2}$, $CC_1 = 6$. Площадь треугольника ABC равна 9. Найдите $\angle AOC$.
2. В равнобедренной трапеции $ABCD$ (AD и BC — основания) $AD = m$, $BD \perp AB$, $\angle BAD = \alpha$. Найдите площадь трапеции.

7.

1. В четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O . $S_{BOC} = 20 \text{ см}^2$, $S_{COD} = 40 \text{ см}^2$, $S_{AOD} = 60 \text{ см}^2$, $AB = 12 \text{ см}$, $OA = 10 \text{ см}$, $\angle AOB > 31^\circ$. Найдите $\angle BAO$.
2. В треугольнике ABC $AB = a$, $BC = b$, $\angle ABC = \alpha$. Точка D лежит на стороне AC , $\angle ABC = \beta$. Найдите BD .

8.

1. В четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O . $S_{BOC} = 30 \text{ см}^2$, $S_{COD} = 60 \text{ см}^2$, $S_{AOD} = 90 \text{ см}^2$, $OA = 10 \text{ см}$, $OB = 9\sqrt{2} \text{ см}$, $\angle BAO + \angle AOB < 46^\circ$. Найдите $\angle AOB$.
2. В треугольнике ABC точка D лежит на стороне AC , $BD = m$, $BC = n$, $\angle ABD = \alpha$, $\angle DBC = \beta$. Найдите длину стороны AB .

§ 9. Теорема синусов

1.

1. В треугольнике ABC $\angle A = 45^\circ$, $\angle C = 15^\circ$, $BC = 4\sqrt{6}$. Найдите AC .
2. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) $\angle A = \alpha$, $AC = b$, AE — биссектриса. Найдите AE .

2.

1. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) CD — биссектриса, $\angle A = 15^\circ$, $AC = \sqrt{3}$. Найдите AD .
2. В остроугольном треугольнике ABC $BD \perp AC$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $BD = h$. Найдите AC .

3.

1. В параллелограмме $ABCD$ диагональ AC разбивает угол A на два угла: α и β ; $AC = d$. Найдите площадь параллелограмма.
2. В треугольнике ABC $\angle A = 10^\circ$, $\angle C = 20^\circ$, $AC = 10$ см. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

4.

1. В равнобедренной трапеции $ABCD$ (AD и BC — основания), $\angle BCA = \beta$, $\angle CDA = \alpha$, $AD = m$. Найдите площадь трапеции.
2. Треугольник ABC вписан в окружность, радиус которой равен $2\sqrt{3}$, $\angle A = 80^\circ$, $\angle C = 40^\circ$. Найдите AC .

5.

1. В треугольнике ABC $\angle A = \alpha$, $\angle C = \gamma$. Точка D лежит на стороне BC , $\angle DAC = \beta$. Найдите отношение площадей треугольников ABD и ADC .
2. В треугольнике ABC $AB = 5$, $BC = 9$, $BE \perp AC$, $BE = 3$ ($A - E - C$). Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC .

6.

1. В треугольнике ABC $AB = BC$, BD — высота. Через середину высоты проведена прямая, пересекающая стороны AB и BC в точках E и F соответственно. Найдите EF , если $BD = h$, $\angle ABC = \beta$ и $\angle BEF = \alpha$.
2. Треугольник ABC вписан в окружность, радиус которой равен 5, $BD \perp AC$ ($A - D - C$), $AB = 5$, $AD = 3$. Найдите BC .

7.

1. Из вершины A равностороннего треугольника ABC проведен луч, пересекающий сторону BC и на нем выбрана некоторая точка M , $\angle AMB = 20^\circ$, $\angle AMC = 30^\circ$. Найдите $\angle MAB$.
2. Найдите площадь трапеции, если ее основания равны m и n , а прилежащие к основанию m углы равны α и β .

8.

1. Угол при вершине B , противолежащий основанию AC равнобедренного треугольника ABC , равен 20° . На стороне AB выбрана точка D так, что $\angle ACD = 50^\circ$, а на стороне BC — точка F так, что $\angle FAC = 60^\circ$. Найдите $\angle AFD$.
2. Около треугольника ABC описана окружность, $BC = a$, $\angle B = \alpha$, $\angle C = \beta$. Биссектриса угла A пересекает окружность в точке K . Найдите AK .

§10. Теорема косинусов

1.

1. Найдите сторону треугольника, лежащую против угла в 120° , если две другие стороны равны 6 см и 10 см.
2. Остроугольным, прямоугольным или тупоугольным является треугольник, стороны которого равны 3, 5, 7?

2.

1. Найдите сторону треугольника, лежащую против угла в 135° , если две другие стороны равны $2\sqrt{2}$ см и 3 см.
2. Остроугольным, прямоугольным или тупоугольным является треугольник, стороны которого равны 4, 5, 6?

3.

1. В равнобедренном треугольнике ABC угол при вершине B равен 120° , $AC = 2\sqrt{21}$. Найдите длину медианы AM .
2. Стороны треугольника равны 5, 7 и 8. Найдите угол, лежащий против средней по величине стороны.

4.

1. В параллелограмме $ABCD$ $AD = 2$, $\angle BAD = 60^\circ$, $BE \perp AD$, $BE = 2\sqrt{3}$. Найдите длину большей диагонали параллелограмма.
2. Стороны треугольника равны 3, 5 и 7. Найдите наибольший угол треугольника.

5.

1. В треугольнике ABC $AB = 4$, $BC = 5$. Площадь треугольника равна $5\sqrt{3}$. Найдите высоту, опущенную из вершины B , если $\cos \angle ABC < 0$.
2. Стороны треугольника равны 13, 14 и 15. Найдите радиус описанной около треугольника окружности.

6.

1. В треугольнике ABC $AB = 4\sqrt{3}$, $BC = 3$. Площадь треугольника равна $3\sqrt{3}$. Найдите радиус описанной около треугольника окружности, если ее центр лежит внутри треугольника.
2. Стороны треугольника равны 25, 39, 56. Найдите высоту, опущенную на большую сторону.

7.

1. Пусть CD — диаметр окружности с центром в точке O и AB — параллельная этому диаметру хорда. На диаметре CD выбрана точка M . Докажите, что сумма $MA^2 + MB^2$ не зависит от положения хорды AB .
2. Докажите, что в любом треугольнике углы A , B и C связаны соответственно соотношением:

$$\cos^2 A = \cos^2 C + \sin^2 B - 2\sin A \sin B \cos C.$$

8.

1. Дан угол BAC . Внутри него выбрана точка M , удаленная от сторон угла на расстояния a и b . Найдите AM , если $\angle BAC = \alpha$.
2. Докажите, что в любом треугольнике углы A , B и C связаны соответственно соотношением:

$$2 \sin A \sin B \cos C - 1 = \cos^2 C - \cos^2 A - \cos^2 B.$$

§ 11. Решение треугольников

1.

1. В треугольнике ABC $b = 0,3$; $\angle A = 32^\circ$; $\angle B = 70^\circ$. Найдите неизвестные элементы треугольника.
2. В треугольнике ABC $a = 28$, $b = 35$, $c = 42$. Найдите угол, лежащий против меньшей стороны.

2.

1. В треугольнике ABC $b = 18$; $c = 12$; $\angle A = 50^\circ$. Найдите неизвестные элементы треугольника.
2. В треугольнике EKP $EP = 0,75$; $\angle P = 40^\circ$, $\angle K = 25^\circ$. Найдите PK .

3.

1. В треугольнике ABC $\angle A = 25^\circ 30'$; $b = 10,8$; $BE \perp AC$; $BE = 7,6$. Найдите неизвестные элементы треугольника.
2. В треугольнике ABC $\angle A = 52^\circ$, $\angle B = 70^\circ$. Радиус описанной около треугольника окружности равен 7. Найдите площадь треугольника.

4.

1. В треугольнике ABC $a = 3,9$, $b = 4,1$, $c = 2,8$. Найдите неизвестные элементы треугольника.
2. В треугольнике ABC $a = 20$, $b = 48$. Радиус описанной около треугольника окружности равен 25. Найдите площадь треугольника.

5.

1. В треугольнике ABC $a + b = 21$, $\angle A = 64^\circ$, $\angle B = 50^\circ$. Найдите неизвестные элементы треугольника.
2. В треугольнике ABC $BC = 3,4$, $\angle ABC = 130^\circ$. Площадь треугольника равна 3,6. Найдите AC .

6.

1. В треугольнике ABC $a - b = 0,85$, $\angle A = 112^\circ$, $\angle B = 36^\circ$. Найдите неизвестные элементы треугольника.
2. В треугольнике ABC $AB = 2,1$, $BC = 3,2$, $\angle ABC = 53^\circ$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника.

7.

1. В параллелограмме $ABCD$ $AB = 27,1$, $AC = 34,5$, $\angle CAD = 36^\circ 15'$.
Найдите периметр параллелограмма.
2. В четырехугольнике $ABCD$ $AB = 3$, $BC = 5$, $CD = 6$, $AD = 4$, $AC = 7$.
Диагонали пересекаются в точке O . Найдите $\angle AOB$.

8.

1. В параллелограмме $ABCD$ $AC = 28,3$, $CD = 25,7$, $\angle BCA = 55^\circ 30'$.
Найдите площадь параллелограмма.
2. $ABCD$ — выпуклая ломаная линия. $AB = 4$, $BC = 5$, $CD = 7$,
 $\angle ABC = 110^\circ$, $\angle BCD = 140^\circ$. Найдите расстояние между точками A и D .

§ 12. Скалярное произведение векторов, скалярное произведение векторов в координатах

1.

1. В квадрате $ABCD$ сторона равна 1. Диагонали пересекаются в точке O . Найдите скалярные произведения:
1) $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BO}$; 2) $\overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{DO}$; 3) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DB}$.
2. Используя микрокалькулятор, найдите угол между векторами $\vec{a}$ и $3\vec{b}$, если $\vec{a} \{-1; 3\}$, $\vec{b} \{2; 1\}$.

2.

1. Сторона равностороннего треугольника ABC равна 1, MN — средняя линия ($MN \parallel AC$). Найдите скалярные произведения:
1) $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{CA}$; 2) $\overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{CB}$; 3) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$.
2. Используя микрокалькулятор, найдите угол между векторами $\vec{m}$ и $-\frac{1}{2}\vec{n}$, если $\vec{m} (3; -1)$, $\vec{n} (2; 4)$.

3.

1. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) BD — медиана, $E \in BD$, $AC = 8$, $BD = 3$. Найдите скалярные произведения:
1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; 2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$; 3) $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CA}$.
2. Прямая задана двумя точками $A (4; -7)$ и $B (-2; 3)$. Используя микрокалькулятор, найдите угол между прямой AB и положительным направлением оси Ox .

4.

1. Сторона ромба $ABCD$ равна 10, диагональ AC равна 16, $F \in AC$, $K \in BD$. Найдите скалярные произведения:
1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; 2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$; 3) $\overrightarrow{KD} \cdot \overrightarrow{FC}$.
2. Прямая задана двумя точками $P (-4; 6)$ и $T (2; -3)$. Используя микрокалькулятор, найдите угол между прямой PT и положительным направлением оси Oy .

5.

1. В прямоугольной трапеции $ABCD$ (AD и BC — основания) $\angle A = 90^\circ$, $AD = 6$, $BC = 2$, $AB = 3$. Найдите скалярные произведения:

1) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD}$; 2) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC}$; 3) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DA}$.

2. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$), $A(x; 3)$, $B(1; 1)$ и $C(-2; 4)$. Используя микрокалькулятор, найдите угол между медианой CE и гипотенузой AB .

6.

1. В равнобедренной трапеции $ABCD$ основания AD и BC соответственно равны 15 и 5, $CD = 13$, $CE \perp AD$. Найдите скалярные произведения:

1) $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DA}$; 2) $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{AB}$; 3) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD}$.

2. В четырехугольнике $ABCD$ $A(1; -3)$, $B(x; -1)$, $C(2; 1)$, $D(1; 2)$, $AC \perp BD$, M — середина AB . Используя микрокалькулятор, найдите угол между прямыми DM и DA .

7.

1. В прямоугольной трапеции $ABCD$ $\angle A = 90^\circ$, AD и BC — основания, $AD = 5$, $BC = 3$. Найдите $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AB}$.
2. В треугольнике ABC $A(3; 2)$, $B(4; 5)$ и $C(7; 10)$. Найдите высоту, опущенную из вершины A .

8.

1. В равнобедренной трапеции $ABCD$ AD и BC — основания. Найдите $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AB}$, если разность оснований равна m .
2. Четырехугольник $ABCD$ задан координатами своих вершин $A(-1; 2)$, $B(1; -2)$, $C(2; 0)$ и $D(1; 6)$. Докажите, что $ABCD$ — трапеция, и найдите ее высоту.

§ 13. Свойства скалярного произведения векторов. Применение скалярного произведения векторов к решению задач

1.

1. $|\vec{a}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 4$, $\vec{a} \wedge \vec{b} = 135^\circ$. Найдите $|\vec{a} + 2\vec{b}|$.
2. $ABCD$ — квадрат, F — середина CD , а E — середина AD . Используя векторы, докажите, что $BE \perp AF$.

2.

1. $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 2$, $\vec{a} \wedge \vec{b} = 150^\circ$. Найдите $|2\vec{a} - \vec{b}|$.
2. В прямоугольнике $ABCD$ $AD = \frac{1}{2}AB$, $E \in CD$, причем $DE = \frac{1}{4}DC$. Используя векторы, докажите, что $BD \perp AE$.

3.

1. Используя микрокалькулятор, найдите угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{a} + \vec{b}$, если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$ и $\vec{a} \wedge \vec{b} = 60^\circ$.
2. В треугольнике ABC $AB = 2$, $AC = 3\sqrt{2}$, $\angle BAC = 45^\circ$. Найдите длину медианы AD .

4.

1. Используя микрокалькулятор, найдите угол между векторами $\vec{m}$ и $\vec{m} - \vec{n}$, если $|\vec{m}| = 3$, $|\vec{n}| = 2$ и $\vec{m} \wedge \vec{n} = 120^\circ$.
2. В треугольнике EFK $FE = 2$, $FK = 3\sqrt{2}$, $\angle EFK = 135^\circ$. Найдите длину медианы FM .

5.

1. В треугольнике ABC AD , BE и CF — медианы. Вычислите $\vec{BC} \cdot \vec{AD} + \vec{CA} \cdot \vec{BE} + \vec{AB} \cdot \vec{CF}$.
2. В треугольнике ABC CD — медиана, причем $CD^2 > \frac{1}{4}AB^2$. Докажите, что $\angle C$ — острый.

6.

1. Даны три точки, для которых $AC^2 + BC^2 = \frac{1}{2}AB^2$. Докажите, что $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$.
2. В треугольнике ABC $BC > AC$, CD — медиана. Докажите, что $\angle BDC$ — тупой.

7.

1. $ABCD$ — прямоугольник. Докажите, что $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$, где M — произвольная точка плоскости.
2. Диагонали прямоугольной трапеции взаимно перпендикулярны. Докажите, что высота трапеции есть среднее пропорциональное между ее основаниями.

8.

1. Докажите, что в трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD выполняется равенство: $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 + 2AB \cdot DC$.
2. В треугольнике ABC $\angle B = 60^\circ$, AD — медиана, $E \in AC$, причем $CE : EA = 1 : 3$, $AD \perp BE$, $AB = 2$. Найдите BC .

§ 14. Правильный многоугольник. Окружность, описанная около правильного многоугольника. Окружность, вписанная в правильный многоугольник

1.

1. Найдите углы правильного двадцатиугольника.
2. Меньшая диагональ правильного шестиугольника равна a . Найдите сторону шестиугольника и его большую диагональ.

2.

1. Угол правильного многоугольника равен 144° . Найдите число его сторон.
2. Сторона правильного шестиугольника равна b , Найдите его диагонали.

3.

1. Вокруг правильного многоугольника описана окружность, радиус которой равен R . Стороны многоугольника удалены от его центра на расстояние, равное $\frac{R}{2}$. Чему равно число сторон этого многоугольника?
2. Докажите, что в правильном пятиугольнике $ABCDE$ диагонали AC и AD делят угол BAE на три равные части.

4.

1. Вокруг правильного многоугольника описана окружность, радиус которой равен R . Сторона этого многоугольника удалена от центра окружности на расстояние, равное $\frac{R\sqrt{3}}{2}$. Чему равно число сторон этого многоугольника?
2. Докажите, что произведения отрезков двух пересекающихся диагоналей правильного многоугольника равны между собой.

5.

1. $ABCDEF$ — правильный шестиугольник. Площадь треугольника ABC равна 12 см^2 . Найдите площадь шестиугольника.
2. Сторона правильного пятиугольника $ABCDE$ равна 2. Диагонали AD и BE пересекаются в точке O . Найдите AO .

6.

1. Площадь правильного шестиугольника $ABCDEF$ равна 144 см^2 . Найдите площадь треугольника ABC .
2. В правильном пятиугольнике $ABCDE$ диагонали AC и BE пересекаются в точке O , $BO = 2$. Найдите сторону пятиугольника.

7.

1. Какими равными правильными многоугольниками можно покрыть плоскость без просветов?
2. От каждой вершины квадрата на его сторонах отложены отрезки, равные половине его диагонали. Полученные восемь точек последовательно соединены отрезками. Определите вид полученного восьмиугольника.

8.

1. Можно ли покрыть плоскость без просвета правильными четырехугольниками и восьмиугольниками? Если да, то в каком-то из возможных случаев найдите отношение их сторон.
2. Прямоугольник пересечен двумя парами параллельных прямых так, что получился правильный шестиугольник. Найдите отношение сторон прямоугольника.

§ 15. Формулы для вычисления площади правильного многоугольника, его стороны и радиуса вписанной окружности.

Построение правильных многоугольников

1.

1. Радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, равен $\sqrt{3}$ см. Найдите периметр и площадь треугольника.
2. Хорда окружности, равная a , стягивает дугу в 90° . Найдите радиус окружности.
3. С помощью циркуля и линейки впишите в данную окружность правильный четырехугольник.

2.

1. Радиус окружности, вписанной в правильный шестиугольник, равен $2\sqrt{3}$ см. Найдите периметр и площадь шестиугольника.
2. Хорда окружности, равная m , стягивает дугу 120° . Найдите радиус окружности.
3. С помощью циркуля и линейки впишите в данную окружность правильный треугольник.

3.

1. В окружность вписаны квадрат и правильный треугольник. Площадь квадрата равна Q . Найдите сторону и площадь треугольника.
2. В окружность вписан правильный шестиугольник, и вокруг окружности описан правильный шестиугольник. Найдите отношение их площадей.
3. С помощью циркуля и линейки опишите около окружности правильный четырехугольник.

4.

1. В окружность вписаны правильный шестиугольник и квадрат. Площадь шестиугольника равна Q . Найдите сторону и площадь квадрата.
2. В окружность вписан правильный треугольник, и вокруг окружности описан правильный треугольник. Найдите отношение их площадей.
3. С помощью циркуля и линейки опишите около окружности правильный треугольник.

5.

1. По данному радиусу R найдите сторону и площадь правильного вписанного в окружность двенадцатиугольника.
2. Центры двух окружностей расположены по разные стороны от их общей хорды. Хорда равна a и служит в одной окружности стороной правильного вписанного треугольника, а в другой — правильного вписанного шестиугольника. Найдите расстояние между центрами этих окружностей.
3. С помощью циркуля и линейки постройте правильный шестиугольник по отрезку, равному его апофеме.

6.

1. По данному радиусу R найдите сторону и площадь правильного вписанного в окружность восьмиугольника.
2. Центры двух пересекающихся окружностей расположены по одну сторону от их общей хорды. Хорда равна a и служит в одной окружности стороной правильного вписанного треугольника, а в другой — вписанного квадрата. Найдите расстояние между центрами этих окружностей.
3. С помощью циркуля и линейки постройте правильный шестиугольник по отрезку, равному его меньшей диагонали.

7.

1. Сторона правильного двенадцатиугольника $A_1A_2\dots A_{12}$ равна $a\sqrt{2-\sqrt{3}}$. Найдите площадь четырехугольника $A_1A_6A_7A_8$.
2. В трапеции $ABCD$ (AD и BC — основания) меньшее основание равно a , углы, прилежащие к этому основанию, равны 105° , диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите площадь трапеции.
3. С помощью циркуля и линейки постройте правильный шестиугольник, площадь которого в два раза больше площади данного правильного шестиугольника.

8.

1. Сторона правильного восьмиугольника $A_1A_2\dots A_8$ равна $a\sqrt{2-\sqrt{2}}$. Найдите площадь четырехугольника $A_1A_4A_5A_6$.
2. В окружность, радиус которой равен R , вписана трапеция, ее вершины делят окружность в отношении $2 : 3 : 2 : 5$. Найдите площадь трапеции.
3. С помощью циркуля и линейки постройте правильный шестиугольник, площадь которого в два раза меньше площади данного правильного шестиугольника.

§ 16. Длина окружности

1.

1. Длина окружности, описанной около квадрата, равна 8π см. Найдите периметр квадрата.
2. С помощью микрокалькулятора найдите длину дуги, содержащей 105° и радиус которой равен 22 дм.

2.

1. Длина окружности, описанной около правильного треугольника, равна 12π см. Найдите периметр треугольника.
2. С помощью микрокалькулятора найдите радиус дуги окружности, если дуга содержит 138° и ее длина равна 15 см.

3.

1. Найдите периметр заштрихованной фигуры, изображенной на рисунке 17, если радиус окружности с центром O равен R , а $\angle AMB = 120^\circ$.
2. Окружность радиуса 12 см разогнута в дугу, центральный угол которой равен 135° . Найдите радиус дуги.

4.

1. Найдите периметр заштрихованной фигуры, изображенной на рисунке 18, если радиус окружности с центром O равен R , $\angle AMB = 90^\circ$.
2. Дуга, радиус окружности которой равен 6 см и центральный угол 120° , свернута в окружность. Найдите радиус окружности.

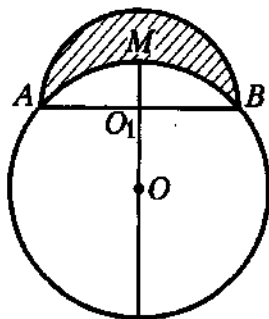


Рис. 17

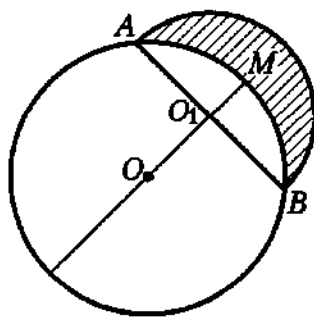


Рис. 18

5.

1. На рисунке 19 AMB , AKC , CLD , DPB полуокружности с диаметрами AB , AC , CD и DB . Докажите, что путь от A до B по полуокружности AMB равен пути по полуокружностям AKC , CLD и DPB .
2. В сегмент, дуга которого содержит 120° и длина дуги которого равна l , вписана наибольшая окружность (рис. 20). Найдите длину этой окружности.

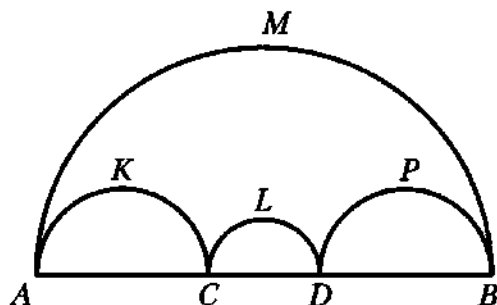


Рис. 19

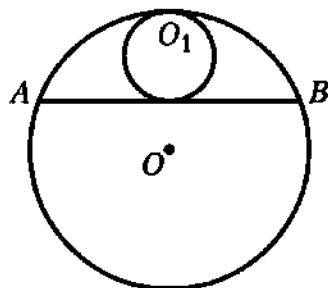


Рис. 20

6.

1. На рисунке 21 ATB , AEC , CFD и DMB полуокружности с диаметрами AB , AC , CD и DB . Докажите, что путь от A до B по полуокружности ATB равен пути по полуокружностям AEC , CFD и DMB .

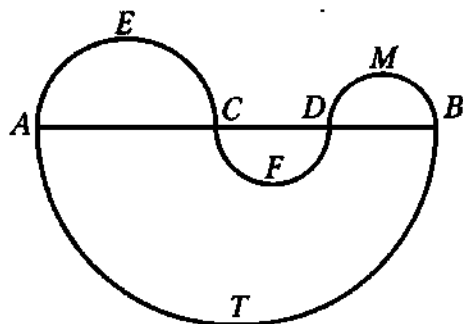


Рис. 21

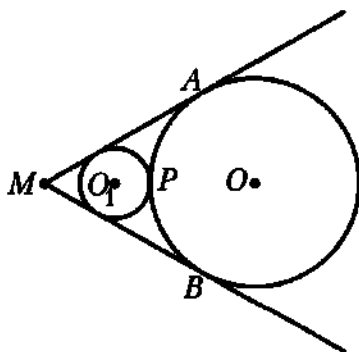


Рис. 22

2. Из точки M к окружности проведены касательные MA и MB (рис. 22), дуга $APB = 120^\circ$, а ее длина равна l . Найдите длину окружности, вписанной в фигуру $MAPB$.

7.

1. Три окружности, длины которых равны s , касаются друг друга. Найдите длину окружности, которая внутренним образом касается трех данных окружностей.
2. Найдите длину приводного ремня (рис. 23), если O_1 и O_2 — центры двух шкивов, радиусы которых 8 дм и 2 дм. Расстояние между центрами равно 12 дм.

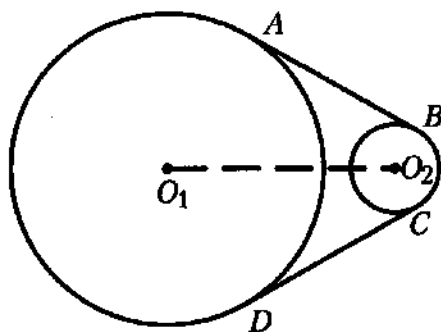


Рис. 23

8.

1. Даны четыре окружности, каждая из которых касается двух других. Длины окружностей равны s . Найдите длину окружности, которая внутренним образом касается всех данных окружностей.
2. Найдите длину приводного ремня (рис. 24), если O_1 и O_2 — центры шкивов, радиусы которых равны 25 см, а расстояние между центрами — 100 см.

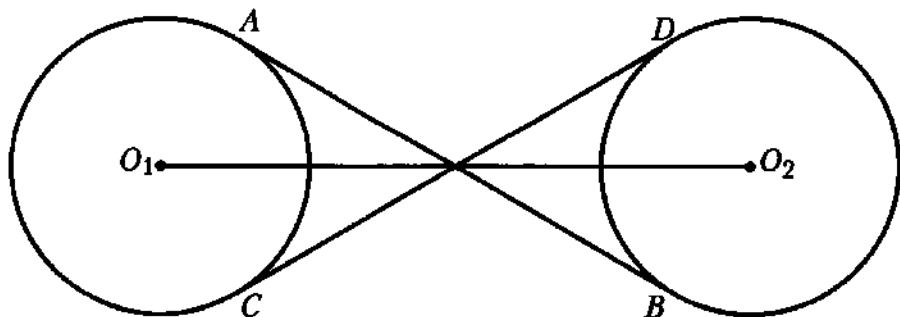


Рис. 24

§ 17. Площади круга и кругового сектора

1.

1. Площадь круга больше площади правильного вписанного в него шестиугольника на $4\pi - 6\sqrt{3}$. Найдите радиус круга.
2. С помощью микрокалькулятора найдите площадь сектора, дуга которого содержит 115° и радиус которого равен 12,7 см.
3. Постройте круг, площадь которого в 9 раз больше площади данного круга.

2.

1. Площадь правильного треугольника больше площади вписанного в него круга на $27\sqrt{3} - 9\pi$. Найдите радиус круга.
2. Радиус сектора равен 9,7 см, а его площадь — 162 см^2 . Сколько градусов содержит дуга сектора? Вычислите с помощью микрокалькулятора.
3. Постройте круг, площадь которого в 4 раза меньше площади данного круга.

3.

1. Катеты прямоугольного треугольника равны 3 см и 4 см. Найдите площадь заштрихованной фигуры, изображенной на рисунке 25.
2. Дуга AB содержит 120° , а радиус равен R . Найдите площадь заштрихованной фигуры, изображенной на рисунке 26.

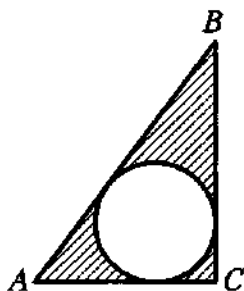


Рис. 25

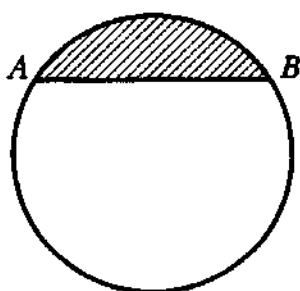


Рис. 26

3. Постройте круг, площадь которого равна разности площадей двух данных кругов.

4.

1. Стороны треугольника равны 5, 5 и 8. Найдите площадь заштрихованной фигуры, изображенной на рисунке 27.

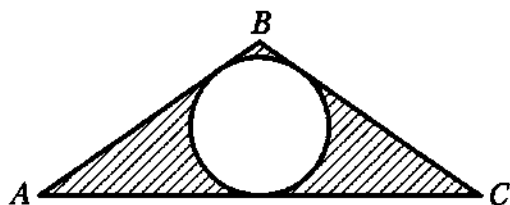


Рис. 27

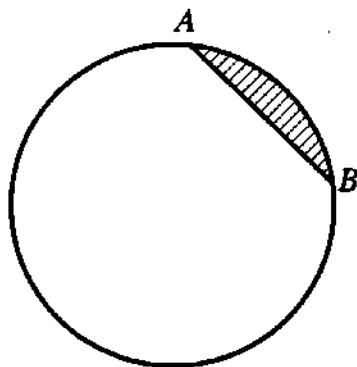


Рис. 28

2. Дуга AB равна 60° , а радиус окружности — R . Найдите площадь заштрихованной фигуры, изображенной на рисунке 28.
3. Постройте круг, площадь которого равна сумме площадей двух данных кругов.

5.

1. Даны две концентрические окружности. Хорда большей окружности, которая касается меньшей, равна a . Найдите площадь кольца.
2. На рисунке 29 изображен полукруг с диаметром AD , дуга AB равна дуге CD и равна 30° . Площадь полукруга равна Q . Найдите площадь заштрихованной фигуры.
3. Данный круг разделить окружностью, концентрической его окружности, на две равные по площади части.

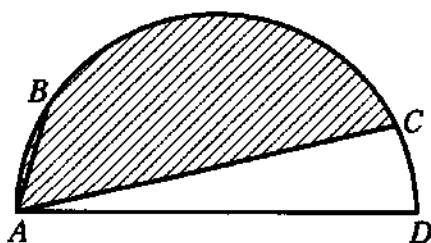


Рис. 29

6.

1. Даны две концентрические окружности. Хорда большей окружности касается меньшей. Найдите длину хорды, если площадь кольца равна $4\pi \text{ см}^2$.
2. На рисунке 30 изображен полуокруг с диаметром AD , дуга AB равна дуге CD и равна 45° . Площадь заштрихованной фигуры равна Q . Найдите площадь полуокруга.
3. Постройте круг, имеющий такую же площадь, что и данное кольцо.

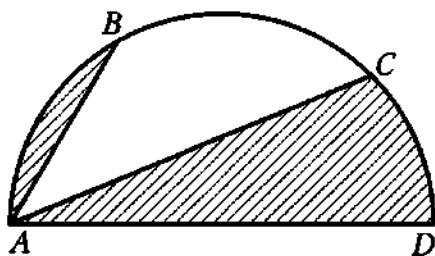


Рис. 30

7.

1. Две окружности, имеющие радиусы r и $3r$, внешне касаются. AB — их общая касательная. Найдите площадь заштрихованной фигуры, изображенной на рисунке 31.

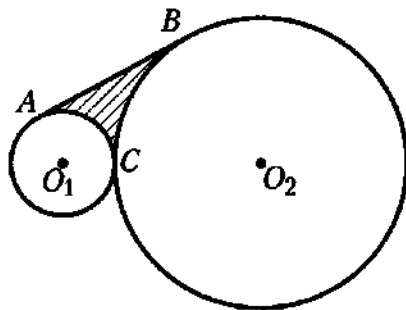


Рис. 31

2. ABC — прямоугольный треугольник ($\angle C = 90^\circ$), $AC = b$, $BC = a$, $CD \perp AB$. Длина окружности, вписанной в треугольник ADC равна s . Найдите площадь круга, вписанного в треугольник CDB .
3. Данный круг разделить двумя окружностями, концентрическими окружности круга, на три части, имеющие равные площади.

8.

1. В сектор с центральным углом в 60° и радиусом, равным R , вписана окружность. Найдите площадь заштрихованной фигуры, изображенной на рисунке 32.

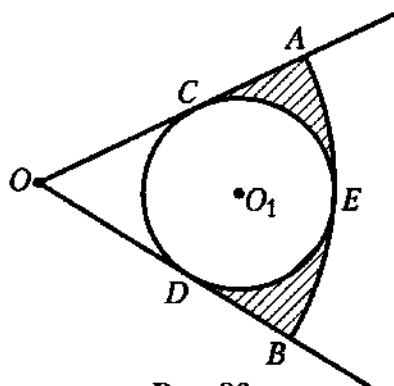


Рис. 32

2. В треугольнике ABC $E \in AB$ и $F \in BC$, причем $\angle BEF = \angle BCA$, $BF = m$, $AB = n$. Длина окружности, вписанной в треугольник EBF , равна s . Найдите площадь круга, вписанного в треугольник ABC .
3. Постройте круг, площадь которого равна сумме площадей трех данных кругов.

§ 18. Понятие движения.

Осевая и центральная симметрии

1.

1. На рисунке 33 изображен угол ABC . Постройте угол, симметричный данному относительно оси l .
2. Докажите, что при движении вертикальные углы отображаются на вертикальные углы.

2.

1. На рисунке 34 изображен угол ABC . Постройте угол, симметричный данному относительно центра O .
2. Докажите, что при движении смежные углы отображаются на смежные.

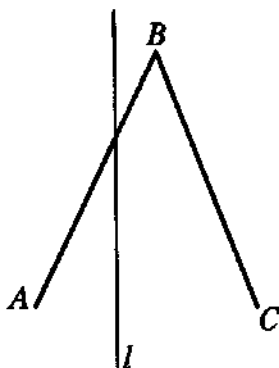


Рис. 33

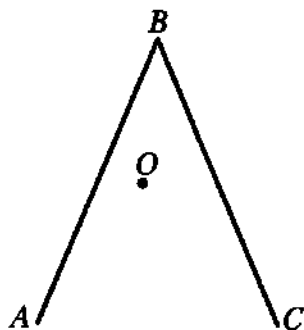


Рис. 34

3.

1. Постройте произвольный треугольник и его образ при симметрии относительно прямой, содержащей биссектрису одного из его внешних углов.
2. Докажите, что при движении подобные ромбы отображаются на подобные ромбы.

4.

1. Постройте произвольный треугольник и его образ при симметрии относительно точки пересечения его высот.
2. Докажите, что при движении подобные прямоугольники отображаются на подобные прямоугольники.

5.

1. При помощи одной линейки постройте ось симметрии равнобедренной трапеции.
2. При некотором движении отрезок AB отображается на отрезок EP , $AB = 12$ см. Точка M принадлежит отрезку AB , $AM = 2$ см. Точка M отображается на точку H . Найдите HE .

6.

1. На рисунке 35 отрезки AB и A_1B_1 центрально симметричны относительно некоторого центра. С помощью одной линейки постройте образ точки M при этой симметрии.

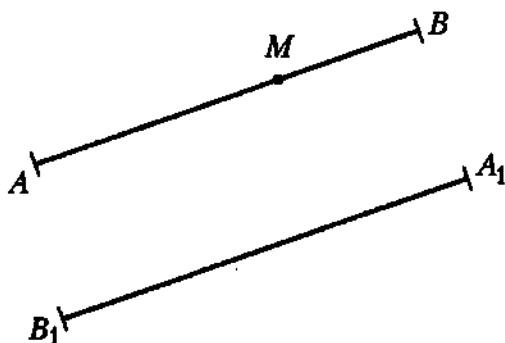


Рис. 35

2. Точка K принадлежит отрезку MN и делит его в отношении $3 : 2$, считая от точки M . При некотором движении отрезок MN отображается на отрезок EP , а точка K — на точку T . Найдите отношение $ET : TP$.

7.

1. На рисунке 36 изображены две окружности и прямая l . Найдите на этих окружностях точки, симметричные друг другу относительно прямой l .

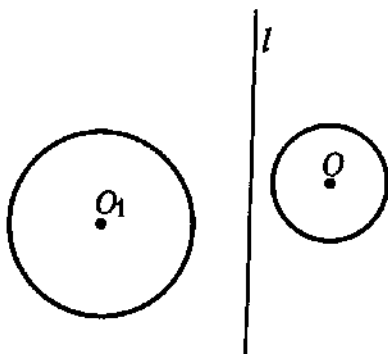


Рис. 36

2. Докажите, что равнобедренные трапеции $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ (AB и CD — основания) равны, если $AB = A_1B_1$, $AD = A_1D_1$ и $\angle BAD = \angle B_1A_1D_1$.

8.

1. На рисунке 37 изображены прямые a и b и точка O . Найдите на этих прямых точки, симметричные друг другу относительно центра O .

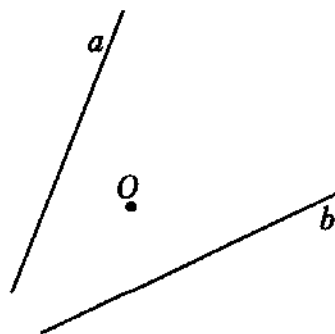


Рис. 37

2. Докажите, что два параллелограмма равны, если диагонали и угол между ними одного параллелограмма равны диагоналям и углу между ними другого параллелограмма.

§ 19. Параллельный перенос

1.

1. Постройте образ угла MOH (рис. 38) при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AA_1}$.
2. Используя параллельный перенос, докажите, что если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна третьей прямой, то и вторая прямая перпендикулярна этой прямой.

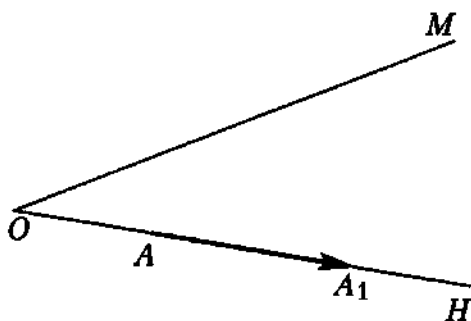


Рис. 38

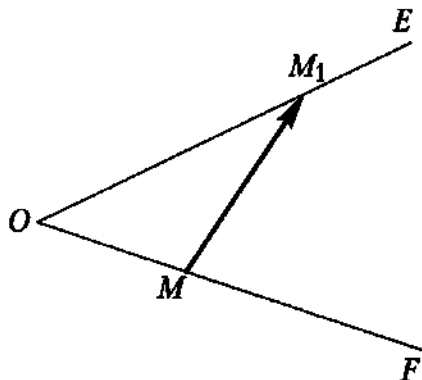


Рис. 39

2.

1. Постройте образ угла EOF (рис. 39) при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{MM_1}$.
2. Используя параллельный перенос, докажите, что углы при основании равнобедренной трапеции равны между собой.

3.

1. В произвольном треугольнике ABC BD — медиана. Точки E и F принадлежат медиане BD ($B-F-E$). Постройте образ треугольника ABC при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{FE}$.
2. Даны две равные окружности с центрами в точках O и O_1 , $OO_1 = 15$ см. Прямая l , параллельная прямой OO_1 , пересекает эти окружности в точках A, B, C и D ($A-B-C-D$). Найдите длину отрезка AC .

4.

1. В прямоугольном треугольнике ABC AE — биссектриса. Точки K и P принадлежат биссектрисе AE ($A-K-P$). Постройте образ треугольника ABC при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{PK}$.
2. Даны два равных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, основания которых AC и A_1C_1 лежат на одной прямой l . Расстояние между точками пересечения медиан этих треугольников M и M_1 равно 8 см. Прямая p , параллельная l , пересекает стороны этих треугольников в точках E, F, K и P ($E-F-K-P$). Найдите длину отрезка FP .

5.

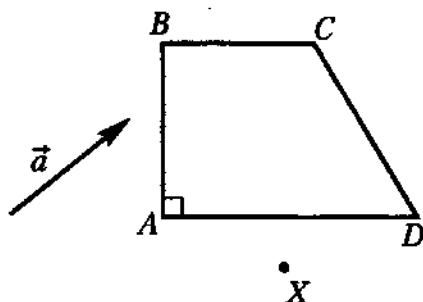


Рис. 40

1. На рисунке 40 изображена прямоугольная трапеция $ABCD$. Постройте образ этой трапеции при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$. Затем только при помощи циркуля постройте образ точки X при этом переносе.
2. Постройте трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC такую, чтобы $\angle BAD = 90^\circ$, $AC \perp BD$ и диагонали были бы равны двум данным отрезкам ($BD > AC$).

6.

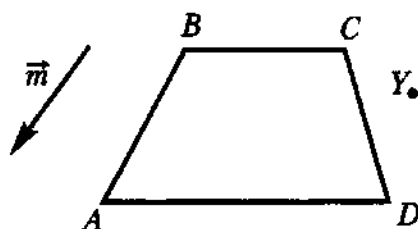


Рис. 41

1. На рисунке 41 изображена трапеция $ABCD$. Постройте образ этой трапеции при параллельном переносе на вектор $\vec{m}$. Затем только при помощи циркуля постройте образ точки Y при этом переносе.
2. Постройте трапецию по двум диагоналям, углу между ними и одной из боковых сторон.

7.

1. На рисунке 42 изображены две окружности с центрами в точках O_1 и O_2 и прямая m . Провести прямую l , параллельную m , так, чтобы эти окружности на этой прямой высекали равные хорды.
2. Докажите, что если в треугольнике медианы равны, то треугольник равнобедренный.

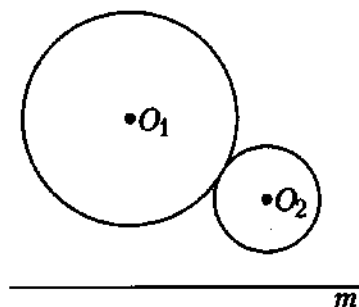


Рис. 42

8.

1. Даны два неравных равнобедренных треугольника, расположенные так, что их основания лежат на одной прямой l (рис. 43). Проведите прямую m , параллельную l , так, чтобы отрезки прямой m , которые образуются при пересечении этой прямой со сторонами треугольника, были равны (отрезки, заключенные между сторонами треугольников).

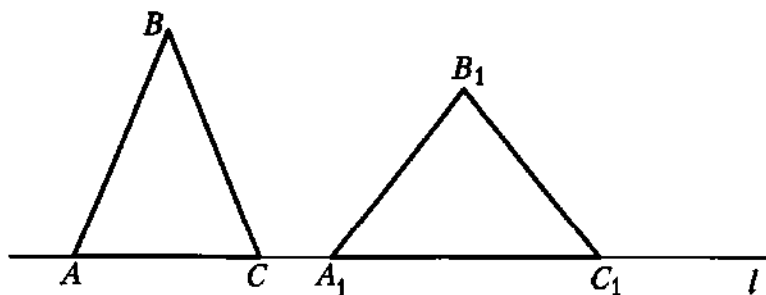


Рис. 43

2. Прямые, которые принадлежат боковым сторонам трапеции, перпендикулярны. Докажите, что отрезок, соединяющий середины оснований, равен полуразности оснований.

§ 20. Поворот

1.

1. Постройте образ A_1B_1 хорды AB при ее повороте вокруг центра окружности на 45° против часовой стрелки. Сравните длины AB и A_1B_1 .
2. Докажите, что при вращении правильного шестиугольника вокруг его центра на 120° он отображается сам на себя.

2.

1. Точки A и B принадлежат окружности с центром O . Постройте образ A_1OB_1 сектора AOB при вращении вокруг центра O на 60° по часовой стрелке. Сравнить дуги AB и A_1B_1 .
2. Докажите, что при вращении квадрата вокруг его центра на 180° он отображается сам на себя.

3.

1. Постройте образ угла ABC (рис. 44), полученный поворотом вокруг центра O на 60° по часовой стрелке.
2. Хорды одной и той же окружности находятся на одинаковом расстоянии от центра окружности. Докажите, что они равны.

4.

1. Постройте образ угла MHP (рис. 45), полученного поворотом вокруг центра O на 120° против часовой стрелки.
2. На окружности, центром которой является точка O , отмечены в одном направлении последовательно точки A, B, C и D , так что $\angle AOB = \angle COD$. Докажите, что $AC = BD$.

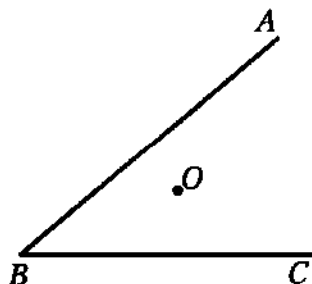


Рис. 44

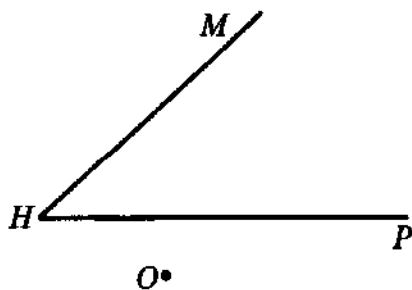


Рис. 45

5.

1. На двух данных окружностях (рис. 46) найдите такую пару точек, что поворот вокруг данной точки O на 60° отображает одну точку этой пары на другую.
2. Через центр O правильного треугольника ABC проведены две прямые, образующие между собой угол, равный 60° . Докажите, что отрезки этих прямых, заключенные внутри треугольника, равны.

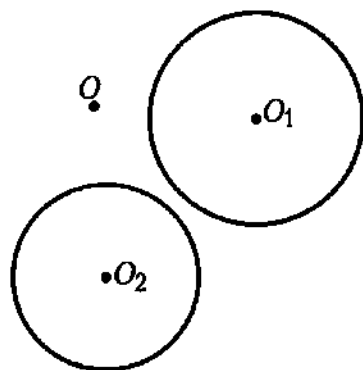


Рис. 46

6.

1. Укажите соответственно на данной прямой и отрезке такие две точки (рис. 47), чтобы одну из них можно было бы отобразить на другую поворотом вокруг данной точки O на 30° .
2. Дан квадрат $ABCD$. Через центр квадрата проведены две взаимно перпендикулярные прямые, отличные от прямых AC и BD . Докажите, что отрезки этих прямых, заключенные внутри квадрата, равны.

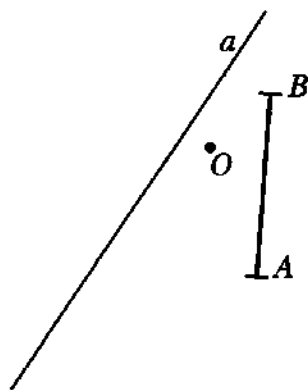


Рис. 47

7.

1. Постройте правильный треугольник так, чтобы одна его вершина совпала с точкой P , другая принадлежала прямой a , а третья — прямой b (рис. 48).
2. На сторонах AB и AC треугольника ABC постройте квадраты $ABEP$ и $ACHM$, расположенные с треугольником ABC в разных полуплоскостях соответственно с границами AB и AC . Докажите, что $PC = BM$ и $PC \perp BM$.

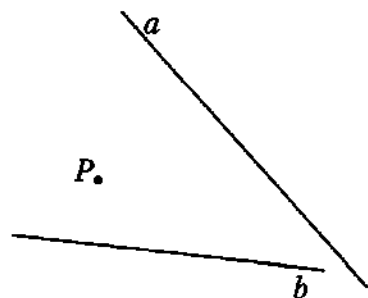


Рис. 48

8.

1. Постройте правильный треугольник, одна вершина которого совпадает с данной точкой A , а две другие принадлежат двум данным окружностям (рис. 49).

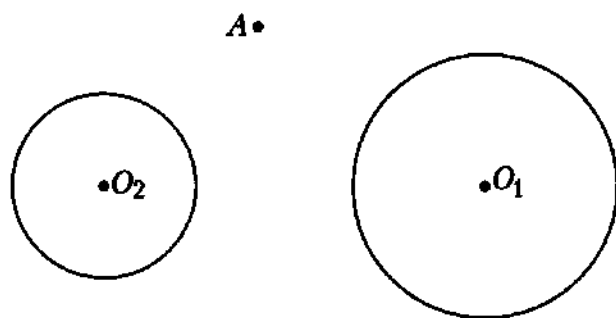


Рис. 49

2. Даны два одинаково ориентированных квадрата $ABCD$ и $AEFK$. Докажите, что $EB = KD$ и $EB \perp KD$.

РАБОТЫ НА ПОВТОРЕНИЕ

№ 1. Треугольники

1.

1. На рисунке 50 $\triangle ABC$ — равнобедренный ($AB = BC$), $DF \parallel AC$ и $CF \parallel AB$, $AB = 13$, $BD = 7$, $AC = 10$.

1) Докажите, что $\triangle ADE = \triangle CED$.

2) Докажите, что $\triangle ECF - \triangle ABC$.

3) Найдите EF .

4) Найдите высоту треугольника ABC , опущенную на боковую сторону.

5) Найдите отношение площадей треугольников ADE и DCF .

2. Начертите тупоугольный треугольник и постройте точку пересечения прямых, которым принадлежат высоты треугольника.

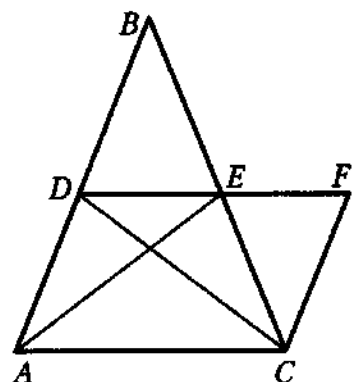


Рис. 50

2.

1. На рисунке 51 $\triangle ABC$ — равнобедренный ($AB = BC$), $BD \perp AC$, $\angle AKM = \angle BMA$, $AB = 17$, $AC = 16$, $MD = 6$.

1) Докажите, что $\triangle ABM = \triangle BMC$.

2) Докажите, что $\triangle AKM \sim \triangle BMC$.

3) Найдите KM .

4) Найдите радиус окружности, вписанной в $\triangle ABC$.

5) Найдите площадь треугольника AKM .

2. Начертите остроугольный треугольник и опишите около него окружность.

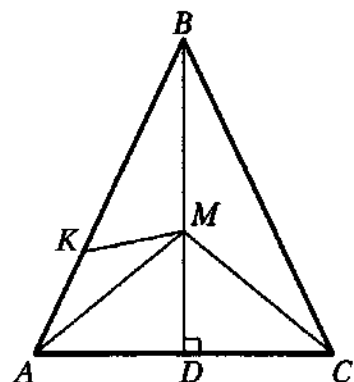


Рис. 51

3.

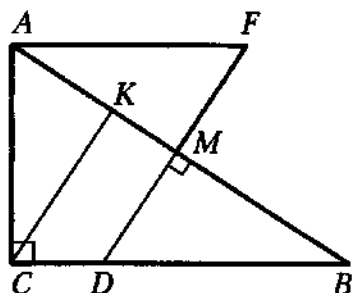


Рис. 52

1. На рисунке 52 $\triangle ABC$ — прямоугольный, $\angle C = 90^\circ$, M — середина AB ; $DM \perp AB$, $AF \parallel BC$, $CK \parallel DM$, $DM = 8$, $MB = 15$.

1) Докажите, что $\triangle AFM = \triangle DMB$.

2) Докажите, что $\triangle AFM \sim \triangle ABC$.

3) Найдите стороны $\triangle ABC$.

4) Найдите радиус вписанной в треугольник DMB окружности и длину медианы в треугольнике ABC , проведенной из вершины прямого угла.

5) Найдите отношение площадей треугольников AKC и CKB .

2. Начертите тупоугольный треугольник и опишите около него окружность.

4.

1. На рисунке 53 AA_1 и BB_1 — медианы, $AA_1 = 12$, $BB_1 = 9$, $B_1E = 3$, $B_1K = 9$, $B_1P = 21$, $\angle AMB_1 = 60^\circ$.

1) Докажите, что $\triangle B_1CE = \triangle AMB_1$.

2) Найдите AC и докажите, что $\triangle B_1PK \sim \triangle AMB_1$.

3) Найдите KP .

4) Докажите, что $KP \parallel AA_1$.

5) Найдите площадь треугольника ABC .

2. Начертите треугольник и впишите в него окружность.

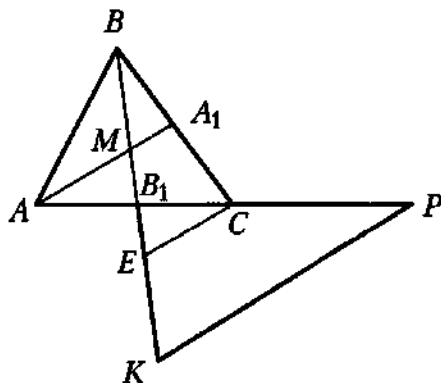


Рис. 53

5.

1. В треугольнике ABC $AB = 7$, $BC = 8$, $AC = 3$ (рис. 54), BB_1 — биссектриса, $\angle BB_1A = \angle BB_1E$, $MC \parallel B_1E$.

- 1) Докажите, что $\triangle BB_1A = \triangle BB_1E$.
- 2) Докажите, что $\triangle BCM \sim \triangle BAB_1$.
- 3) Найдите MC .
- 4) Найдите площадь треугольника ABC .
- 5) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника B_1EC .

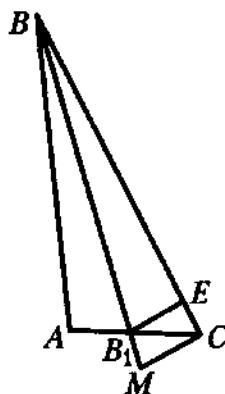


Рис. 54

2. Начертите треугольник и постройте какой-либо треугольник, площадь которого в 2,25 раза больше данного.

6.

1. На рисунке 55 $AF = AE = 4$, $\angle A = 25^\circ$, $\angle AFC = \angle AED = 100^\circ$, $BC \parallel DE$.

- 1) Докажите, что $\triangle FKD = \triangle EKC$.
- 2) Докажите, что $\triangle ABC \sim \triangle AFC$.
- 3) Найдите стороны треугольника AFC .
- 4) Найдите отношение периметров треугольников AFC и ABC .
- 5) Найдите площадь треугольника ABC .

2. Начертите прямоугольный треугольник и постройте точку пересечения его медиан.

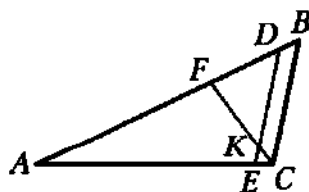


Рис. 55

№ 2. Четырехугольники

1.

Через середину O диагонали AC прямоугольника $ABCD$ проведена прямая, пересекающая стороны BC и AD в точках P и K соответственно.

- 1) Докажите, что $APCK$ — параллелограмм.
- 2) Найдите площадь $APCK$, если $AK = 4$, $KD = 8$ и $AC = 13$.
- 3) Найдите PK .
- 4) С помощью микрокалькулятора найдите угол AOK .

2.

На сторонах AB , BC , CD и DA квадрата $ABCD$ выбраны точки P , E , F и K такие, что $AP = BE = CF = DK = 1$, $EK = 10$, EK и PF пересекаются в точке M .

- 1) Докажите, что $PF \perp EK$. Найдите площадь $PEFK$.
- 2) Найдите стороны квадрата $ABCD$.
- 3) Докажите, что около четырехугольника $APMK$ можно описать окружность.
- 4) Найдите радиус этой окружности.

3.

В параллелограмме $ABCD$ через середину O диагонали BD перпендикулярно к ней проведена прямая, пересекающая BC в точке M , а AD — в точке F , $BD = 8$, $MF = 6$, $AF = 5$.

- 1) Докажите, что $BMDF$ — ромб.
- 2) Найдите радиус вписанной в этот ромб окружности.
- 3) С помощью микрокалькулятора найдите угол ODF .
- 4) Найдите периметр параллелограмма $ABCD$.

4.

В равнобедренной трапеции $ABCD$ диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны, E , F , M и K — середины сторон AB , BC , CD и DA соответственно, $S_{EFMK} = 100$.

- 1) Докажите, что $EFMK$ — квадрат.
- 2) Найдите диагонали трапеции и ее площадь.
- 3) Найдите высоту трапеции.
- 4) Найдите основания трапеции, если ее средняя линия пересекает AC в точке T , BD — в точке Q и $TQ = 2\sqrt{2}$.

5.

Диагонали ромба $ABCD$ равны 16 и 12. Через точку пересечения диагоналей O проведена высота ромба FE ($E \in BC$, $F \in AD$). Через точки E и F проведены прямые, параллельные AC до пересечения со сторонами AB и CD в точках M и K соответственно.

- 1) Докажите, что $MEKF$ — прямоугольник.
- 2) Найдите диагонали этого прямоугольника.
- 3) С помощью микрокалькулятора найдите острый угол ромба.
- 4) Найдите площадь прямоугольника.

6.

$ABCD$ — параллелограмм, $AB = 5$, $AD = 8$. Высота параллелограмма равна 4. На стороне BC выбрана точка E .

- 1) Найдите BE так, чтобы трапеция $ABED$ была равнобедренной.
- 2) Докажите, что в эту трапецию можно вписать окружность и найдите площадь вписанного в эту трапецию круга.
- 3) Найдите диагонали параллелограмма.
- 4) С помощью микрокалькулятора найдите острый угол между его диагоналями.

№ 3. Окружность

1.

Треугольник ABC вписан в окружность, $\angle C = 45^\circ$. Из точки M , расположенной вне круга, проведены касательные MP и MT , касающиеся окружности в точках A и B соответственно ($P-A-M$, $T-B-M$), $MA + MB = 20$, $BC = 5$.

- 1) Докажите, что $OAMB$ — квадрат, где O — центр окружности.
- 2) Найдите сторону AB .
- 3) Докажите, что $\angle CBT = \angle CAB$.
- 4) Найдите градусные меры дуг BC и CA .

2.

AB — диаметр окружности с центром в точке O , хорда EF пересекает диаметр в точке K ($A-K-O$), $EK = 4$, $KF = 6$, $OK = 5$.

- 1) Найдите радиус окружности.
- 2) Найдите расстояние от центра окружности до хорды BF .
- 3) Найдите острый угол между диаметром AB и хордой EF .
- 4) Чему равна хорда FM , если EM — хорда, параллельная AB .

3.

Точка M находится вне круга с центром O . Из точки M проведены три секущие: первая секущая пересекает окружность в точках B и A ($M-B-A$), вторая — в точках D и C ($M-D-C$), а третья пересекает окружность в точках F и E ($M-F-E$) и проходит через центр окружности, $AB = 4$, $BM = 5$, $FM = 3$.

- 1) Докажите, что если $AB = CD$, то $\angle AME = \angle CME$.
- 2) Найдите радиус окружности.
- 3) Найдите длину касательной, проведенной из точки M к окружности.
- 4) Найдите величину угла AEB .

4.

Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность с центром O , BE — диаметр этой окружности, $BC = 4\sqrt{3}$. Сторона BC удалена от центра окружности на расстояние, равное 2, $BN \perp AC$, $BN = 5$.

- 1) Докажите, что $\angle EBC = \angle ABN$.
- 2) Найдите радиус окружности.
- 3) Найдите AB .
- 4) Найдите градусную меру дуги AB .

5.

В прямоугольном треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 60^\circ$. В этот треугольник вписана окружность, которая касается сторон AB , BC и AC соответственно в точках D , E и F . На дуге DF выбрана точка K и проведена касательная к окружности в этой точке. Касательная пересекает AB в точке P , а AC — в точке T .

- 1) В каком отношении точки D , E и F делят окружность?
- 2) Найдите радиус окружности, если ее центр удален от вершины C на расстояние, равное $4\sqrt{2}$.
- 3) Найдите периметр треугольника APT .
- 4) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC .

6.

AB — диаметр окружности с центром в точке O . Радиус этой окружности равен 4, O_1 — середина OA . С центром в точке O_1 проведена окружность, касающаяся большей окружности в точке A . Хорда CD большей окружности перпендикулярна к AB и пересекает AB в точке K . E и F — точки пересечения CD с меньшей окружностью ($C-E-K-F-D$), $AK = 3$.

- 1) Найдите длины хорд AE и AC .
- 2) Найдите градусную меру дуги AF и ее длину.
- 3) Найдите площадь части меньшего круга, отсеченной хордой EF .
- 4) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ACE .

№ 4. Координаты и векторы

1.

$ABCD$ — параллелограмм, $A(1; -2)$, $B(2; 4)$, $C(-1; 5)$.

- 1) Найдите координаты вершины D .
- 2) Точка E принадлежит CD , причем $CE = 2DE$. Разложите вектор $\overrightarrow{EB}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.
- 3) Найдите угол A .
- 4) Напишите уравнение прямой AC и уравнение окружности с диаметром, равным AC .

2.

Треугольник ABC задан координатами своих вершин: $A(-6; 10)$; $B(8; 8)$; $C(2; 2)$.

- 1) Определите вид этого треугольника.
- 2) Медианы AA_1 и BB_1 треугольника пересекаются в точке M . Разложите вектор $\overrightarrow{AM}$ по векторам $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$.
- 3) Найдите острый угол между этими медианами.
- 4) Напишите уравнение прямой AA_1 и уравнение описанной около этого треугольника окружности.

3.

Трапеция $ABCD$ задана координатами своих вершин: $A(-1; 0)$, $B(-1; 3)$, $C(4; 6)$, $D(4; 0)$, M — середина BC .

- 1) Разложите вектор $\overrightarrow{AM}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.
- 2) Найдите координаты точки H пересечения прямых AC и BD .
- 3) Разложите вектор $\overrightarrow{AH}$ по векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$.
- 4) Найдите острый угол между прямыми AM и BD и площадь четырехугольника $ABMD$.

4.

Треугольник ABC задан координатами своих вершин: $A(0; 12)$, $B(9; 0)$, $C(0; -12)$, O — центр вписанной в треугольник окружности.

- 1) Найдите длину медианы CM этого треугольника.
- 2) Найдите радиус вписанной в этот треугольник окружности и уравнение этой окружности.
- 3) Найдите угол между прямыми AO и BC .
- 4) Разложите вектор $\vec{OB}$ по векторам $\vec{OA}$ и $\vec{OC}$.

5.

Четырехугольник $ABCD$ задан координатами своих вершин $A(-2; -3)$, $B(1; 4)$, $C(8; 7)$, $D(5; 0)$.

- 1) Доказать, что $ABCD$ — ромб.
- 2) Вычислите $\vec{AB} \cdot \vec{AC} + \vec{AC} \cdot \vec{BD} + \vec{BC} \cdot \vec{AC}$.
- 3) Найдите углы ромба.
- 4) Напишите уравнение окружности, вписанной в ромб.

6.

Треугольник ABC задан координатами своих вершин: $A(2; -1)$, $B(2; 2)$, $C(-3; 5)$, $M \in AC$, причем $AM : MC = 1 : 3$.

- 1) Разложите вектор $\vec{BM}$ по векторам $\vec{BA}$ и $\vec{BC}$.
- 2) Найдите координаты точки K пересечения медиан этого треугольника.
- 3) Найдите координаты вектора $\vec{a}$, сонаправленного с вектором $\vec{AC}$, длина которого равна длине вектора $\vec{AB}$.
- 4) Найдите угол между вектором $\vec{AC}$ и осью абсцисс.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

№ 1. Метод координат

Вариант 1

- Даны точки: $A(1; -2)$; $B(2; 4)$; $C(-1; 4)$; $D(1; 16)$.
 - Разложите вектор $\overrightarrow{AB}$ по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$.
 - Докажите, что $AB \parallel CD$.
 - Напишите уравнение прямой AD .
- Треугольник ABC задан координатами своих вершин $A(-4; 1)$, $B(0; 1)$, $C(-2; 4)$.
 - Докажите, что $\angle A = \angle B$.
 - Найдите длину высоты CD треугольника ABC .
- Сколько общих точек имеют линии $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 1$ и $y = -2$?
- Даны векторы $\vec{a} \{-4; 3\}$, $\vec{b} \{1; -4\}$, $\vec{c} \{6; 2\}$. Разложите вектор $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Вариант 2

- $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$.
 - Найдите координаты точки A , если $B(-1; 4)$.
 - Найдите координаты середины отрезка AB .
 - Напишите уравнение прямой AB .
- Даны точки $A(-3; 4)$, $B(2; 1)$, $C(-1; a)$. Известно, что $AB = BC$. Найдите a .
- Радиус окружности равен 6. Центр окружности принадлежит оси Ox и имеет положительную абсциссу. Окружность проходит через точку $(5; 0)$. Напишите уравнение окружности.
- Вектор $\vec{a}$ сонаправлен с вектором $\vec{b} \{-1; 2\}$ и имеет длину вектора $\vec{c} \{-3; 4\}$. Найдите координаты вектора $\vec{a}$.

Вариант 3

1. Даны точки $E(-1; 4)$, $M(2; -3)$, $F(1; -3)$ и $K(4; 4)$.
 - 1) Разложите вектор $\overrightarrow{EM}$ по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$.
 - 2) Докажите, что EM пересекает FK .
 - 3) Напишите уравнение прямой MF .
2. Треугольник ABC задан координатами своих вершин $A(0; 1)$, $B(1; -4)$, $C(5; 2)$.
 - 1) Найдите координаты середины D стороны BC .
 - 2) Докажите, что $AD \perp BC$.
 - 3) Сколько общих точек имеют линии: $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$ и $x = -3$?
- 4*. Даны векторы $\vec{m} \{-4; 5\}$, $\vec{n} \{-7; 1\}$, $\vec{l} \{6; 8\}$. Разложите вектор $\vec{l}$ по векторам $\vec{m}$ и $\vec{n}$.

Вариант 4

1. $\overrightarrow{EF} = 6\vec{i} - 6\vec{j}$.
 - 1) Найдите координаты точки F , если $E(-2; 1)$.
 - 2) Найдите координаты середины отрезка EF .
 - 3) Напишите уравнение прямой EF .
2. Даны точки: $C(m; 3)$, $D(4; 1)$, $F(2; 4)$. Известно, что $CD = DF$. Найдите m .
3. Радиус окружности равен 4. Центр окружности принадлежит оси Oy и имеет отрицательную ординату. Окружность проходит через точку $(0; -2)$. Напишите уравнение окружности.
- 4*. Вектор $\vec{m}$ противоположно направлен вектору $\vec{b} \{-2; 4\}$ и имеет длину вектора $\vec{a} \{2; 2\}$. Найдите координаты вектора $\vec{m}$.

№ 2. Соотношение между сторонами и углами треугольника

Вариант 1

1. В треугольнике ABC $\angle A = 40^\circ$, $\angle C = 75^\circ$, $BC = 17$. Найдите неизвестные элементы треугольника и радиус описанной около него окружности.
2. В треугольнике PKH $PK = 6$, $KH = 5$, $\angle PKH = 100^\circ$, NF — медиана. Найдите HF и площадь треугольника PFH .
- 3*. В треугольнике ABC $AB = BC$, $\angle BAC = 2\alpha$, AE — биссектриса, $BE = a$. Найдите площадь треугольника ABC .

Вариант 2

1. В треугольнике ABC $AB = 4$, $BC = 5$, $\angle B = 110^\circ$. Найдите неизвестные элементы треугольника.
2. В параллелограмме $ABCD$ E — середина BC , $AB = 5$, $\angle EAD = 30^\circ$, $\angle ABC = 100^\circ$. Найдите площадь параллелограмма и радиус описанной около треугольника ABE окружности.
- 3*. Площадь треугольника PKT равна S , $\angle P = \alpha$, $\angle T = \beta$. Найдите сторону PK .

Вариант 3

1. В треугольнике ABC $\angle A = 20^\circ$, $\angle C = 50^\circ$, $AC = 15$. Найдите неизвестные элементы треугольника и радиус описанной около него окружности.
2. В параллелограмме $ABCD$ $AB = 4$, $AD = 5$, $BD = 6$. Найдите $\angle CBD$ и площадь параллелограмма.
- 3*. В ромбе $ABCD$ AP — биссектриса треугольника CAD , $\angle BAD = 2\alpha$, $PD = a$. Найдите площадь ромба.

Вариант 4

1. В треугольнике PKM $\angle K = 40^\circ$, $PK = 2$, $KM = 5$. Найдите неизвестные элементы треугольника.
2. В равнобедренном треугольнике ABC $AB = BC$, $\angle A = 65^\circ$. Через середину E стороны AB проведена прямая, пересекающая BC в точке K , $\angle KEB = 20^\circ$. Найдите площадь треугольника BEK и радиус окружности, описанной около треугольника ABC , если $BK = 5$.
- 3*. Площадь треугольника равна S и два угла его равны α и β . Найдите радиус описанной около треугольника окружности.

№ 3. Скалярные произведения вектора

Вариант 1

- В равнобедренном треугольнике ABC $AB = BC = 4$, $\angle B = 120^\circ$, M и N — середины AB и BC соответственно. Найдите: 1) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}$; 3) $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AC}$.
- Треугольник ABC задан координатами своих вершин $A(0; 4)$; $B(-3; 5)$, $C(-1; 3)$.
1) Найдите острый угол между медианой AM и стороной AC .
2) Вычислите: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA}$.
- Найдите координаты вектора $\vec{a}$, если $\vec{a} \perp \vec{b}$ и $\vec{b} \{1; -3\}$, $|\vec{a}| = \sqrt{10}$ и угол между вектором $\vec{a}$ и осью Ox острый.

Вариант 2

- В прямоугольнике $ABCD$ $AC = 6$, $\angle ACD = 60^\circ$. Найдите:
1) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD}$; 2) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CA}$; 3) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DA}$.
- Даны точки $A(-1; 4)$, $B(1; -2)$, $C(0; -4)$, $D(2; 2)$, E и F — середины AB и CD соответственно.
1) Найдите острый угол между EF и CD .
2) Вычислите: $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BD}$.
- В треугольнике ABC AD , BE и CF — медианы. Вычислите:
 $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CF}$.

Вариант 3

- В прямоугольном треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, $\angle ABC = 30^\circ$, $AC = 2$, E и F — середины AB и BC соответственно. Найдите: 1) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}$; 3) $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{BC}$.
- Треугольник ABC задан координатами своих вершин: $A(-1; 4)$, $B(3; 2)$, $C(1; -3)$.
1) Найдите острый угол между медианой CF и стороной AC .
2) Вычислите: $\overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{FA} - \overrightarrow{FC} \cdot \overrightarrow{AC}$.
- Найдите координаты вектора $\vec{m}$, если $\vec{m} \perp \vec{k}$ и $\vec{k} \{2; -1\}$, $|\vec{m}| = 4\sqrt{5}$ и угол между вектором $\vec{m}$ и осью Oy тупой.

Вариант 4

1. $ABCD$ — ромб, $AB = 6$, $\angle A = 60^\circ$. Найдите: 1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; 2) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DB}$; 3) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD})$.
2. Даны два отрезка EK и PM , причем $EK \perp PM$, $E(-3; 1)$, $K(1; 4)$, $M(2; 1)$, $P(-4; a)$.
 - 1) Найдите острый угол между PE и EK .
 - 2) Вычислите: $\overrightarrow{EK} \cdot \overrightarrow{MK} - \overrightarrow{KE} \cdot \overrightarrow{KP}$.
- 3*. $ABCD$ — прямоугольник, M — произвольная точка. Докажите, что $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$.

№ 4. Правильные многоугольники.

Длина окружности и площадь круга

Вариант 1

- Около правильного шестиугольника описана окружность и в него вписана окружность. Длина большей окружности равна 4π . Найдите площадь кольца и площадь шестиугольника.
- Хорда окружности равна $5\sqrt{2}$ и стягивает дугу в 90° . Найдите длину дуги и площадь соответствующего сектора.
- На рисунке 56 хорды AB и AC стягивают дуги в 60° и 120° . Радиус окружности равен R . Найдите площадь заштрихованной фигуры.
- * Докажите, что в правильном многоугольнике сумма длин перпендикуляров, проведенных из точки, взятой внутри этого многоугольника, на все его стороны, равна радиусу вписанной в этот многоугольник окружности, умноженному на число сторон.

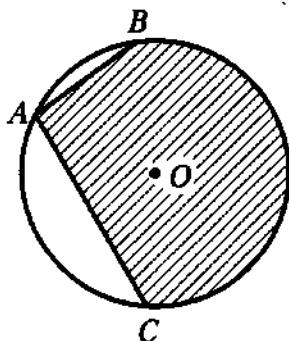


Рис. 56

Вариант 2

- Около правильного треугольника описана окружность и в него вписана окружность. Длина меньшей окружности равна 8π . Найдите площадь кольца и площадь треугольника.
- Хорда окружности равна 6 и стягивает дугу в 60° . Найдите длину дуги и площадь соответствующего сектора.
- На рисунке 57 хорды CD и CH стягивают дуги в 90° . Радиус окружности равен R . Найдите площадь заштрихованной фигуры.
- * На сторонах правильного 8-угольника $A_1A_2\dots A_8$ вне его построены квадраты. Докажите, что многоугольник, образованный вершинами этих квадратов, отличных от $A_1, A_2, A_3, \dots, A_8$, не является правильным.

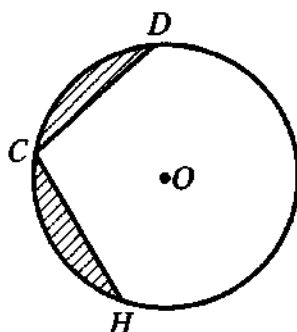


Рис. 57

Вариант 3

1. В квадрат вписана окружность и около него описана окружность. Длина большей окружности равна 8π . Найдите площадь кольца и площадь квадрата.
2. Хорда окружности равна 12 и стягивает дугу в 120° . Найдите длину дуги и площадь соответствующего сектора.
3. На рисунке 58 хорды MK и MT стягивают дуги в 60° и 120° . Радиус окружности равен R . Найдите площадь заштрихованной фигуры.
- 4*. Докажите, что площадь правильного $2n$ -угольника равна $\frac{na_n R}{2}$, где R — радиус описанной окружности, a_n — сторона правильного n -угольника, вписанного в ту же окружность.

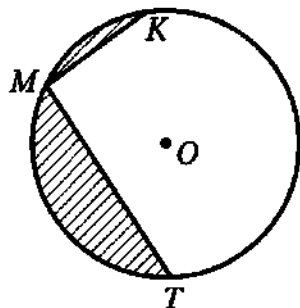


Рис. 58

Вариант 4

1. Около правильного треугольника описана окружность и в него вписана окружность. Сторона треугольника равна 4. Найдите площадь кольца и длину меньшей окружности.
2. Хорда стягивает дугу в 60° . Длина дуги равна 2π . Найдите длину хорды и площадь соответствующего сектора.
3. На рисунке 59 хорды EF и EK стягивают дуги в 90° . Радиус окружности равен R . Найдите площадь заштрихованной фигуры.
- 4*. $ABCDEF$ — правильный шестиугольник. Стороны FA, AB, BC, CD, DE и EF продолжены за вершины A, B, C, D, E и F на равные отрезки $AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, EE_1$ и FF_1 . Докажите, что $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — правильный шестиугольник.

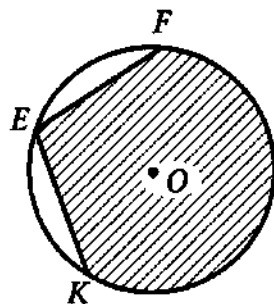


Рис. 59

№ 5. Движение

Вариант 1

- 1). Начертите квадрат $ABCD$ и отметьте на диагонали точку M , не совпадающую с точкой пересечения диагоналей. Постройте образ этого квадрата при переносе на вектор $\overrightarrow{AM}$.
- 2) Дан прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$). Постройте его образ при повороте вокруг центра C на 90° по часовой стрелке. Чему равен угол между AB и A_1B_1 , если $AB \rightarrow A_1B_1$?
2. Каким условиям должны удовлетворять два угла, чтобы один из них можно было получить из другого при помощи параллельного переноса?
3. Докажите, что прямая, содержащая середины двух параллельных хорд окружности, проходит через ее центр.
- 4*. Начертите два непараллельных отрезка AB и CD , длины которых равны. Постройте центр поворота, отображающего отрезок AB на CD ($A \rightarrow C$; $B \rightarrow D$).

Вариант 2

- 1) Начертите параллелограмм $ABCD$ и отметьте на стороне BC произвольную точку M . Постройте образ этого параллелограмма при переносе на вектор $\overrightarrow{AM}$.
- 2) Начертите произвольный треугольник ABC и построьте его образ при повороте вокруг центра C на 60° против часовой стрелки. Чему будет равен угол между AB и A_1B_1 , если $AB \rightarrow A_1B_1$?
2. Дан угол AOB , OC — биссектриса этого угла, $M \in OA$ и $K \in OB$, причем $OM = OK$. Докажите, что точки M и K симметричны относительно прямой OC .
3. Даны две точки $A(-5; 3)$ и $B(3; 5)$. Докажите, что точка B может быть получена из точки A поворотом вокруг начала координат на 90° по часовой стрелке.

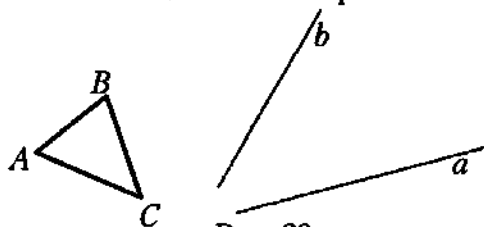


Рис. 60

- 4*. Постройте треугольник, равный данному, так, чтобы основание его принадлежало данной прямой a , а вершина — данной прямой b (рис. 60).

Вариант 3

- 1) Начертите трапецию $ABCD$ (AD и BC — основания) и отметьте на диагонали BD точку M . Постройте образ этой трапеции при переносе на вектор $\overrightarrow{MD}$.
- 2) Начертите прямоугольник $ABCD$ и постройте его образ при повороте вокруг центра A на 90° по часовой стрелке. Чему будет равен угол между BD и B_1D_1 , если $B \rightarrow B_1$ и $D \rightarrow D_1$?
2. Каким условиям должны удовлетворять два угла, чтобы один из них можно было получить из другого при помощи центральной симметрии?
3. Отрезок AB отображается параллельным переносом на отрезок A_1B_1 , который другим параллельным переносом отображается на отрезок A_2B_2 . Можно ли отрезок AB отобразить на A_2B_2 одним параллельным переносом? Сделайте рисунок и укажите соответствующий вектор.
- 4*. На данных окружности и прямой найдите такие пары точек, что одна точка является образом другой при повороте вокруг данной точки H на 60° (рис. 61).

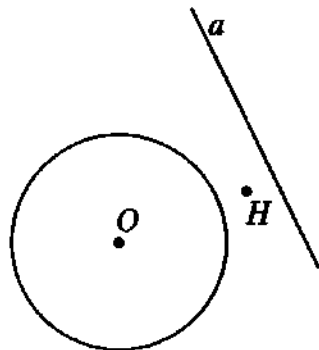


Рис. 61

Вариант 4

- 1) Начертите прямоугольную трапецию $ABCD$ (AD и BC — основания, $\angle A = 90^\circ$) и отметьте на стороне CD точку P . Постройте образ этой трапеции при переносе на вектор $\overrightarrow{PA}$.
- 2) Начертите правильный треугольник ABC и постройте его образ при повороте вокруг середины AC на угол 60° по часовой стрелке. Чему будет равен угол между AB и A_1B_1 , если $AB \rightarrow A_1B_1$.
2. Докажите, что любая прямая, проходящая через центр параллелограмма, делит его на две равные фигуры.
3. Даны две точки $A(-2; -2\sqrt{3})$ и $B(2\sqrt{3}; 2)$. Докажите, что точка B может быть получена из точки A поворотом вокруг начала координат на 150° против часовой стрелки.
- 4*. На рисунке 62 $a \parallel b$ и $c \parallel d$. Укажите такой вектор, что при параллельном переносе на этот вектор $a \rightarrow b$ и $c \rightarrow d$.

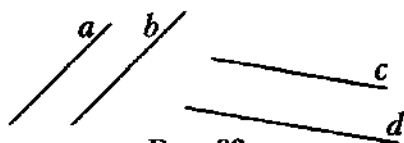


Рис. 62

№ 6. Повторение

Вариант 1

В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$), $CD \perp AB$, $AC = 3$ см, $CD = 2,4$ см.

- 1) Докажите подобие треугольников ABC и ADC и найдите неизвестные стороны треугольника ABC и его площадь.
- 2) Найдите площадь вписанного в треугольник круга.
- 3) Найдите отношение длин окружностей, описанных около треугольников ADC и BDC .
- 4) Разложите вектор $\overrightarrow{CD}$ по векторам $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$.
- 5) Вычислите $(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA})(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB})$.

Вариант 2

В параллелограмме $ABCD$ $AD = 12$ см, $AB = 6$ см, $\angle BAD = 60^\circ$. Биссектриса угла D пересекает BC в точке E .

- 1) Найдите высоты параллелограмма и его площадь.
- 2) Определите вид треугольника ECD и найдите длину описанной около треугольника окружности.
- 3) Найдите длину большей диагонали параллелограмма.
- 4) Разложите вектор $\overrightarrow{DE}$ по векторам $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{CB}$.
- 5) Вычислите: $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE})(\overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CD})$.

Вариант 3

В равнобедренной трапеции $ABCD$ основания AD и BC равны соответственно 10 см и 6 см, $\angle A = 30^\circ$.

- 1) Найдите высоту BE и площадь трапеции.
- 2) Докажите подобие треугольников AOD и BOC и найдите отношение их площадей, если O — точка пересечения диагоналей трапеции.
- 3) Найдите радиус описанной около трапеции окружности.
- 4) Разложите вектор $\overrightarrow{BE}$ по векторам $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BD}$.
- 5) Вычислите: $(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB})$.

Вариант 4

В равнобедренном треугольнике ABC $AB = BC = 5$ см, $AC = 6$ см, BD и AK — высоты.

- 1) Найдите площадь треугольника ABC и $\sin \angle ABC$.
- 2) Докажите, что треугольники AKC и BDC подобны и найдите длину CK .
- 3) Найдите длину окружности, описанной около треугольника ABC .
- 4) Разложите вектор $\overrightarrow{AK}$ по векторам $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$.
- 5) Вычислите: $(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{AC}$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ДИКТАНТЫ

№ 1. Координаты вектора

Вариант 1

1. $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — неколлинеарные векторы, $x\vec{a} + y\vec{b} = -3\vec{a}$. Найдите x и y .
2. Запишите координаты вектора $\vec{m} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$.
3. Среди векторов $\vec{a} \{-4; 5\}$, $\vec{b} \{-8; 10\}$, $\vec{c} \{2; -2,5\}$ укажите пару коллинеарных векторов.
4. $\vec{a} \{3; -2\}$, $\vec{b} \{-2; 3\}$, $\vec{c} \{-1; 1\}$. Чему равен угол между лучами, задающими векторы $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{c}$?
5. Найдите расстояние между точками $A(a; 0)$ и $B(b; 0)$.
6. $E(-2; 3)$, $F(1; 2)$. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{EF}$ и его длину.
7. AB — диаметр окружности, $A(1; -5)$, $B(3; 1)$. Найдите координаты центра окружности.
8. Напишите уравнение окружности с центром в точке $C(-4; 3)$ и радиусом $R = 5$.
9. Найдите площадь треугольника, ограниченного линиями $y = x - 2$, $y = -x - 2$, $y = 0$.
10. $x^2 + y^2 = 4$, $y = a$. При каких значениях a эти линии имеют две общие точки?

Вариант 2

1. $\vec{m}$ и $\vec{n}$ неколлинеарные векторы, $x\vec{m} + y\vec{n} = 5\vec{n}$. Найдите x и y .
2. Запишите разложение вектора $\vec{k} \{5; -2\}$ по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$.
3. Среди векторов $\vec{c} \{\frac{1}{2}; -4\}$, $\vec{m} \{-1; 8\}$, $\vec{n} \{0,25; 2\}$ укажите пару коллинеарных векторов.
4. $\vec{a} \{2; -3\}$, $\vec{b} \{1; -2\}$, $\vec{c} \{1; 1\}$. Чему равен угол между лучами, задающими векторы $\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{c}$.
5. Найдите расстояние между точками $E(0; m)$ и $F(0; n)$.
6. $F(1; -4)$, $M(3; 1)$. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{FM}$ и его длину.
7. EK — диагональ параллелограмма $EFKD$, $E(-4; 3)$, $K(2; 5)$. Найдите координаты точки пересечения диагоналей параллелограмма.

8. Напишите уравнение окружности с центром в точке $M(2; -4)$ и радиусом $R = 3$.
9. Найдите площадь треугольника, ограниченного линиями $y = x - 3$, $y = -x + 3$ и $x = 0$.
10. $x^2 + y^2 = 16$, $x = t$. При каких значениях t эти линии не имеют общих точек?

№ 2. Соотношение между сторонами и углами треугольника. Скалярное произведение векторов

Вариант 1

1. В треугольнике ABC $AB = 1$, $BC = 2$, $\angle A = 20^\circ$, $\angle C = 10^\circ$. Найдите площадь треугольника.
2. Сторона ромба равна 2 см, а его площадь — 2 см^2 . Найдите острый угол ромба.
3. В треугольнике ABC $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 45^\circ$. Найдите отношение $\frac{BC}{AC}$.
4. В треугольнике ABC $AB = 2\sqrt{2}$, $\angle C = 45^\circ$. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.
5. Стороны треугольника равны 4, 7, 8. Как по отношению к этому треугольнику расположен центр описанной около него окружности?
6. $\angle \vec{a} \vec{b} = 70^\circ$. Найдите угол между векторами $2\vec{a}$ и $-3\vec{b}$.
7. Сторона квадрата $ABCD$ равна 1. Найдите:
1) $\vec{AC} \cdot \vec{AD}$; 2) $\vec{AC} \cdot \vec{BD}$; 3) $\vec{AD} \cdot \vec{CB}$.
8. $\vec{a} \{2; -3\}$, $\vec{b} \{1; 1\}$. Какой угол (острый, прямой или тупой) между этими векторами?
9. $\triangle ABC$ — прямоугольный, $\angle C = 90^\circ$. Вычислите:
 $(\vec{BC} - \vec{BA})(\vec{AC} - \vec{AB})$.
10. $\vec{e} \{x; y\}$, $|\vec{e}| = 1$. Угол между вектором $\vec{e}$ и положительным направлением оси Ox равен α . Найдите x .

Вариант 2

1. В треугольнике MEK $ME = \sqrt{3}$, $EK = 2$. Внешний угол при вершине E равен 120° . Найдите площадь треугольника.
2. Стороны параллелограмма равны 1 см и $\sqrt{3}$ см, а его площадь — $\frac{3}{2} \text{ см}^2$. Найдите острый угол параллелограмма.

3. В треугольнике ABC $\angle A = 60^\circ$, $\angle C = 45^\circ$. Найдите отношение $\frac{BC}{AB}$.
4. В треугольнике EHF $\angle H = 60^\circ$. Радиус описанной около треугольника окружности равен $\sqrt{3}$. Найдите сторону EF .
5. Стороны треугольника равны 4, 6, 9. Как по отношению к этому треугольнику располагается центр описанной около него окружности?
6. $\vec{m} \wedge \vec{n} = 130^\circ$. Найдите угол между векторами $-\frac{1}{2}\vec{m}$ и $5\vec{n}$.
7. Сторона ромба $ABCD$ равна 1. Найдите: 1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$; 2) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$; 3) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}$.
8. $\vec{m} \{2; -1\}$, $\vec{n} \{3; 2\}$. Какой угол (острый, прямой или тупой) между этими векторами?
9. $ABCD$ — прямоугольник. Вычислите $(\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CA})(\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC})$.
10. $\vec{e} \{x; y\}$, $|\vec{e}| = 1$. Угол между вектором $\vec{e}$ и положительным направлением оси Oy равен β . Найдите y .

№ 3. Длина окружности и площадь круга

Вариант 1

1. Сторона правильного n -угольника стягивает дугу, равную a . Чему равен внешний угол этого многоугольника?
2. Угол правильного n -угольника равен 160° . Найдите n .
3. В окружность радиуса R вписан треугольник, две стороны которого равны R и $R\sqrt{3}$. Найдите площадь треугольника.
4. Найдите отношение сторон правильного вписанного шестиугольника и описанного квадрата около одной и той же окружности.
5. В окружность, радиус которой равен R , вписан правильный 12-угольник. Чему равна его площадь?
6. Длина окружности увеличилась на 1 м. На сколько при этом увеличился радиус окружности?
7. Длина окружности равна 6π . Ее дуга, содержащая 120° , свернута в окружность. Чему равен радиус этой окружности?
8. Один из углов ромба равен 30° . Найдите отношение длины вписанной в ромб окружности к его периметру.

9. Радиусы двух концентрических окружностей равны 1 и 3. Как относится площадь кольца к площади меньшего круга?
10. Площадь сектора с углом 30° равна 3π . Найдите радиус сектора.

Вариант 2

1. Внешний угол правильного n -угольника равен β . Найдите величину дуги, которая стягивается стороной этого многоугольника.
2. Угол правильного n -угольника равен 140° . Найдите n .
3. В окружность радиуса R вписан треугольник, две стороны которого равны по $R\sqrt{2}$. Найдите площадь треугольника.
4. Найдите отношение сторон правильного вписанного треугольника и описанного квадрата около одной и той же окружности.
5. В окружность, радиус которой равен R , вписан правильный 8-угольник. Чему равна его площадь?
6. Радиус окружности увеличился на 1 м. На сколько при этом увеличилась длина окружности?
7. Длина окружности равна 8π . Ее дуга, содержащая 90° , свернута в окружность. Чему равен радиус этой окружности?
8. В равнобедренную трапецию с углом 30° вписана окружность. Найдите отношение длины этой окружности к периметру трапеции.
9. Радиусы двух концентрических окружностей равны 2 и 5. Как относится площадь кольца к площади большего круга?
10. Площадь сектора с углом 20° равна 20π . Найдите радиус сектора.

№ 4. Движение

Вариант 1

1. $a \parallel b$. При некотором движении $a \rightarrow a_1$, и $b \rightarrow b_1$. Каково взаимное положение прямых a_1 и b_1 .
2. Назовите четырехугольник, который имеет только одну ось симметрии.
3. Прямые $y = 3x + b$ и $y = kx + 4$ симметричны относительно начала координат. Найдите k и b .

4. Фигура состоит из трех прямых, из которых две параллельные, а третья пересекает первые две. Имеет ли эта фигура центр симметрии?
5. Параллельный перенос задан парой точек $O(0; 0) \rightarrow M(-2; 0)$. Запишите координаты образа точки $B(4; 1)$.
6. Существует ли параллельный перенос, при котором одна сторона квадрата отображается на другую его сторону?
7. При некотором параллельном переносе квадрат $ABCD$ отображается на квадрат $A_1B_1C_1D_1$, при этом общей частью квадрата и его образа тоже является квадрат. Укажите направление параллельного переноса.
8. Начертите прямую a и отметьте точку O вне ее. Постройте образ прямой a при повороте вокруг точки O на 45° против часовой стрелки.
9. Прямоугольник $ABCD$ при повороте на 170° против часовой стрелки вокруг центра D отображается на прямоугольник $A_1B_1C_1D_1$, $AC \rightarrow A_1C_1$. Чему равен острый угол между этими прямыми?
10. Даны две прямые $x = 3$ и $y = 2$. Укажите координаты точки на оси Ox , при повороте вокруг которой одна прямая отображается на другую.

Вариант 2

1. Прямые a и b пересекаются под углом α . При некотором движении $a \rightarrow a_1$ и $b \rightarrow b_1$. Чему равен угол между прямыми a_1 и b_1 ?
2. Назовите треугольник, который имеет более одной оси симметрии.
3. Прямые $y = -2x + b$ и $y = kx + 1$ симметричны относительно начала координат. Найдите k и b .
4. Какие правильные многоугольники имеют центр симметрии?
5. Параллельный перенос задан парой точек $O(0; 0) \rightarrow P(3; 0)$. Запишите координаты образа точки $T(-2; 5)$.
6. Существует ли параллельный перенос, при котором одна сторона треугольника отображается на другую его сторону?
7. При некотором параллельном переносе параллелограмм $ABCD$ отображается на параллелограмм $A_1B_1C_1D_1$. Общая часть этих параллелограммов есть некоторый четырехугольник. Определите его вид.

8. Начертите прямую b и отметьте точку O вне ее. Постройте образ прямой b при повороте вокруг точки O на 60° по часовой стрелке.
9. Параллелограмм $ABCD$ при повороте на 160° по часовой стрелке вокруг центра A отображается на параллелограмм $AB_1C_1D_1$, $BD \rightarrow B_1D_1$. Чему равен острый угол между прямыми BD и B_1D_1 ?
10. Даны две прямые $x = 3$ и $y = 2$. Укажите координаты точки на оси Oy , при повороте вокруг которой одна прямая отображается на другую.

№ 4. Повторение курса 7—8 классов

Вариант 1

1. В треугольнике ABC $\angle B = 20^\circ$. Биссектрисы AA_1 и CC_1 пересекаются в точке O . Найдите угол AOC .
2. В трапеции $ABCD$ (AD и BC — основания) AC — биссектриса угла A , $AB = 6$, $AD = 10$. Найдите среднюю линию трапеции.
3. В треугольнике ABC точка E принадлежит стороне AC , $\angle ABC = \angle BEC$, $AC = 5$, $BC = 3$. Найдите отношение площадей треугольников BEC и ABC .
4. В трапеции $ABCD$ $AC = 4$, $AD = 8$, $\angle CAD = 30^\circ$. Найдите площадь треугольника ABD .
5. В равнобедренном треугольнике основание равно 8. Высота, опущенная на основание, равна 3. Найдите высоту, опущенную на боковую сторону.
6. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$), $CD \perp AB$, $AD = 2$, $AB = 8$. Найдите AC .
7. Угол AMB — вписанный в окружность с центром O , $\angle AMB = 30^\circ$. Радиус окружности равен 5. Найдите периметр треугольника AOB .
8. Из точки M , удаленной от центра окружности O на расстояние, равное 10, проведены касательные MA и MB (A и B — точки касания), $\angle AMB = 120^\circ$. Найдите $MA + MB$.
9. Точка M , расположенная вне окружности, соединена отрезком с концами диаметра AB , MA пересекает окружность в точке E ,

$AE = 3$, $ME = 2$. Радиус окружности равен 2,5. Найдите площадь треугольника AMB .

10. Хорды AB и CD пересекаются в точке M , $MD = 4$, $MC = 5$, $AM = 2$. Какая из хорд расположена ближе к центру?

Вариант 2

1. В треугольнике ABC биссектрисы AA_1 и CC_1 пересекаются в точке O , $\angle AOC = 140^\circ$. Найдите угол B .
2. В прямоугольной трапеции $ABCD$ ($\angle A = 90^\circ$, AD и BC — основания) DB — биссектриса угла D , $CD = 5$, $AB = 4$. Найдите среднюю линию трапеции.
3. В треугольнике ABC точка K принадлежит стороне AB , $\angle BCK = \angle BAC$, $BK = 4$, $BC = 7$. Найдите отношение периметров треугольников BKC и ABC .
4. В параллелограмме $ABCD$ $BD = 10$, $AD = 6$, $\angle BDA = 30^\circ$. Найдите площадь треугольника ACD .
5. Диагонали ромба равны 6 и 8. Найдите его высоту.
6. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$), $CD \perp AB$, $AD = 2$, $DB = 8$. Найдите CD .
7. Угол AMB вписан в окружность с центром O , $\angle AMB = 45^\circ$. Радиус окружности равен 2. Найдите длину хорды AB .
8. Из точки M , расположенной вне окружности, проведены касательные MA и MB (A и B — точки касания), $\angle AMB = 90^\circ$, $AB = 10$. Найдите расстояние от точки M до центра окружности O .
9. Из точки M проведена касательная MA к окружности (A — точка касания), AC — диаметр окружности, MC пересекает окружность в точке E , $MA = 5$. Радиус окружности равен 6. Найдите AE .
10. Хорды AB и CD пересекаются в точке M , $AM = 5$, $MB = 8$, $CM = 4$. Какая из хорд расположена дальше от центра?

10 класс

ЗАДАЧИ ДЛЯ УРОКА

Параграф	Тема
1	Аксиомы стереометрии и следствия из них
2	Взаимное расположение прямых в пространстве
3	Параллельность прямой и плоскости
4	Параллельность плоскостей
5	Тетраэдр и параллелепипед
6	Задачи на построение сечений
7	Перпендикулярность прямой и плоскости. Параллельные прямые, перпендикулярные к плоскости
8	Признак перпендикулярности прямой и плоскости
9	Расстояние от точки до плоскости
10	Теорема о трех перпендикулярах. Угол между прямой и плоскостью
11	Двугранный угол
12	Перпендикулярные плоскости. Прямоугольный параллелепипед
13	Прямая призма и параллелепипед
14	Площадь поверхности прямой призмы
15	Наклонная призма. Площадь поверхности
16	Правильная пирамида
17	Неправильная пирамида. Площадь поверхности
18	Сечения в пирамиде. Усеченная пирамида
19	Понятие вектора в пространстве
20	Сложение и вычитание векторов
21	Умножение вектора на число
22	Компланарные векторы. Применение вектора к решению задач
23	Повторение
24*	Параллельная проекция фигуры. Изображение фигур
25*	Многогранные углы. Теорема косинусов для трехгранного угла

* Задачи предназначены для классов с углубленным изучением математики.

ЗАДАЧИ ДЛЯ УРОКА

§ 1. Аксиомы стереометрии и следствия из них

1.

1. Точки A, B и C не лежат на одной прямой. $M \in AB, K \in AC, X \in MK$. Докажите, что точка X лежит в плоскости ABC .
2. Плоскости α и β пересекаются по прямой m . Прямая a лежит в плоскости α и пересекает плоскость β . Пересекаются ли прямые a и m ? Почему?

2.

1. Прямые a и b пересекаются в точке O . $A \in a, B \in b; Y \in AB$. Докажите, что прямые a и b и точка Y лежат в одной плоскости.
2. Даны пересекающиеся плоскости α и β . Прямая a лежит в плоскости α и пересекает плоскость β в точке A . Прямая b лежит в плоскости β и пересекает плоскость α в точке B . Докажите, что AB — линия пересечения плоскостей α и β .

3.

1. В чем ошибка чертежа на рис 1. Дайте объяснение. Сделайте верный чертеж.
2. По данным рисунка 2 постройте:
 - 1) точки пересечения прямой EF с плоскостями ABC и $A_1B_1C_1$;
 - 2) линию пересечения плоскостей ADF и EFD ;
 - 3) линию пересечения плоскостей EFD и ABC .

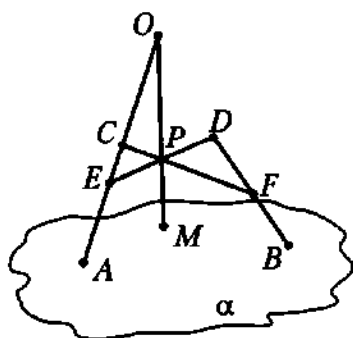


Рис. 1

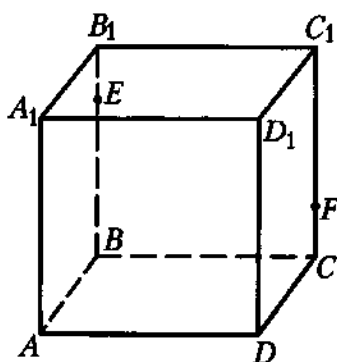


Рис. 2

4.

1. В чем ошибка чертежа, где $O \in EF$ (рис. 3)? Дайте объяснение. Сделайте верный чертеж.
2. По данным рисунка 4 постройте:
 - 1) точку пересечения прямой PM с плоскостями DCC_1 и AA_1B_1 ;
 - 2) линию пересечения плоскостей PB_1M и AB_1M ;
 - 3) линию пересечения плоскостей PMC_1 и DD_1C_1 .

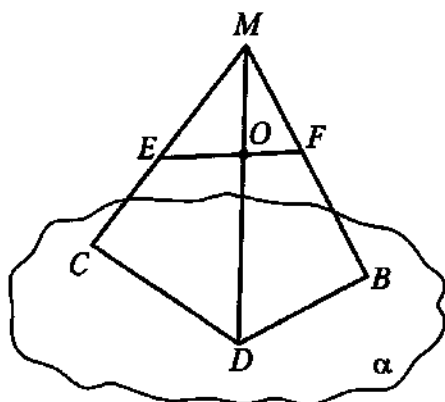


Рис. 3

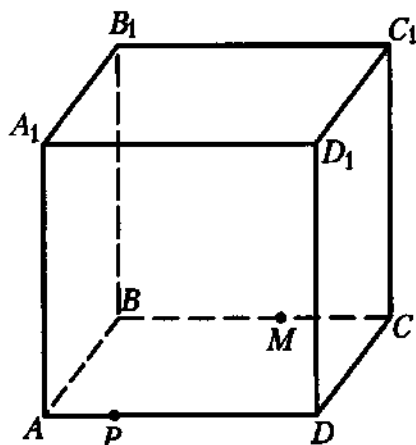


Рис. 4

5.

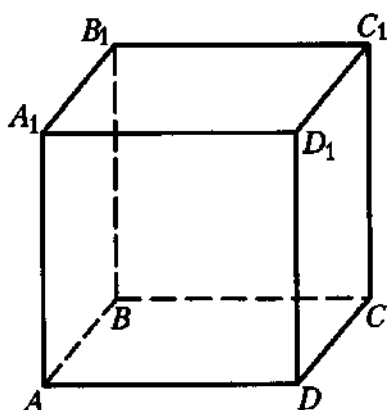


Рис. 5

1. В трапеции $ABCD$ (AD и BC — основания) AB пересекает CD в точке M , E — середина AD , $O \in BC$. Точка K расположена вне плоскости трапеции. При каком условии точки K , M , O и E лежат в одной плоскости?
2. Постройте линию пересечения плоскостей AB_1C и A_1C_1B (рис. 5).

6.

1. В треугольнике ABC биссектрисы углов A и C пересекаются в точке O ; $AB : BC = 2 : 3$; $E \in AC$. D лежит вне плоскости ABC . При каком условии можно провести плоскость через точки D , B , O и E ?
2. Постройте линию пересечения плоскостей PKT и MCE (рис. 6).

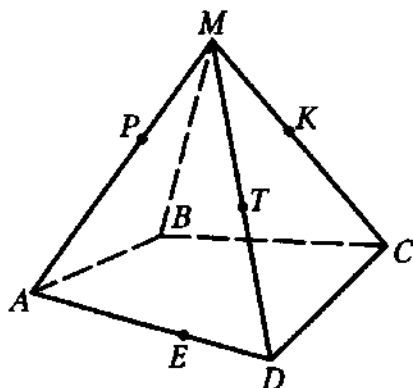


Рис. 6

7.

1. Точка K лежит в плоскости ABC . Постройте точку пересечения прямой DK и плоскости EFM (рис. 7).
2. Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC . Принадлежит ли точка C плоскости, в которой лежат точки A , B и O ?

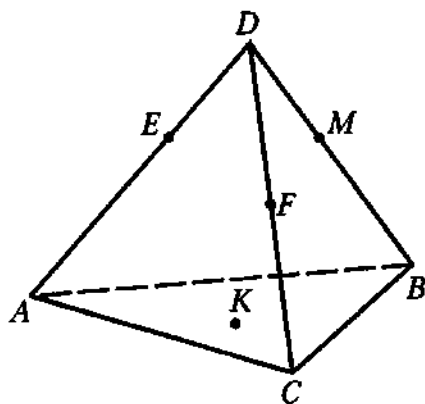


Рис. 7

8.

1. Точка M лежит в плоскости BDC . Постройте точку пересечения прямой AM с плоскостью DBE (рис. 8).
2. Точка O — центр окружности, описанной около четырехугольника $ABCD$. Точки A , O и C принадлежат плоскости α . Принадлежит ли этой плоскости вершина D ?

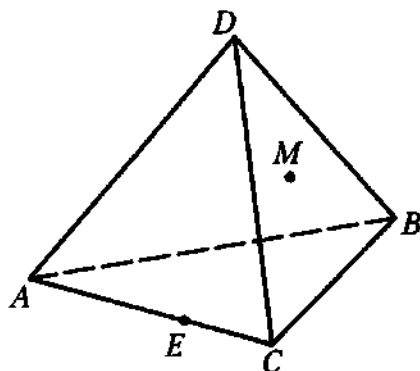


Рис. 8

§ 2. Взаимное расположение прямых в пространстве

1.

1. На рис. 9 плоскости α и β пересекаются по прямой EF . Прямая AB лежит в плоскости α . В плоскости β через точку C провести прямую так, чтобы она:
 - 1) пересекала прямую AB ;
 - 2) была бы скрещивающейся с прямой AB ;
 - 3) была бы параллельна прямой AB .
2. На рис. 10 $AA_1 \parallel CC_1$, $AA_1 \parallel BB_1$, $BB_1 = CC_1$. Докажите, что $B_1C_1 = BC$.

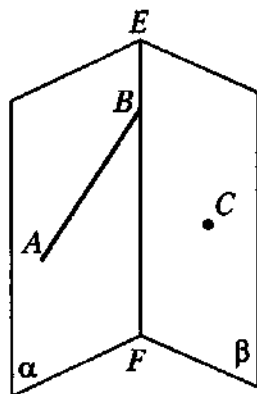


Рис. 9

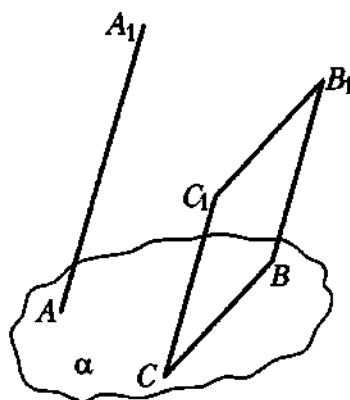


Рис. 10

2.

- На рис. 11 плоскости α и β пересекаются по прямой EF . Прямая AB лежит в плоскости α и параллельна EF . В плоскости β через точку C провести прямую так, чтобы она:
 - пересекала прямую AB ;
 - была бы скрещивающейся с прямой AB ;
 - была бы параллельна прямой AB .
- На рис. 12 $A_1C_1 = AC$; $A_1C_1 \parallel AC$; $A_1B_1 = AB$; $A_1B_1 \parallel AB$. Докажите, что $CC_1 \parallel BB_1$.

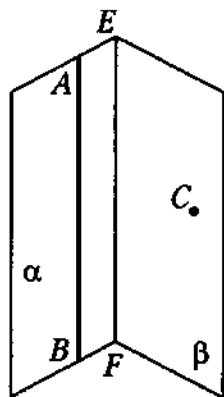


Рис. 11

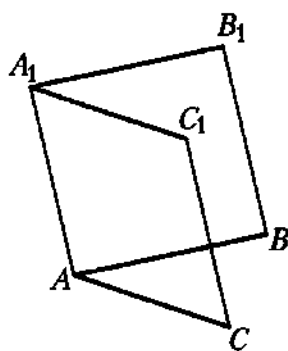


Рис. 12

3.

- Докажите, что прямые AA_1 и C_1D_1 ; AA_1 и B_1D ; AC и B_1D_1 являются скрещивающимися (рис. 13).
- Прямая b лежит в плоскости α . Прямая a не лежит в плоскости α и параллельна прямой b . Через точку M , лежащую в плоскости α ($M \in b$), проведена прямая c , параллельная a . Докажите, что c лежит в плоскости α .

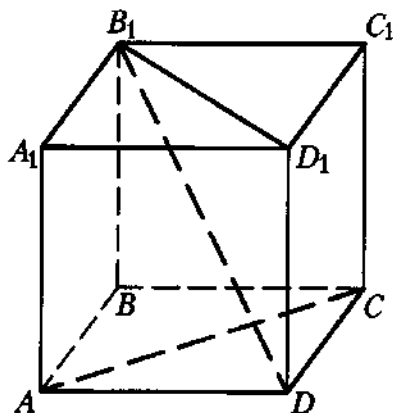


Рис. 13

4.

1. Докажите, что прямые AD и C_1D_1 ; A_1D и D_1C ; D_1C и AB_1 являются скрещивающимися (рис. 14).
2. Даны две параллельные прямые a и b и точка M , не лежащая ни на одной из них. Лежит ли точка M в одной плоскости с прямыми a и b , если известно, что через точку M можно провести прямую, пересекающую только одну из данных прямых.

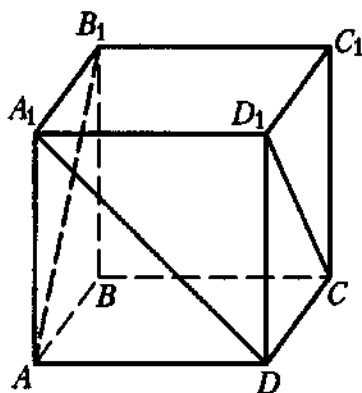


Рис. 14

5.

1. На рис. 15 прямые a и b — скрещивающиеся. Каково взаимное положение прямых EF и a , EF и b ?
2. На рис. 16 точки E , F , P и M — середины отрезков AD , CD , BC и AB соответственно. Докажите, что EP и MF пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

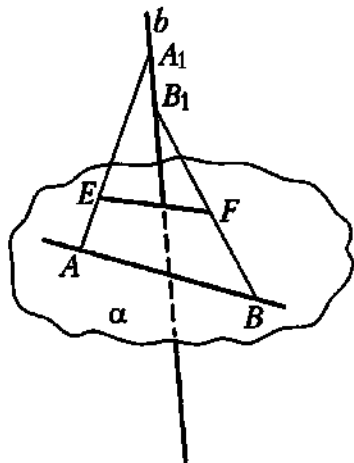


Рис. 15

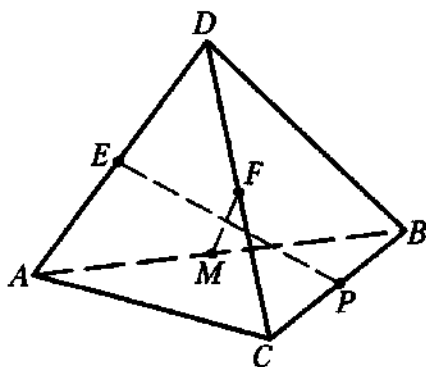


Рис. 16

6.

1. На рис. 17 прямые a и b — скрещивающиеся. Каково взаимное положение прямых PQ и a , PQ и b ?
2. На рис. 18 E , F , P и M — середины A_1D_1 , D_1C , CD и A_1D соответственно. Докажите, что EP и MF пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

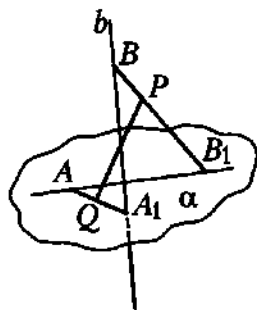


Рис. 17

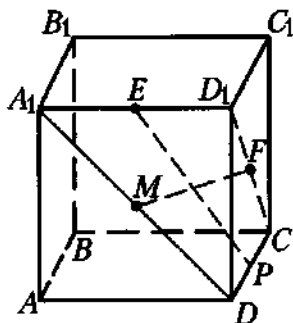


Рис. 18

7.

1. Точка O не лежит на плоскости γ , которая задается параллельными прямыми a и b . Плоскость α проходит через точку O и прямую a , а плоскость β проходит через точку O и прямую b . Докажите, что линия пересечения этих плоскостей параллельна прямым a и b .
2. В плоскости α расположен треугольник ABC . Через его вершины проведены параллельные между собой отрезки AA_1 , BB_1 и CC_1 , расположенные по одну сторону от плоскости α ; $AA_1 = BB_1 = CC_1$. Точки E , F и M — середины отрезков AB , BC и AC соответственно. Докажите, что отрезки A_1F , B_1M и C_1E пересекаются в одной точке. В каком отношении точка пересечения делит эти отрезки?

8.

1. Пусть a и b — скрещивающиеся прямые и точка M не принадлежит ни одной из них. Всегда ли существует прямая, проходящая через точку M и пересекающая обе данные прямые?
2. В плоскости α расположен треугольник ABC . Через его вершины проведены параллельные между собой отрезки AA_1 , BB_1 и CC_1 , расположенные по одну сторону от плоскости α ; $AA_1 = BB_1 = CC_1$. Точки F , E и M — середины отрезков B_1C , AC_1 и A_1B соответственно. Докажите, что треугольники EMF и ABC подобны.

§ 3. Параллельность прямой и плоскости

1.

1. В параллелограмме $ABCD$ точки E и F принадлежат сторонам AB и CD , причем $BE : EA = CF : FD$. Через эти точки проведена плоскость α . Докажите, что $BC \parallel \alpha$.
2. Прямая a параллельна плоскости α . Через прямую a проведена плоскость β , пересекающая плоскость α по прямой b . В плоскости α существует прямая c , которая параллельна a . Докажите, что $b \parallel c$.

2.

1. Точки E и F принадлежат сторонам AB и BC треугольника ABC соответственно, причем $BE : EA = 2 : 3$. Через эти точки проведена плоскость, параллельная AC . Найдите отношение $BF : FC$.
2. В плоскости α выбраны точки A и B . С концами в этих точках проведены в одном направлении от плоскости α равные и параллельные между собой отрезки AA_1 и BB_1 . Докажите, что $A_1B_1 \parallel \alpha$.

3.

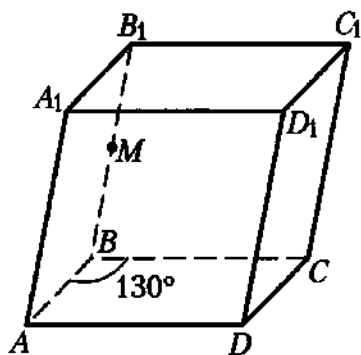


Рис. 19

1. $a \parallel b$, $a \parallel \alpha$. В каком взаимном положении находятся прямая b и плоскость α ? Дайте объяснение.
2. На рис. 19 $ABCD$ — параллелограмм. $\angle ABC = 130^\circ$. $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$ и $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$.
 1) Постройте линии пересечения плоскости AMD с плоскостями AA_1B_1 , BB_1C_1 и DD_1C_1 .
 2) Найдите угол между прямыми AB и A_1D_1 .

4.

1. $a \parallel \alpha$, $M \in \alpha$. Докажите, что в плоскости α существует прямая b , проходящая через точку M и параллельная прямой a .
2. На рис. 20 $ABCD$ — параллелограмм, $\angle ADC = 100^\circ$, $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$ и $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$.
 1) Постройте линии пересечения плоскости AA_1E с плоскостями $A_1D_1C_1$, DD_1C_1 и ABC .
 2) Чему равен угол между прямыми AD и D_1C_1 ?

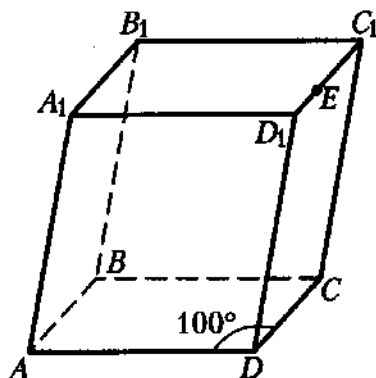


Рис. 20

5.

1. Треугольники ABC и DBC не лежат в одной плоскости. Точки M , H и K — середины соответственных отрезков BD , CD и AC соответственно. Плоскость MKH пересекает отрезок AB в точке P . Докажите, что отрезки PH и MK пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.
2. На рис. 21 $ABCD$ — параллелограмм, $\angle BCC_1 = 120^\circ$, $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$ и $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$.
 1) Постройте линию пересечения OO_1 плоскостей, проходящих через прямую AA_1 и точку M и прямую DD_1 и точку K .
 2) Каково взаимное положение прямых OO_1 и AA_1 ?
 3) Чему равен угол между прямыми OO_1 и AD ?

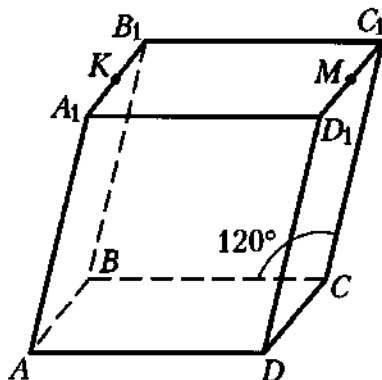


Рис. 21

6.

1. Треугольник APD и трапеция $ABCD$ имеют общую сторону AD и лежат в разных плоскостях. Через основание BC трапеции и середину отрезка PD — точку K проведена плоскость, которая пересекает прямую AP в точке M , $AD = 2BC$. Докажите, что отрезки MC и BK пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

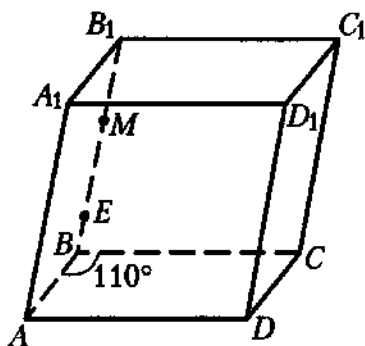


Рис. 22

2. На рис. 22 $ABCD$ — параллелограмм, $\angle ABC = 110^\circ$, $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$ и $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$.

- 1) Постройте линию пересечения KK_1 плоскостей, проходящих через прямую AD и точку M и прямую A_1D_1 и точку E .
- 2) Каково взаимное положение прямых KK_1 и BC ?
- 3) Чему равен угол между прямыми KK_1 и DC ?

7.

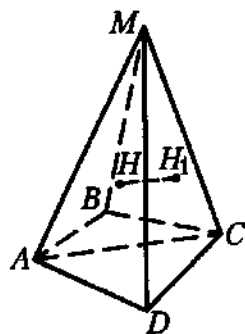


Рис. 23

1. Параллельна ли плоскость AMC прямой, проходящей через точки H и H_1 пересечения медиан треугольников MAD и MCD ? Дайте объяснение (рис. 23).

2. На рис. 24 точки M , F и E — середины отрезков CD , BC и AB соответственно.

- 1) Постройте линии пересечения плоскости MFE с плоскостями ABC , CDB , ADC и ADB . Дайте объяснение.

- 2) Найдите угол между прямыми AC и DB , если $AC = 10$, $BD = 20$, а площадь четырехугольника, образованного построенными линиями пересечения равна $25\sqrt{3}$.

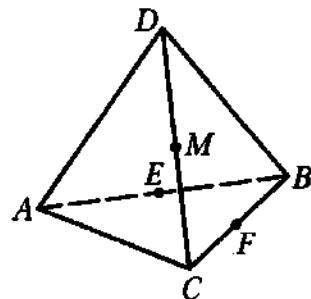


Рис. 24

8.

1. Параллельна ли плоскость AHC прямой, проходящей через точки M и M_1 пересечения медиан треугольников ABC и HAB (рис. 25)?
2. На рис. 26 $ABCD$ — параллелограмм. $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$ и $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$. Точки K, M и P — середины отрезков AB, A_1B и AD соответственно; $AA_1 = 20$; $BD = 40$. Угол между прямыми CC_1 и BD прямой.
 - 1) Постройте линии пересечения плоскости MKP с плоскостями AA_1B, BA_1D, AA_1D_1 и ABC .
 - 2) Найдите площадь четырехугольника, образованного построенными линиями пересечения.

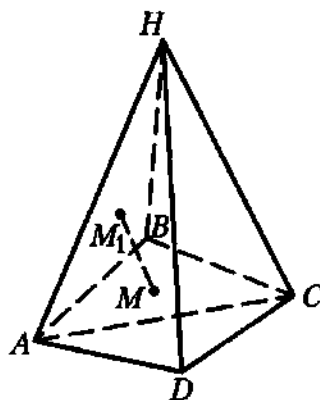


Рис. 25

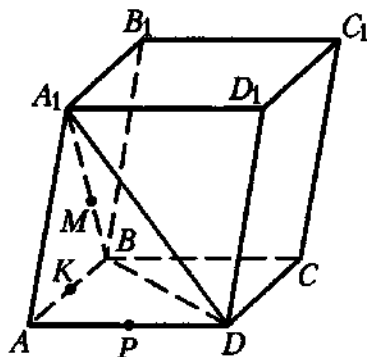


Рис. 26

§ 4. Параллельность плоскостей

1.

1. Дано: $\angle EMC = \angle MCA$ и $\angle PEB = \angle EBC$ (рис. 27). Докажите, что плоскости MEP и ABC параллельны.
2. Отрезок CD лежит в плоскости α . Концы отрезка EM лежат на параллельных плоскостях α и β (рис. 28). Постройте линии пересечения плоскостей ECD , EMC и EMD с плоскостью β .

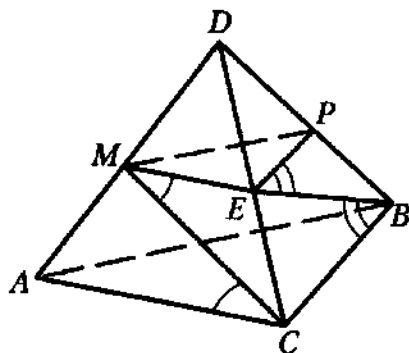


Рис. 27

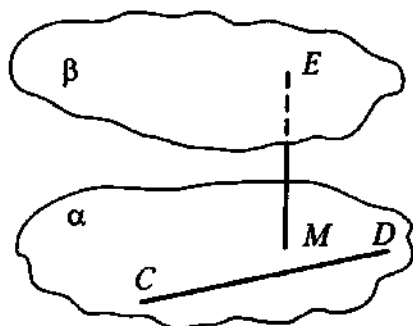


Рис. 28

2.

1. Дано: $\frac{DE}{DA} = \frac{DK}{DC} = \frac{DM}{DB}$ (рис. 29). Докажите, что плоскости EKM и ABC параллельны.
2. Концы отрезков AB и CD лежат на параллельных плоскостях α и β (рис. 30). Постройте линии пересечения плоскости ABC с плоскостью α и плоскости BDC с плоскостью β .

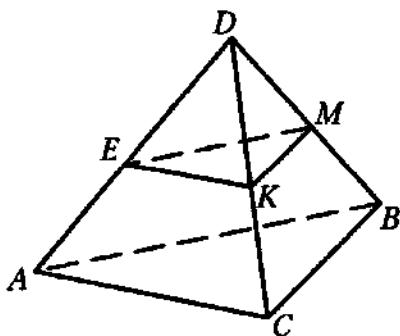


Рис. 29

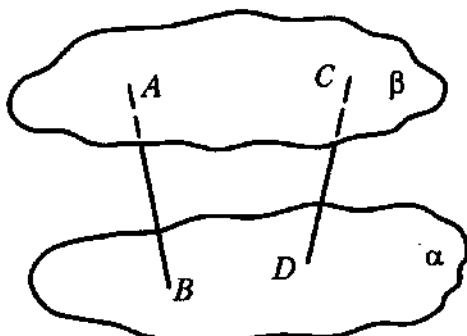


Рис. 30

3.

1. На рис. 31 $EF \parallel E_1F_1$ и $EM \parallel E_1M_1$. Докажите, что $\angle DFM = \angle DF_1M_1$.
2. Отрезки AB и CD лежат соответственно в параллельных плоскостях α и β (рис. 32). Что можно сказать о взаимном расположении прямых AD и BC ?

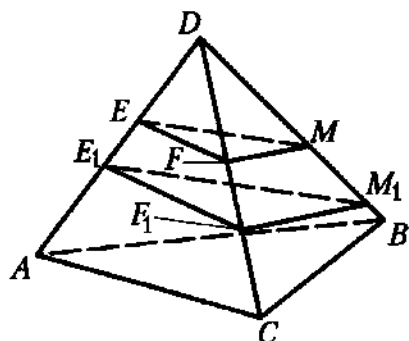


Рис. 31

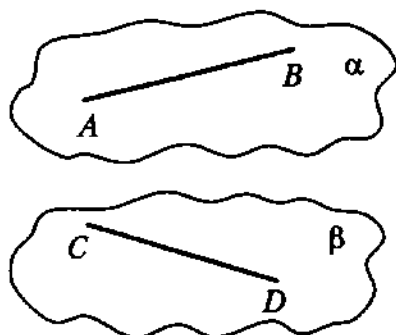


Рис. 32

4.

1. На рис. 33 $a \parallel b \parallel c$ и не лежат в одной плоскости. $AB \parallel A_1B_1$ и $BC \parallel B_1C_1$. Докажите, что $AC = A_1C_1$.
2. Отрезки AB и CD лежат соответственно в параллельных плоскостях α и β (рис. 34). Что можно сказать о взаимных положениях прямых AC и BD ?

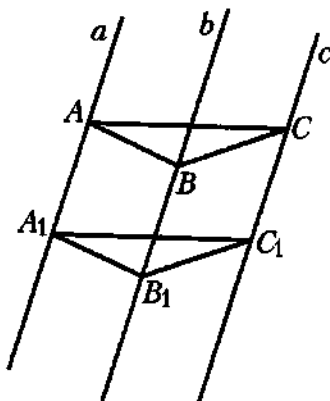


Рис. 33

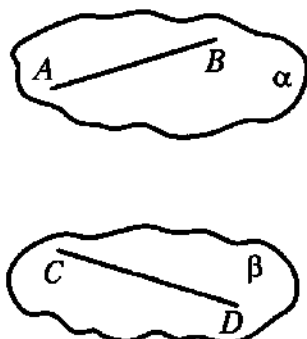


Рис. 34

5.

1. Три плоскости параллельны. Скрещивающиеся прямые l_1 и l_2 пересекают эти плоскости в точках A_1, A_2, A_3 и B_1, B_2, B_3 . Известно, что $B_1B_2 = 5$ см, $A_2A_3 = 6$ см, $A_1A_2 : B_2B_3 = 8 : 15$. Найдите длину отрезков A_1A_3 и B_1B_3 .
2. Пересекающиеся прямые p и q лежат в плоскости α ; $A \in \alpha$; $AB \parallel p$, $AC \parallel q$, $A \in \beta$; $C \in \beta$. Каково взаимное положение плоскостей α и β ?

6.

1. Три плоскости параллельны между собой. Скрещивающиеся прямые l_1 и l_2 пересекают эти плоскости соответственно в точках A_1, A_2, A_3 и B_1, B_2, B_3 ; $A_1A_2 = 4$ см, $B_2B_3 = 9$ см, $A_2A_3 = B_1B_2$. Найдите длину отрезков A_1A_3 и B_1B_3 .
2. Дано: $a \parallel \alpha$; $a \parallel \beta$; $b \parallel \alpha$; $b \parallel \beta$. Каково должно быть взаимное положение данных прямых, чтобы плоскости α и β были бы параллельными?

7.

1. На рис. 35 $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$ и $AA_1 = BB_1 = CC_1$. M лежит в плоскости AA_1C_1 . Через точку M проведена плоскость, параллельная плоскости B_1BK . Постройте линию пересечения этой плоскости с плоскостью AA_1B_1 .
2. $M \in \alpha$. Где расположены все прямые, проходящие через точку M и параллельные плоскости α ?

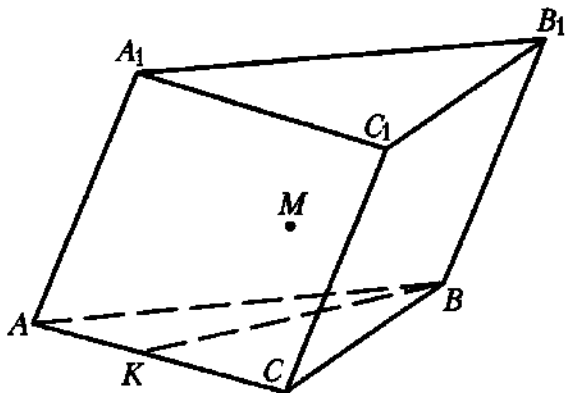


Рис. 35

8.

1. На рис. 36 $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$ и $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$. Точка M лежит в плоскости AA_1B_1 . Через точку M проведена плоскость, параллельная плоскости C_1CE . Постройте линию пересечения этой плоскости с плоскостью AA_1D_1 .
2. Дано: $\alpha \parallel \beta$. Отрезки AB и CD пересекаются в точке M . Точки A и C лежат в плоскости α , а D и B — в плоскости β . Докажите, что $\frac{AM}{MB} = \frac{CM}{MD}$.

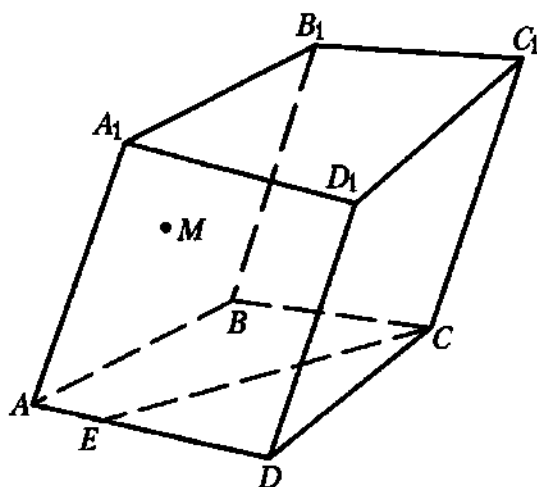


Рис. 36

§ 5. Тетраэдр и параллелепипед

1.

1. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелепипед. BE лежит в плоскости $A_1 BD$. Докажите, что BE параллельна плоскости $B_1 D_1 C$.
2. В тетраэдре $DABC$ $\angle DBC = \angle DBA = \angle ABC = 90^\circ$, $BD = BA = BC = 2$ см. Найдите площадь грани ADC .

2.

1. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелепипед. AK лежит в плоскости $AD_1 C$. Докажите, что AK параллельна плоскости $A_1 C_1 B$.
2. В тетраэдре $DABC$ $\angle DBC = \angle DBA = \angle ABC = 60^\circ$, $BD = BA = BC = 4$ см. Найдите площадь грани ADC .

3.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки E и F — середины $B_1 C_1$ и $C_1 D_1$ соответственно, $AA_1 \perp EF$. Докажите, что $B_1 D = BD_1$.
2. В тетраэдре $DABC$ $\angle DBC = \angle DBA = 60^\circ$. $BA = BC = 5$ см; $DB = 8$ см, $AC = 8$ см. Найдите площадь треугольника ADC .

4.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки P и K — середины AB и BC соответственно, $A_1 C = AC_1$. Найдите угол между прямыми DD_1 и PK .
2. В тетраэдре $DABC$ ребро $DA = 6\sqrt{2}$ см, $AB = AC = 14$ см, $\angle DAB = \angle DAC = 45^\circ$, $BC = 16$ см. Найдите площадь грани BDC .

5.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $E \in B_1 C_1$, $F \in AD$, причем $B_1 E : EC_1 = FD : AF = 5 : 2$. Докажите, что точки E и F симметричны относительно точки пересечения диагоналей параллелепипеда.
2. Докажите, что сумма квадратов ребер тетраэдра в четыре раза больше суммы квадратов отрезков, соединяющих середины противоположащих ребер.

6.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $K \in A_1 B_1$ и $P \in DC$, причем $A_1 K_1 : K_1 B = CP : PD = 3:1$. Докажите, что точки K и P симметричны относительно точки пересечения диагоналей параллелепипеда.
2. Докажите, что прямые, проходящие через вершины тетраэдра и точки пересечения медиан противоположащих грапей, пересекаются в одной точке.

7.

1. Дано: $ABCD$ — четырехугольник. $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$ и $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$, причем указанные отрезки расположены по одну сторону от плоскости ABC . Отрезки AC_1 , $A_1 C$, $B_1 D$ и BD_1 пересекаются в одной точке. Докажите, что $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелепипед.
2. В тетраэдре $DABC$ боковое ребро равно 3 см. Углы при основании в боковых гранях равны 75° . Точка A начинает двигаться по грапи ADC , затем по грани CDB и наконец по грани ADB и возвращается в исходное положение. Какой наименьший путь проходит эта точка?

8.

1. Докажите, что диагональ AC_1 параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ проходит через точку пересечения медиан сечения BDA_1 .
2. В тетраэдре $DABC$ угол при основании боковых граней равен 70° . Точка A начинает двигаться по грани ADC , затем по грани CDB и наконец по грани ADB и возвращается в исходное положение. Наименьший путь, который проходит точка, равен $12\sqrt{3}$. Найдите длину бокового ребра.

§ 6. Задачи на построение сечений

1.

1. Постройте сечение тетраэдра $DABC$ плоскостью, проходящей через точки P , M и K , где $P \in AD$, $M \in DB$ и $K \in BC$, причем $AP = PD$ и $DM = MB$.
2. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ основание $ABCD$ — квадрат со стороной, равной 8 см, остальные грани — прямоугольники. Боковое ребро равно 3 см. E — середина $A_1 B_1$. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через AC и точку E , и найдите периметр сечения.

2.

1. В тетраэдре $DABC$ $DA = DC = 13$, $AC = 10$; E — середина BC . Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точку E параллельно плоскости ADC , и найдите площадь сечения.
2. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $P \in A_1 D_1$ и $K \in B_1 C_1$. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки P и K и параллельной AA_1 .

3.

1. В тетраэдре $DABC$ точка M — середина AD , $P \in DC$ и $DP : PC = 1 : 3$. Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки M и P и параллельно BC . Найдите площадь сечения, если все ребра тетраэдра равны a .
2. Постройте сечение параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью, проходящей через точки M , P и E , где $M \in B_1 C_1$, $P \in CC_1$ и $E \in AB$.

4.

1. В тетраэдре $DABC$ точка P — середина AD , $E \in DB$, причем $DE : EB = 1 : 3$. Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки P и E и параллельной AC , и найдите площадь сечения, если все ребра тетраэдра равны a .
2. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $M \in D_1 C_1$, $P \in DD_1$ и $K \in BC$. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки M , P и K .

5.

1. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, ребро которого равно 8 см. Точки P , M и T соответственно середины ребер $A_1 B_1$, $C_1 C$ и AD . Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки P , M и T и найдите площадь сечения.
2. $DABC$ — тетраэдр. $P \in AB$; DE — медиана грани CDB . Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки C и P и параллельной DE .

6.

1. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, ребро которого равно 4 см. Диагонали оснований $ABCD$ и $A_1 B_1 C_1 D_1$ пересекаются в точках O и O_1 соответственно. P — середина AD , а T — середина CD . Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки P , T и середину отрезка OO_1 и найдите площадь сечения.
2. В тетраэдре $DABC$ $P \in AB$, CE — медиана грани DCB . Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки D и P и параллельной CE .

7.

1. В тетраэдре $DABC$ AE — высота треугольника ABC , O — середина AE ; $DO \perp AE$ и $DO \perp BC$; $K \in AC$, причем $AK:KC = 3:1$; $BC = a$; $DO = b$. Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точку K и параллельной прямым BC и DO , и найдите площадь сечения.
2. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелепипед. Точка P лежит в грани $AA_1 B_1 B$, R — в грани $AA_1 D_1 D$ и $T \in C_1 D_1$; $M \in AA_1$. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, которая проходит через точку M и параллельна плоскости PRT (рис. 37).

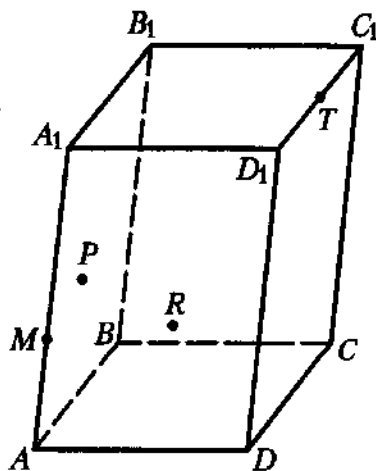


Рис. 37

8.

1. В тетраэдре $DABC$ $AC = 12$; $DB = 9$; O — точка пересечения медиан треугольника ABC . Постройте сечение тетраэдра плоскостью, которая проходит через точку O и параллельна прямым AC и DB . Найдите площадь сечения, если угол между прямыми AC и DB равен 60° .
2. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелепипед; $T \in A_1 B_1$; $M \in DD_1$; K лежит в плоскости грани $DD_1 C_1 C$, а E — в плоскости грани $AA_1 D_1 D$. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, которая проходит через точку M параллельно плоскости TEK (рис. 38).

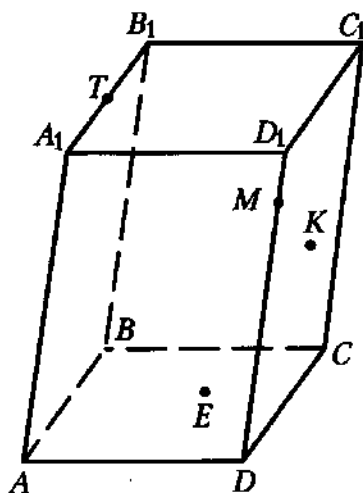


Рис. 38

§ 7. Перпендикулярность прямой и плоскости. Параллельные прямые, перпендикулярные к плоскости

1.

1. ABC — правильный треугольник, O — его центр, OM — перпендикуляр к плоскости ABC , $OM = 1$. Сторона треугольника равна 3. Найдите расстояние от точки M до вершин треугольника.
2. $ABCD$ — параллелограмм, BE и FD — перпендикуляры к плоскости ABC . Докажите, что плоскости ABE и DFC параллельны.

2.

1. $ABCD$ — квадрат со стороной, равной $\sqrt{2}$, O — точка пересечения его диагоналей, OE — перпендикуляр к плоскости ABC , $OE = \sqrt{3}$. Найдите расстояние от точки E до вершин квадрата.
2. Дан треугольник ABC . AD и BE — перпендикуляры к плоскости ABC . Каково взаимное положение линии пересечения плоскостей DAC и EBC и прямых AD и BE ?

3.

1. Отрезок AB не пересекает плоскость α , $AC \perp \alpha$ и $BD \perp \alpha$, $AC = 20$, $BD = 30$, $M \in AB$, причем $AM : MB = 2 : 3$, $MM_1 \perp \alpha$. Найдите MM_1 .
2. $a \perp \alpha$ и $a \perp \beta$. Плоскость γ пересекает плоскость α по прямой b , а плоскость β — по прямой c . Каково взаимное положение прямых b и c ?

4.

1. Отрезок AB пересекает плоскость α , $AC \perp \alpha$ и $BD \perp \alpha$, $AC = 14$; $BD = 10$, E — середина AB , $EE_1 \perp \alpha$. Найдите EE_1 .
2. $a \perp \alpha$; $b \perp a$ ($b \notin \alpha$). Через прямую b проведена плоскость β , пересекающая плоскость α по прямой c . Каково взаимное положение прямых b и c ?

5.

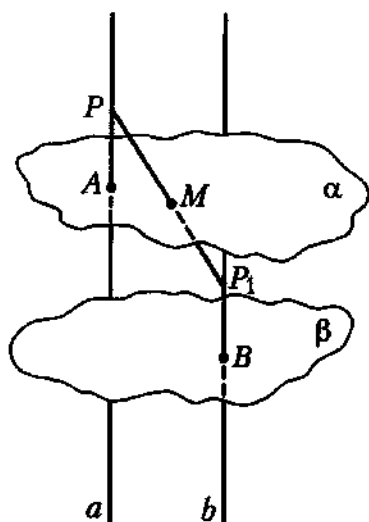


Рис. 39

1. Через вершину A треугольника ABC проведена плоскость α , параллельная BC , $BB_1 \perp \alpha$ и $CC_1 \perp \alpha$; $CC_1 = 4$; $AC_1 = \sqrt{209}$; $AB_1 = \sqrt{33}$. $\angle BAC = 60^\circ$. Найдите BC .
2. Плоскости α и β параллельны. $a \perp \alpha$ и пересекает плоскость α в точке A , $b \perp \beta$ и пересекает плоскость β в точке B , PP_1 пересекает плоскость α в точке M . Постройте точки пересечения прямой a с плоскостью β и прямой b с плоскостью α . Дайте обоснование (рис. 39).

6.

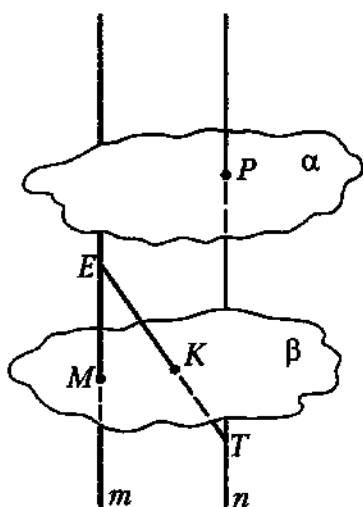


Рис. 40

1. Через вершину E треугольника EFM проведена плоскость α , параллельная FM , $MM_1 \perp \alpha$, $MM_1 = 12$ см; P — точка пересечения медиан треугольника, $PP_1 \perp \alpha$. Найдите PP_1 .
2. Плоскости α и β параллельны, $m \perp \beta$ и $n \perp \alpha$. Прямая n пересекает плоскость α в точке P , а прямая m пересекает плоскость β в точке M . Прямая ET пересекает плоскость β в точке K . Постройте точки пересечения прямой m с плоскостью α и прямой n с плоскостью β . Дайте обоснование (рис. 40).

7.

1. $ABCD$ — параллелограмм. Из точек A , B , C и D на плоскость α опущены перпендикуляры AA_1 , BB_1 , CC_1 и DD_1 . $AA_1 = 13$; $BB_1 = 36$ и $CC_1 = 19$. Найдите DD_1 .
2. На данной прямой найдите точки, равноудаленные от двух данных точек.

8.

1. Плоскость α параллельна наибольшей средней линии прямоугельного треугольника ABC ($\angle C = 90^\circ$). $AA_1 \perp \alpha$; $BB_1 \perp \alpha$ и $CC_1 \perp \alpha$; $C_1B_1 = 11$ см; $C_1A_1 = 12$ см; $A_1B_1 = 19$ см. Найдите площадь треугольника.
2. На данной плоскости найдите точки, равноудаленные от двух данных точек.

§ 8. Признак перпендикулярности прямой и плоскости

1.

1. $ABCD$ — квадрат, $EA \perp BC$; $K \in EB$. Докажите, что $BC \perp AK$.
2. Через сторону AC треугольника ABC ($\angle C = 90^\circ$) проведена плоскость α . $BB_1 \perp \alpha$, $CB_1 \perp AC$, $AB = 25$, $AC = 24$. Найдите площадь треугольника ABC .

2.

1. Дан прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$), $E \in BC$, $EM \perp ABC$. Докажите, что $AC \perp MB$.
2. $ABCD$ — параллелограмм. $AD = 4$, $CD = 6$. Отрезок MC перпендикулярен плоскости ABC , $MD \perp AD$. Найдите площадь параллелограмма.

3.

1. $ABCD$ — квадрат. Отрезок MD перпендикулярен плоскости ABC . Докажите, что $MB \perp AC$.
2. $ABCD$ — прямоугольник. Отрезок AE перпендикулярен плоскости ABC . $EB = 15$, $EC = 24$, $ED = 20$. Доказать, что треугольник EDC прямоугольный и найти AE .

4.

1. Треугольник ABC — равнобедренный, $AB = AC$, точка D — середина BC , прямая ED перпендикулярна плоскости ABC . Докажите, что $AE \perp BC$.
2. Точка A принадлежит окружности, AK — перпендикуляр к ее плоскости, $AK = 1$ см, AB — диаметр, BC — хорда окружности, составляющая с AB угол 45° . Радиус окружности равен 2 см. Докажите, что треугольник KCB прямоугольный и найдите KC .

5.

1. В тетраэдре $DABC$ $AB = BC$, $\angle DBC = \angle DBA$. Докажите, что $AC \perp DB$.
2. $DABC$ — тетраэдр, все ребра которого равны a , точка E — середина BC . Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точку E и перпендикулярной DB , и найдите площадь сечения.

6.

1. В тетраэдре $DABC$ $\angle DAC = \angle DAB$ и $\angle ADC = \angle ADB$. Докажите, что $BC \perp AD$.
2. В тетраэдре $DABC$ ребро DB перпендикулярно плоскости ABC . $\angle ACB = 90^\circ$, $BC = BD$, точка F — середина AD . Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точку F и перпендикулярной CD .

7.

1. Все грани параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — равные ромбы; углы между ребрами, имеющие общую точку A_1 , равны. Докажите, что $A_1 C \perp B_1 D_1$.
2. Все грани параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямоугольники. M — внутренняя точка сечения $AA_1 C_1 C$. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку M и перпендикулярной BB_1 .

8.

1. В параллелепипеде $MPKHM_1 P_1 K_1 H_1$ все грани — ромбы, $\angle M_1 M H + \angle M_1 M P = 180^\circ$. Докажите, что $P_1 H \perp MK$.
2. Все грани параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямоугольники. M — внутренняя точка сечения $AA_1 C_1 C$. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку M и перпендикулярной BC .

§ 9. Расстояние от точки до плоскости

1.

Из точки M к плоскости α проведены две наклонные, длина которых 18 см и $2\sqrt{109}$ см. Их проекции на эту плоскость относятся как 3 : 4. Найдите расстояние от точки M до плоскости α .

2.

Из точки M к плоскости α проведены две наклонные, которые образуют со своими проекциями на плоскость α углы 30° . Угол между наклонными равен 90° . Найдите расстояние между основаниями наклонных, если расстояние от точки M до плоскости α равно $\sqrt{2}$ см.

3.

Плоскости α и β параллельны. Из точки M (плоскости α и β расположены по одну сторону от точки M) проведены две прямые. Первая прямая пересекает плоскости α и β соответственно в точках A и B , а вторая — в точках C и D , $AM = CD$, $MC = 16$, $AB = 25$. Расстояние от точки M до плоскости α равно 12. Найдите расстояние между плоскостями.

4.

Точка M расположена между параллельными плоскостями α и β . Через точку M проведены две прямые. Первая прямая пересекает плоскость α в точке A , а плоскость β — в точке B . Вторая пересекает эти плоскости соответственно в точках C и D ; $MA = MD$; $MC = 32$; $MB = 50$. Расстояние от точки M до плоскости α равно 24. Найдите расстояние между плоскостями.

5.

Вершины A и D параллелограмма $ABCD$ лежат в плоскости α , а две другие — вне этой плоскости, $AB = 15$ см, $BC = 19$ см. Проекции диагоналей параллелограмма на плоскости α равны 20 и 22 см. Найдите расстояние от стороны BC до плоскости α .

6.

Одно из оснований трапеции вдвое больше другого. Средняя линия трапеции параллельна плоскости α и удалена от нее на 13 см, точка пересечения диагоналей трапеции удалена от плоскости на 15 см. Найдите расстояние от оснований трапеции до плоскости α .

7.

Дан квадрат $ABCD$ со стороной, равной 1, $MB \perp ABC$, $MB = 1$. Найдите расстояние между прямыми AC и MD .

8.

Отрезки AB и CD упираются своими концами в две параллельные плоскости α и β , причем точки A и C лежат в плоскости α , а точки B и D — в плоскости β , $AB \perp \alpha$. Найдите расстояние между AB и CD , если $AB = 20$; $CO = 25$; $AC = 14$ и $BD = 13$.

§ 10. Теорема о трех перпендикулярах.

Угол между прямой и плоскостью

1.

1. В треугольнике ABC $AB = BC = 25$, $AC = 48$, BD — перпендикуляр к плоскости ABC . $BD = \sqrt{15}$. Найдите расстояние от точки D до прямой AC .
2. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $ABCD$ — квадрат со стороной, равной 2 см. Все боковые грани — прямоугольники. $B_1 D = 5$ см. Найдите углы между $B_1 D$ и плоскостью ABC и между $B_1 D$ и плоскостью $DD_1 C_1$.

2.

1. Треугольник ABC — прямоугольный ($\angle C = 90^\circ$). $\angle A = 30^\circ$, $AC = a$, $MC \perp ABC$, $MC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Найдите расстояние от точки M до прямой AB .
2. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $ABCD$ — прямоугольник. Все боковые грани тоже прямоугольники. $AD = 12$, $CD = 5$, $A_1 C = 15$. Найдите углы между $A_1 C$ и плоскостью ABC и между $A_1 C$ и плоскостью $BB_1 C_1$.

3.

1. $ABCD$ — ромб со стороной, равной a , $\angle A = 60^\circ$, $AM \perp ABC$, $AM = \frac{a}{2}$. Найдите расстояние от точки M до прямой CD .
2. В треугольнике ABC $AC = CB = 8$, $\angle ACB = 130^\circ$. Точка M удалена от плоскости ABC на расстояние, равное 12, и находится на равном расстоянии от вершин треугольника ABC . Найдите угол между MA и плоскостью ABC .

4.

1. В треугольнике ABC $AC = BC = m$; $\angle ACB = 120^\circ$; $PA \perp ABC$. Точка P удалена на расстояние, равное m , от прямой BC . Найдите расстояние от точки P до плоскости ABC .
2. Треугольник ABC — прямоугольный ($\angle C = 90^\circ$), $\angle A = 20^\circ$; $AC = 15$. Точка M удалена на расстояние, равное 25, от каждой вершины треугольника. Найдите угол между MC и плоскостью ABC .

5.

1. Точка M удалена от каждой стороны равнобедренной трапеции на расстояние, равное 12 см. Основания трапеции равны 18 см и 32 см. Найдите расстояние от точки M до плоскости трапеции.
2. Через вершину A прямоугольника $ABCD$ проведена наклонная AM к плоскости прямоугольника, составляющая угол 50° со сторонами AD и AB . Найдите угол между этой наклонной и плоскостью прямоугольника.

6.

1. Средняя линия прямоугольной трапеции равна 6. Острый угол равен 30° . Точка M удалена от плоскости трапеции на расстояние, равное $2\sqrt{3}$, и находится на равном расстоянии от ее сторон. Найдите расстояние от точки M до сторон трапеции.
2. Через вершину A прямоугольника $ABCD$ проведена прямая AM , составляющая с плоскостью прямоугольника угол 40° , $\angle MAD = \angle MAB$. Найдите эти углы.

7.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все грани — квадраты, E и F — середины ребер AD и AA_1 соответственно, K — точка пересечения диагоналей грани $DD_1 C_1 C$. Докажите, что $B_1 E \perp FK$.
2. В тетраэдре $DABC$ ABC — правильный треугольник со стороной, равной $2\sqrt{3}$. $DA = DB = DC$, $DO \perp ABC$; $DO = \sqrt{3}$. Найдите угол между AC и плоскостью BDC .

8.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все грани — прямоугольники. K — середина AA_1 , L — точка пересечения диагоналей грани $DD_1 C_1 C$; $E \in AD$; $AD = 4$; $CD = 2$; $AE = \frac{1}{2}$. Докажите, что $B_1 E \perp KL$.
2. $ABCD$ — квадрат. O — точка пересечения его диагоналей. $MO \perp ABC$, F — середина AB . Сторона квадрата равна 4, $MO = 2\sqrt{3}$. Найдите угол между FD и плоскостью DMC .

§ 11. Двугранный угол

1.

1. Чему равен угол между ребром двугранного угла и любой прямой, лежащей в плоскости его линейного угла?
2. Треугольник ABC — прямоугольный ($\angle C = 90^\circ$), $\angle A = 30^\circ$, $AC = a$, $DC \perp ABC$. $DC = \frac{\sqrt{3}}{2}a$. Чему равен угол между плоскостями ADB и ACB ?

2.

1. Плоскость α пересекают грани двугранного угла по прямым AB и AC . Две пересекающиеся прямые, лежащие в плоскости α , перпендикулярны к ребру этого угла. Докажите, что $\angle BAC$ — линейный угол этого двугранного угла.
2. $ABCD$ — ромб. $\angle A = 60^\circ$, $AB = m$, $BE \perp ABC$, $BE = \frac{m\sqrt{3}}{2}$. Найдите угол между плоскостями AED и ABC .

3.

1. На гранях двугранного угла взяты две точки, удаленные от ребра двугранного угла на 6 см и 10 см. Известно, что одна из этих точек удалена от второй грани на 7,5 см. Найдите расстояние от второй точки до противоположной грани двугранного угла.
2. Через сторону ромба $ABCD$ проведена плоскость α . Сторона AB составляет с этой плоскостью угол 30° . Найдите угол между плоскостью ромба и плоскостью α , если острый угол ромба равен 45° .

4.

1. Две точки лежат на грани двугранного угла и удалены от второй грани соответственно на 48 см и 60 см. Одна из этих точек отстоит от ребра двугранного угла на 50 см. Найдите расстояние от второй точки до ребра двугранного угла.
2. Через вершину прямого угла C равнобедренного прямоугольного треугольника ABC проведена плоскость α , параллельная гипотенузе и составляющая с катетом угол 30° . Найдите угол между плоскостью ABC и плоскостью α .

5.

1. Концы отрезка $AB = 25$ см лежат на гранях двугранного угла, равного 60° . Из точек A и B опущены перпендикуляры AC и BD на ребро двугранного угла. $AC = 5$ см, $BD = 8$ см. Найдите CD .
2. $ABCD$ — квадрат, O — точка пересечения диагоналей, $OM \perp ABC$, $OM = 3$. Сторона квадрата равна $4\sqrt{2}$. Найдите угол между плоскостями BMC и DMC .

6.

1. Концы отрезка $AB = 16$ см лежат на гранях двугранного угла, равного 120° . Из точек A и B опущены перпендикуляры AC и BD на ребро двугранного угла. Найдите CD , если $AC = 7$ см и $BD = 11$ см.
2. ABC — правильный треугольник, O — середина AC , $OD \perp ABC$, $OD = 3$. Сторона треугольника равна $\frac{8\sqrt{3}}{3}$. Найдите угол между плоскостями ABD и CBD .

7.

1. Равнобедренные треугольники ABC и ADC образуют острый двугранный угол (рис. 41). Прямая m , которая перпендикулярна к ребру угла AC , пересекает одну из граней в точке X . Постройте точку пересечения этой прямой с другой гранью.
2. $ABCD$ — квадрат со стороной, равной a , $BM \perp ABC$, $BM = a$. Найдите двугранный угол, образованный гранями AMD и CMD .

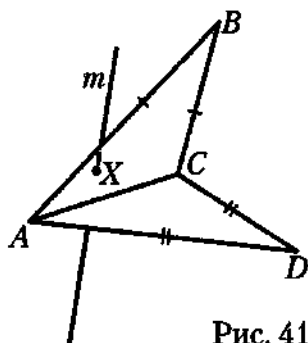


Рис. 41

8.

1. В плоскостях α и β расположены равнобедренные трапеции $ABCD$ и $ADEF$ (рис. 42). Прямая a перпендикулярна ребру острого двугранного угла, образованного этими плоскостями. Прямая a пересекает плоскость β в точке X . Постройте точку ее пересечения с плоскостью α .
2. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все грани — квадраты. Найдите величину двугранного угла, который образован сечениями параллелепипеда $AB_1 C_1 D$ и $CB_1 A_1 D$.

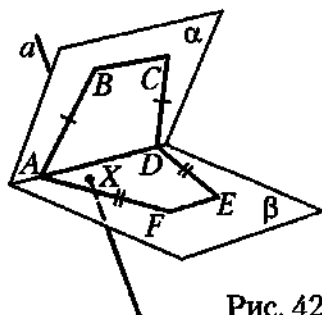


Рис. 42

§ 12. Перпендикулярные плоскости.

Прямоугольный параллелепипед

1.

1. Треугольник AMB и прямоугольник $ABCD$ расположены так, что их плоскости взаимно перпендикулярны. Докажите, что угол MAD — прямой.
2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки E , F и K — середины ребер $A_1 B_1$, $A_1 D_1$ и AD соответственно; $AB = 4$, $AA_1 = 6$, $A_1 C = \sqrt{56}$.
 - 1) Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки E , F и K , и докажите, что плоскости сечения и основания взаимно перпендикулярны.
 - 2) Найдите AD .

2.

1. Прямоугольник $ABCD$ и параллелограмм $BEMC$ расположены так, что их плоскости взаимно перпендикулярны. Докажите, что $\angle MCD$ — прямой.
2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точка E — середина $C_1 D_1$, $AD = 5$, $AB = 4$, $B_1 D = \sqrt{77}$.
 - 1) Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через AD и точку E и докажите, что плоскость сечения перпендикулярна плоскости боковой грани $DD_1 C_1 C$.
 - 2) Найдите AA_1 .

3.

1. Два правильных треугольника ABC и DBC расположены так, что их плоскости взаимно перпендикулярны. Найдите тангенс двугранного угла, образованного плоскостями ADC и ABC .
2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ основание $ABCD$ — квадрат, $AD = 2$; $AC_1 = 2\sqrt{6}$.
 - 1) Найдите CC_1 .
 - 2) Докажите, что плоскости ACC_1 и $BB_1 D_1$ взаимно перпендикулярны.

4.

1. Сторона правильного треугольника ABC равна 4. Треугольник DBC — равнобедренный ($DB = DC$). Их плоскости взаимно перпендикулярны. Плоскость ADC составляет с плоскостью ABC угол 60° . Найдите площадь треугольника DBC .
2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ боковая грань $DD_1 C_1 C$ — квадрат, $DC = 3$; $BD_1 = \sqrt{22}$.
 - 1) Найдите BC .
 - 2) Докажите, что плоскости BCD_1 и $DC_1 B_1$ взаимно перпендикулярны.

5.

1. В прямоугольнике $ABCD$ $AB = 3$; $AD = 4$. Этот прямоугольник перегнут по диагонали AC так, что образовался прямой двугранный угол. Найдите расстояние между вершинами B и D .
2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $AB = 4$; $AB_1 = 15$; $B_1 D = \sqrt{305}$. Найдите расстояние между AB и $B_1 D$ и изобразите на рисунке общий перпендикуляр этих скрещивающихся прямых.

6.

1. В параллелограмме $ABCD$ $AB = 4$; $AC = 5$. $\angle BAC = 60^\circ$. Этот параллелограмм перегнут по диагонали AC так, что образовался прямой двугранный угол. Найдите расстояние между вершинами B и D .
2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ основание $ABCD$ — квадрат со стороной 5 см. Расстояние между BC и AC_1 равно 4 см. Найдите AC_1 и изобразите на рисунке общий перпендикуляр этих скрещивающихся прямых.

7.

1. Катет и гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника лежат в разных гранях прямого двугранного угла. Вершина прямого угла треугольника удалена от ребра на расстояние, равное 2 см, а вершина острого угла — расстояние, равное $\sqrt{15}$ см. Найдите площадь треугольника.
2. Стороны основания и боковое ребро прямоугольного параллелепипеда равны 3, 4 и 14 см. Найдите площадь сечения, проведенного через середины двух смежных сторон основания и точку пересечения диагоналей параллелепипеда.

8.

1. Два равных квадрата $ABCD$ и $CEFK$ расположены в двух взаимно перпендикулярных плоскостях так, что их стороны CD и CE лежат на линии пересечения этих плоскостей по разным сторонам от общей вершины C . Найдите угол между прямыми DB и EK .
2. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $AD = 4$; $CD = 3$ и $CC_1 = 14$. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через середины AD и DC и параллельной $B_1 D$. Найдите площадь сечения.

§ 13. Прямые призма и параллелепипед

1.

1. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, а боковое ребро — $2\sqrt{3}$, M — центр грани CC_1B_1B . Найдите угол между прямой AM и плоскостью основания.
2. В правильной четырехугольной призме стороны основания равны 4 см. Через диагональ основания под углом 45° к плоскости основания проведена плоскость, пересекающая боковое ребро. Найдите площадь сечения.

2.

1. В правильной четырехугольной призме $ABCD A_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна 1, а боковое ребро — $\sqrt{5}$, K — центр грани AA_1B_1B . Найдите угол между прямой KC и плоскостью основания.
2. В правильной треугольной призме через среднюю линию основания под углом 60° к плоскости основания проведена плоскость, пересекающая боковое ребро. Найдите площадь сечения, если сторона основания равна 4 см.

3.

1. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 4 см. Через середину A_1C_1 и сторону основания BC проведена плоскость. Найдите площадь сечения, если длина бокового ребра равна 2 см.
2. В прямом параллелепипеде $ABCD A_1B_1C_1D_1$ основанием служит ромб со стороной, равной a , $\angle BAD = 60^\circ$. Через сторону AD и вершину B_1 проведена плоскость, составляющая с плоскостью основания угол 45° . Найдите длину бокового ребра и площадь сечения.

4.

1. В правильной четырехугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона основания равна a , а боковое ребро — $\frac{a\sqrt{14}}{4}$. Через диагональ основания BD и середину $D_1 C_1$ проведена плоскость. Найдите площадь сечения.
2. В прямом параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ основанием служит ромб со стороной, равной m , $\angle ADC = 135^\circ$. Через сторону DC и вершину A_1 проведена плоскость под углом 60° к плоскости основания. Найдите длину бокового ребра и площадь сечения.

5.

1. В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ все ребра равны $2\sqrt{3}$. Через сторону основания под углом 60° к его плоскости проведена плоскость. Найдите площадь сечения.
2. Площадь боковой грани правильной шестиугольной призмы равна Q . Найдите площадь сечения, перпендикулярного к меньшей диагонали основания и делящего эту диагональ пополам.

6.

1. В правильной четырехугольной призме сторона основания равна 8 см, а боковое ребро — $3\sqrt{2}$ см. Через диагональ основания под углом 45° к его плоскости проведено сечение. Найдите его площадь.
2. Площадь боковой грани правильной шестиугольной призмы равна Q . Найдите площадь сечения, которое перпендикулярно к большей диагонали основания и делит эту диагональ пополам.

7.

1. В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ все ребра равны между собой. Найдите угол между диагоналями AC_1 и $B_1 C$ ее боковых граней.
2. В правильной шестиугольной призме меньшая диагональ основания равна боковому ребру. Проведено сечение, которое перпендикулярно меньшей диагонали призмы и делит ее пополам. Найдите площадь сечения, если сторона основания равна a .

8.

1. В прямой треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ основанием служит прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$), $AC = 4$; $BC = 3$, $BB_1 = 4$. Найдите угол между диагоналями AC_1 и B_1C двух боковых граней.
2. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ сторона основания равна a , а боковое ребро — $2a$. Через середину диагонали F_1C и перпендикулярно к ней проведено сечение. Найдите его площадь.

§ 14. Площадь поверхности прямой призмы

1.

В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит прямоугольный треугольник ACB ($\angle C = 90^\circ$), $AC = 4$, $BC = 3$. Через сторону AC и вершину B_1 проведена плоскость; $\angle B_1AC = 60^\circ$. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

2.

В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит прямоугольный треугольник ACB ($\angle C = 90^\circ$). Через сторону BC и вершину A_1 проведена плоскость; $\angle BA_1C = 30^\circ$, $A_1B = 10$, $AC = 5$. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

3.

В прямом параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $AB = 1$, $BC = 7\sqrt{3}$. $\angle ABC = 150^\circ$. Через диагональ AC и вершину B_1 проведена плоскость, составляющая с плоскостью основания угол в 60° . Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.

4.

В прямом параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $BC = 7$; $CD = 15$. $\angle BCD = 60^\circ$. Через диагональ BD и вершину C_1 проведена плоскость под углом 45° к плоскости основания. Найдите площадь боковой поверхности.

5.

В прямой призме $ABCA_1B_1C_1$ $AB = 13$; $BC = 21$; $AC = 20$. Диагональ боковой грани A_1C составляет с плоскостью грани CC_1B_1B угол 30° . Найдите площадь полной поверхности призмы.

6.

В прямом параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $AD = 17$; $DC = 28$; $AC = 39$. Диагональ боковой грани A_1D составляет с плоскостью боковой грани DD_1C_1C угол 45° . Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

7.

Основанием прямого параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ служит ромб $ABCD$. Угол между ребром AA_1 и диагональю $B_1 D$ равен 60° , а расстояние между ними равно 3 см. Расстояние между диагональю основания AC и $B_1 D$ равно 2 см. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

8.

Основанием прямого параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ служит ромб $ABCD$, $\angle BAD = 60^\circ$. Длина бокового ребра равна 4 см, а расстояние между AD и $D_1 C$ равно $\frac{12}{5}$ см. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

§ 15. Наклонная призма. Площадь поверхности

1.

1. В наклонной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ основанием служит прямоугольный треугольник ACB ($\angle C = 90^\circ$). Плоскость грани AA_1C_1C перпендикулярна к плоскости основания. Докажите, что CC_1B_1B — прямоугольник.
2. В наклонной треугольной призме площади двух граней равны 70 см^2 и 105 см^2 , угол между ними 60° . Боковое ребро равно 10 см. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

2.

1. Основанием наклонного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ служит прямоугольник $ABCD$. Грань $AA_1 D_1 D$ перпендикулярна к плоскости основания. Докажите, что $DD_1 C_1 C$ — прямоугольник.
2. В наклонной треугольной призме площади двух граней равны 15 см^2 и 25 см^2 . Угол между ними 120° . Длина бокового ребра равна 5 см. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

3.

1. Основанием наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит правильный треугольник со стороной, равной a . Длина бокового ребра равна b , $\angle A_1AC = \angle A_1AB$. Найдите площадь грани CC_1B_1B .
2. В наклонном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ боковое ребро равно 10, а площадь боковой поверхности — 420. Расстояние между ребрами AA_1 и DD_1 на 11 больше расстояния между ребрами AA_1 и BB_1 . Расстояние между ребрами BB_1 и DD_1 , равно 19. Найдите углы между смежными боковыми гранями.

4.

1. В наклонном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ основанием служит квадрат $ABCD$ со стороной, равной a , $AA_1 = b$, $\angle A_1AD = \angle A_1AB$. Найдите площадь диагонального сечения $BB_1 D_1 D$.
2. В наклонном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ боковое ребро равно 10, а площадь боковой поверхности — 880. Расстояния от ребра DD_1 до ребер CC_1 и AA_1 относятся, как 7 : 15. Расстояние между ребрами AA_1 и CC_1 равно 26. Найдите углы между смежными боковыми гранями параллелепипеда.

5.

1. В наклонной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра равны между собой. Ребро AA_1 составляет с плоскостью основания угол 60° , $\angle A_1AC = \angle A_1AB < 90^\circ$. Площадь грани CC_1B_1B равна Q . Найдите площадь боковой поверхности призмы.
2. В наклонном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ расстояние от ребра AA_1 до ребра DD_1 равно 10, а от AA_1 до BB_1 — 17. Площадь диагонального сечения $BB_1 D_1 D$ равна 210. Расстояние между ребром AA_1 и диагональю $B_1 D$ равно 8. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.

6.

1. В наклонном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ основанием служит квадрат $ABCD$. Все ребра параллелепипеда равны между собой. Боковое ребро AA_1 составляет с плоскостью основания угол 60° , $\angle A_1AD = \angle A_1AB < 90^\circ$. Площадь диагонального сечения $BB_1 D_1 D$ равна Q . Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.
2. В наклонной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ двугранные углы с ребрами CC_1 и BB_1 соответственно равны 45° и 30° . Расстояние от ребра AA_1 до диагонали B_1C грани CC_1B_1B равно 1. Площадь грани CC_1B_1B равна $4(1 + \sqrt{3})$. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

7.

1. Основанием наклонного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ служит ромб $ABCD$, $AC = 40$; $BD = 30$; $AA_1 = 2\sqrt{17}$, $\angle A_1AD = \angle A_1AB < 90^\circ$. Высота параллелепипеда равна 2. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.
2. Основанием наклонной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$), у которого $BC = a$. Вершина B_1 проектируется в точку C . Двугранный угол с ребром BB_1 равен φ . Боковые ребра составляют с плоскостью основания угол α . Найдите площадь боковой поверхности призмы.

8.

1. В наклонном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ основанием служит параллелограмм $ABCD$, $AD = 15$, $BD = 7$, $\angle BDA = 60^\circ$. $\angle A_1 AD = \angle A_1 AB < 90^\circ$, $A_1 D$ составляет с плоскостью основания угол 45° . Вершина A_1 проектируется на BD . Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.
2. Основанием наклонной призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ служит прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$). Вершина B_1 проектируется на середину BC . Боковое ребро равно l и составляет с плоскостью основания угол φ . Двугранный угол с ребром BB_1 равен α . Найдите площадь боковой поверхности призмы.

§ 16. Правильная пирамида

1.

1. В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 4 см, а длина диагонали основания — $6\sqrt{2}$ см. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.
2. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a , а высота — $2a$. Найдите углы наклона боковых ребер и боковых граней к плоскости основания.

2.

1. В правильной треугольной пирамиде высота равна 12 см, а высота основания — 15 см. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.
2. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна a , а высота — $3a$. Найдите углы наклона боковых ребер и боковых граней к плоскости основания.

3.

1. В правильной треугольной пирамиде боковые грани наклонены к основанию под углом 60° . Расстояние от вершины основания до боковой грани равно $3\sqrt{3}$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
2. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 4 см, а расстояние от центра основания до бокового ребра — 2 см. Найдите:
 - 1) угол между смежными боковыми гранями;
 - 2) плоский угол при вершине пирамиды.

4.

1. В правильной четырехугольной пирамиде боковые грани наклонены к основанию под углом 60° , а расстояние от середины стороны основания до противоположной боковой грани равно $4\sqrt{3}$. Найдите площадь боковой поверхности.
2. В правильной треугольной пирамиде высота основания равна $2\sqrt{3}$, а расстояние от середины стороны основания до противоположного бокового ребра — 3 см. Найдите:
 - 1) угол между боковыми гранями;
 - 2) плоский угол при вершине пирамиды.

5.

1. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна a , угол между смежными боковыми гранями равен 120° . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
2. В правильной n -угольной пирамиде боковые грани наклонены к основанию под углом φ . Найдите плоский угол при вершине пирамиды и вычислите его при $\varphi = 40^\circ$ и $n = 10$.

6.

1. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна m . Угол между смежными боковыми гранями равен 120° . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
2. В правильной n -угольной пирамиде плоский угол при вершине равен α . Найдите угол наклона боковых граней к плоскости основания и вычислите его, если $\alpha = 10^\circ$ и $n = 20$.

7.

1. В правильной треугольной пирамиде $MABC$ сторона основания равна a , а высота — $2a$. Найдите угол между стороной основания AC и плоскостью грани CMB .
2. В правильной шестиугольной пирамиде $PABCDEF$ сторона основания равна a , угол между гранями PBC и PAF равен α . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

8.

1. В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ сторона основания равна a , а высота — $a\sqrt{2}$. Найдите угол между боковым ребром MA и плоскостью DMC .
2. В правильной шестиугольной пирамиде сторона основания равна a , угол между смежными боковыми гранями φ . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

§ 17. Неправильная пирамида.

Площадь поверхности

1.

1. Основанием пирамиды $MABC$ служит прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$), $BC = a$, $\angle A = 30^\circ$. Боковые ребра пирамиды наклонены к основанию под углом 60° . Найдите высоту пирамиды.
2. В пирамиде $MABC$ боковое ребро MA перпендикулярно к плоскости основания ABC , а грань MBC составляет с ним угол 60° , $AB = AC = 10$, $BC = 16$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

2.

1. В основании пирамиды $MABC$ лежит треугольник ABC , у которого $AB = a$ и $\angle ACB = 150^\circ$. Боковые ребра наклонены к основанию под углом 45° . Найдите высоту пирамиды.
2. Основанием пирамиды $PEFM$ служит равнобедренный треугольник, $EF = EM$, $MF = 20\sqrt{6}$. Боковое ребро PE равно 10 и перпендикулярно к плоскости основания. Угол между PE и плоскостью MPF равен 60° . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

3.

1. Основанием пирамиды служит равнобедренная трапеция, основания которой равны 2 см и 8 см. Боковые грани наклонены к основанию под углом 60° . Найдите высоту пирамиды и площадь ее боковой поверхности.
2. В основании пирамиды лежит ромб со стороной, равной a , и углом 60° . Боковые грани, проходящие через стороны острого угла ромба, перпендикулярны плоскости основания, а остальные две боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60° . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

4.

1. Основанием пирамиды служит ромб, сторона которого равна a , а острый угол 60° . Боковые грани наклонены к основанию под углом 45° . Найдите высоту пирамиды и площадь ее боковой поверхности.
2. В основании пирамиды $DABC$ лежит равнобедренный треугольник ABC , $AC = CB = a$, $\angle ACB = 120^\circ$. Грани DAC и DAB перпендикулярны к плоскости основания, а грань DBC составляет с ней угол 45° . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

5.

1. В основании пирамиды $MABC$ лежит треугольник ABC , у которого $AB = BC$, $AC = b$ и $\angle A = \alpha$. Боковые грани наклонены к плоскости основания под углом φ . Найдите высоту пирамиды и площадь ее боковой поверхности.
2. В основании пирамиды $MABC$ лежит треугольник ABC , у которого $AB = AC = 50$, $BC = 80$, $\angle MAC = \angle MAB < 90^\circ$. Плоскости MBC и ABC взаимно перпендикулярны. Основание высоты пирамиды удалено от грани AMC на расстояние, равное $12\sqrt{3}$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

6.

1. В основании пирамиды $MABC$ лежит треугольник ABC , у которого $AB = AC$, $BC = a$, $\angle BAC = \alpha$. Боковые ребра пирамиды равно наклонены к плоскости основания, а боковые грани, проходящие через равные стороны основания, наклонены к плоскости основания под углом φ . Найдите высоту пирамиды и площадь каждой из этих граней.
2. В основании пирамиды $MABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$), $AC = 4$ см; $BC = 3$ см. Грань MAC перпендикулярна к плоскости основания, а остальные две грани равно наклонены к плоскости основания. Расстояние от основания высоты до грани BMC равно $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

7.

1. Основанием треугольной пирамиды служит правильный треугольник со стороной, равной a . Боковые грани имеют равные площади. Высота пирамиды равна a . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
2. Если высота треугольной пирамиды проходит через точку пересечения высот основания, то суммы квадратов скрещивающихся ребер пирамиды равны между собой. Докажите.

8.

1. В пирамиде $MACB$ основанием служит равнобедренный треугольник ABC , у которого $AB = AC$, $BC = 24$, а высота $AK = 5$. Высоты боковых граней, проведенные из вершины M , равны между собой. Высота пирамиды равна 12. Найдите площадь боковой поверхности, если известно, что $\angle MAB \neq \angle MAC$.
2. Если одна из высот треугольной пирамиды проектируется в точку пересечения высот соответствующей грани, то и другая высота имеет такое же свойство. Докажите.

§ 18. Сечения в пирамиде. Усеченная пирамида

1.

1. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a , а боковые грани наклонены к нему под углом 60° . Найдите площадь сечения, проведенного через среднюю линию основания параллельно боковой грани.
2. В правильной усеченной четырехугольной пирамиде стороны оснований равны 6 см и 8 см, а боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 45° . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

2.

1. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна a , а боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 60° . Через диагональ основания параллельно боковому ребру проведена плоскость. Найдите площадь сечения.
2. В правильной треугольной усеченной пирамиде стороны оснований равны 6 см и 8 см, а боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60° . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

3.

1. В правильной четырехугольной пирамиде стороны основания равны a , а боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60° . Через центр основания параллельно боковой грани проведена плоскость. Найдите площадь сечения.
2. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде стороны оснований равны 10 см и 6 см, а площадь диагонального сечения — $8\sqrt{10}$ см². Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

4.

1. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна a , а боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60° . Через сторону основания перпендикулярно к противоположной боковой грани проведена плоскость. Найдите площадь сечения.
2. В правильной треугольной усеченной пирамиде стороны оснований равны $8\sqrt{3}$ и $6\sqrt{3}$ см. Через боковое ребро и середину противоположной стороны верхнего основания проведена плоскость. Площадь сечения равна $\frac{21\sqrt{3}}{2}$ см². Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

5.

1. В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ через середины сторон AB и AD параллельно боковому ребру AM проведена плоскость. Найдите площадь сечения, если сторона основания равна a , а боковое ребро — b .
2. В правильной треугольной усеченной пирамиде стороны оснований равны $8\sqrt{3}$ и $6\sqrt{3}$. Через вершину верхнего основания перпендикулярно к плоскости основания и параллельно противоположащей стороне основания проведена плоскость. Площадь сечения равна $4\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды и высоту полной пирамиды, частью которой является данная усеченная пирамида.

6.

1. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a , а боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60° . Через центр основания проведена плоскость, параллельная стороне основания и перпендикулярная грани, проходящей через эту сторону. Найдите площадь сечения.
2. В правильной треугольной усеченной пирамиде сторона верхнего основания равна 2. Плоский угол при вершине нижнего основания равен 60° . Через сторону верхнего основания параллельно боковому ребру проведена плоскость. Площадь сечения равна 8. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды и высоту полной пирамиды, частью которой является данная усеченная.

7.

1. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна a , а боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом 60° . Через вершину основания проведена плоскость, перпендикулярная противоположному боковому ребру. Найдите площадь сечения.
2. В основании пирамиды лежит правильный треугольник со стороной, равной $\frac{20\sqrt{3}}{3}$. Одна боковая грань перпендикулярна к плоскости основания, а остальные две наклонены к нему под равными углами. Высота пирамиды равна 12. На одном из боковых ребер выбрана точка, которая делит его в отношении $2:3$, считая от вершины. Через эту точку проведена плоскость, параллельная основанию. Найдите площадь боковой поверхности образовавшейся усеченной пирамиды.

8.

1. В основании пирамиды $MABCD$ лежит ромб с диагоналями $AC = 32$ см и $BD = 18$ см. Грани, проходящие через стороны AB и AD основания перпендикулярны к плоскости основания. Их общее ребро равно 24 см. Через точку A и середину ребра MC проведена плоскость, параллельная BD . Найдите площадь сечения.
2. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник, катеты которого 32 см и 10 см. Боковые ребра пирамиды равно наклонены к плоскости основания. Высота пирамиды равна 12 см. На боковом ребре выбрана точка, которая делит боковое ребро в отношении $1:3$, считая от вершины. Через эту точку проведена плоскость, параллельная основанию. Найдите площадь боковой поверхности образовавшейся усеченной пирамиды.

§ 19. Понятие вектора в пространстве

1.

1. Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, $ABCD$ — прямоугольник, E и F — середины ребер $B_1 C_1$ и $C_1 D_1$ соответственно. Запишите векторы с началом и концом в вершинах параллелепипеда, которые:
- 1) сонаправлены с вектором $\overrightarrow{EF}$,
 - 2) противоположно направлены вектору $\overrightarrow{AB_1}$,
 - 3) имеют длину, равную длине вектора $\overrightarrow{A_1 C_1}$.
2. Прямая a не лежит в плоскости α . Через прямую a проходит плоскость β , пересекающая плоскость α по прямой b . Даны четыре точки: $A \in a, B \in a, C \in b, D \in b$. При каком условии векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ будут коллинеарными?

2.

1. В прямом параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки K и M — середины ребер AD и DD_1 соответственно. Запишите векторы с началом и концом в вершинах параллелепипеда, которые:
- 1) противоположно направлены вектору $\overrightarrow{KM}$;
 - 2) сонаправлены с вектором $\overrightarrow{DC}$;
 - 3) имеют длину, равную длине вектора $\overrightarrow{A_1 B}$.
2. Пусть плоскость γ пересекает плоскости α и β по прямым a и b соответственно: $A \in a, B \in a, C \in b, D \in b$. Могут ли векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ быть коллинеарными? Если да, то укажите хотя бы одну из таких возможностей.

3.

1. Дана призма $ABCA_1 B_1 C_1$, $AB = AC$; $\angle A_1 AC = \angle A_1 AB$, E и F — середины ребер AC и AB соответственно. Запишите векторы с началом и концом в вершинах призмы, которые:
- 1) сонаправлены с вектором $\overrightarrow{EF}$;
 - 2) противоположно направлены вектору $\overrightarrow{C_1 C}$;
 - 3) имеют длину, равную длине вектора $\overrightarrow{CB_1}$.
2. Прямые AB и CD параллельны. Через эти прямые проведены соответственно плоскости α и β , которые пересекаются по прямой EF . Будут ли коллинеарными векторы $\overrightarrow{EF}$ и $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ и $\overrightarrow{AB}$? Если да, то почему?

4.

1. Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, $ABCD$ — ромб, $\angle A_1 A D = \angle A_1 A B$, точки E и F — середины ребер $A_1 B_1$ и $A_1 D_1$ соответственно. Запишите векторы с началом и концом в вершинах параллелепипеда, которые:
 - 1) сонаправлены с вектором $\overrightarrow{EF}$;
 - 2) противоположно направлены вектору $\overrightarrow{DC_1}$;
 - 3) имеют длину, равную длине вектора $B_1 \vec{D}$.
2. Плоскости α и β перпендикулярны к плоскости γ и пересекаются по прямой AB . Прямая CD , не принадлежащая этим плоскостям, тоже перпендикулярна плоскости γ . Будут ли коллинеарными векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$? Если да, то почему?

5.

1. В правильной треугольной пирамиде $DABC$ точки E , M , T и K — середины соответственно ребер DC , DB , BA и AC .
 - 1) Перечислите пары противоположно направленных векторов, не лежащих на одной прямой и с началом и концом в точках E , M , T и K .
 - 2) Перечислите пары равных векторов с началом и концом в точках E , M , T и K .
 - 3) Перечислите векторы, имеющие равные длины, с концами в точках E , M , T и K .
2. На рис. 43 $MABCD$ — правильная пирамида, $ME = EC$. Какие из указанных на рисунке векторов коллинеарны? Почему?

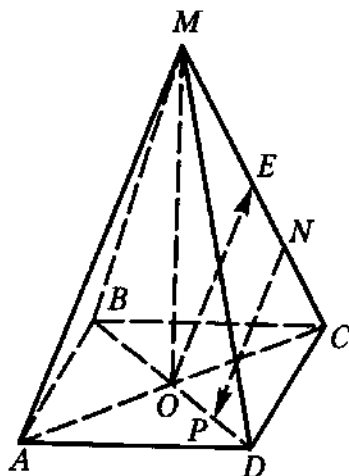


Рис. 43

6.

1. В правильной четырехугольной пирамиде $PABCD$ точки K, M, T и E — середины соответственно ребер AB, PA, PC и BC .

1) Перечислите пары сонаправленных векторов с концами в точках K, M, T и E .

2) Перечислите пары равных векторов с концами в точках K, M, T и E .

3) Перечислите векторы, имеющие равные длины, с концами в точках K, M, T и E .

2. На рис. 44 $ABCA_1B_1C_1$ — правильная призма, E и F — середины ребер CC_1 и B_1B . Какие из указанных на рисунке векторов коллинеарны? Почему?

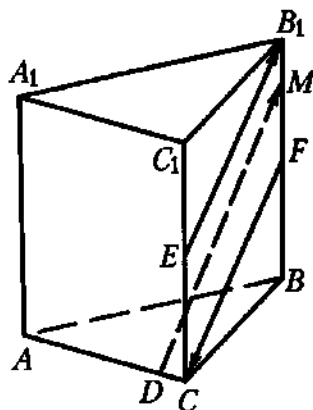


Рис. 44

7.

1. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ O — центр нижнего основания, $M \in AA_1$.

1) Запишите векторы с началом и концом в вершинах призмы, которые: а) сонаправлены с вектором $\vec{OC}$; б) равны вектору $\vec{FD}$.

2) От точки M отложите векторы, равные векторам $\vec{FD}$ и $\vec{OC}$.

2. В тетраэдре $DABC$ F и E — точки пересечения медиан граней ADB и CDB соответственно, $M \in AB$; $N \in BC$, причем $AM : MB = CN : NB$.

1) Докажите, что векторы $\vec{FE}$ и $\vec{MN}$ коллинеарны.

2) Найдите $|\vec{FE}|$, если $AC = 18$ см.

8.

1. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, O_1 — центр верхнего основания.

1) Запишите векторы с началом и концом в вершинах призмы, которые:

а) противоположно направлены вектору $\vec{O_1 F}$;

б) имеют равные с вектором $\vec{FC}$ длины.

2) От точки A_1 отложите векторы, равные векторам $\vec{B_1 D}$ и $\vec{O_1 E}$.

2. В пирамиде $PABCD$ основанием служит параллелограмм $ABCD$. P и T — точки пересечения медиан граней BPC и DPC , точки E и F — середины ребер AB и CD соответственно.

1) Докажите, что векторы $\vec{PT}$ и $\vec{FE}$ коллинеарны.

2) Найдите $|\vec{FE}|$, если $PT = 6$ см.

§ 20. Сложение и вычитание векторов

1.

1. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелепипед. Укажите вектор, равный сумме $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B_1 C_1} + \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{CD}$.
2. Докажите, что векторы $\overrightarrow{AC_1} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{C_1 A_1}$ и $\overrightarrow{A_1 A} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB}$ противоположны.

2.

1. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелепипед. Укажите вектор, равный сумме $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{C_1 D_1} + \overrightarrow{A_1 A} + \overrightarrow{DB_1}$.
2. Докажите, что векторы $-\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DF} - \overrightarrow{KF}$ и $\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MK} - \overrightarrow{EC}$ противоположны.

3.

1. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелепипед. Укажите вектор, равный сумме $\overrightarrow{B_1 C_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{CB_1} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{A_1 A}$.
2. В пирамиде $MABCD$ основанием служит прямоугольник $ABCD$, $AB = 8$ см; $BC = 15$ см. Найдите $|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{MA}|$.

4.

1. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелепипед. Укажите вектор, равный сумме $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{A_1 D_1} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$.
2. В треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ основанием служит правильный треугольник ABC , сторона которого равна $2\sqrt{3}$ см, O — середина AB . Найдите: $|\overrightarrow{A_1 A} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{A_1 C}|$.

5.

1. $EABCDF$ — правильный октаэдр с ребром, равным a . Найдите $|\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{FA}|$.
2. Два треугольника ABC и $A_1 B_1 C_1$ произвольно расположены в пространстве. Докажите, что $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{BC_1} + \overrightarrow{CA_1}$.

6.

1. $PABCDT$ — правильный октаэдр с ребром, равным a , K — середина ребра PC . Найдите: $|\overrightarrow{KD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CT} + \overrightarrow{CP}|$.
2. Два четырехугольника $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ произвольно расположены в пространстве. Докажите, что $\overrightarrow{AB}_1 + \overrightarrow{BC}_1 + \overrightarrow{CD}_1 + \overrightarrow{DA}_1 = \overrightarrow{AA}_1 + \overrightarrow{BB}_1 + \overrightarrow{CC}_1 + \overrightarrow{DD}_1$.

7.

1. Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Представить вектор $\overrightarrow{AA}_1$ как алгебраическую сумму векторов $\overrightarrow{DA}_1$, $\overrightarrow{DC}_1$ и $\overrightarrow{DB}_1$.
2. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелепипед. Укажите такую точку M , для которой верно равенство $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MA}_1 + \overrightarrow{MB}_1 + \overrightarrow{MC}_1 + \overrightarrow{MD}_1 = \vec{0}$.

8.

1. Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Представить вектор $\overrightarrow{DB}$ как алгебраическую сумму векторов $\overrightarrow{DA}_1$, $\overrightarrow{DB}_1$ и $\overrightarrow{DC}_1$.
2. $EABCDF$ — правильный октаэдр. Укажите такую точку K , что $\overrightarrow{KE} + \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD} + \overrightarrow{KF} = \vec{0}$.

§ 21. Умножение вектора на число

1.

1. $DABC$ — тетраэдр. Изобразите вектор $\overrightarrow{DM} = 2\overrightarrow{DA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$.
2. Точка K не лежит в плоскости треугольника ABC , E и P — середины отрезков AB и BC соответственно. Выразите $\overrightarrow{KE} - \overrightarrow{KP}$ через вектор $\overrightarrow{AC}$.

2.

1. $FABC$ — тетраэдр. Изобразите вектор $\overrightarrow{FK} = 1,5\overrightarrow{CB} + 0,5\overrightarrow{CF}$.
2. В треугольнике ABC точки E и F — середины сторон AB и BC соответственно. Точка M не лежит в плоскости треугольника ABC . Выразите вектор $\overrightarrow{CA}$ через разность векторов $\overrightarrow{MF}$ и $\overrightarrow{ME}$.

3.

1. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ диагонали грани BB_1C_1C пересекаются в точке M . Выразите вектор $\overrightarrow{AM}$ через векторы $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{BC}$.
2. Диагонали параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ пересекаются в точке O . При каком значении k справедливо соотношение $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{CO} = k\overrightarrow{CA}$?

4.

1. В тетраэдре $MABC$ CE — медиана грани BMC , точка K — середина CE . Выразите вектор $\overrightarrow{AK}$ через векторы $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{BM}$.
2. Диагонали параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ пересекаются в точке O . При каком значении k справедливо соотношение $k(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AO}) = \overrightarrow{A_1C}$?

5.

1. Точка M расположена вне плоскости правильного треугольника ABC на равном расстоянии от его вершин, MO — перпендикуляр, опущенный из точки M на плоскость треугольника. Выразить вектор $\overrightarrow{MO}$ через векторы $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CA}$.
2. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ отличны от нулевого вектора и неколлинеарны. Найдите m и n , если $3\vec{a} + 5\vec{b} = m\vec{a} + (2n + 1)\vec{b}$.

6.

1. В наклонной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точка E — середина B_1B ; C_1B пересекает CE в точке P . Выразите вектор $\overrightarrow{AP}$ через векторы $\overrightarrow{AC_1}$, $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{CC_1}$.
2. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ отличны от нулевого вектора и неколлинеарны. Найдите x и y , если $(x + y - 1)\vec{a} + (2x - y)\vec{b} = \vec{0}$.

7.

1. В тетраэдре $DABC$ $\angle DAC = \angle DAB$. Грань DBC перпендикулярна плоскости ABC , DM — высота тетраэдра; $AC = a$; $AB = b$; $AD = c$. От точки A отложены единичные векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$, сонаправленные соответственно с векторами $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$. Выразите вектор $\overrightarrow{DM}$ через векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$.
2. Точка O находится вне плоскости трапеции $ABCD$ (AD и BC — основания), AD в k раз больше BC . Выразите вектор $\overrightarrow{OD}$ через векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$.

8.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\angle A_1 AD = \angle A_1 AB$, $AD = a$; $AB = b$ ($a > b$); $AA_1 = c$, $A_1 M$ — высота параллелепипеда, AM пересекает BC в точке P . Выразите вектор $\overrightarrow{A_1 P}$ через единичные векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$, отложенные от вершины A и сонаправленные соответственно с векторами $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AA_1}$.
2. В треугольнике ABC точки E и F лежат на сторонах AB и BC , причем $\frac{AE}{EB} = \frac{CF}{FB} = \frac{3}{2}$. Точка O расположена вне плоскости треугольника ABC . Выразите вектор $\overrightarrow{OF}$ через векторы $\overrightarrow{OE} = \vec{m}$, $\overrightarrow{OA} = \vec{p}$ и $\overrightarrow{OC} = \vec{k}$.

§ 22. Компланарные векторы.

Применение векторов к решению задач

1.

1. Дан тетраэдр $DABC$, K — середина ребра AC , M — середина отрезка KD , $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$. Разложите вектор $\overrightarrow{BM}$ по векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.
2. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ M — точка пересечения медиан треугольника $AB_1 B$. Разложите вектор $\overrightarrow{DM}$ по векторам $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{DD_1}$.

2.

1. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелепипед. M — точка пересечения DC_1 и $D_1 C$; $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$; $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$; $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$. Разложите вектор $\overrightarrow{AM}$ по векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.
2. В тетраэдре $DABC$ M — точка пересечения медиан треугольника ABC . Разложите вектор $\overrightarrow{DM}$ по векторам $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{CD}$.

3.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $M \in AD$, причем $AM : MD = 1 : 3$, а $P \in DC$, причем $DP : PC_1 = 2 : 5$. Разложите вектор $\overrightarrow{MP}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$.
2. Используя векторы, докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра, пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.

4.

1. В тетраэдре $DABC$ O — точка пересечения медиан треугольника ABC , $F \in AD$, причем $AF : FD = 3 : 1$. Разложите вектор $\overrightarrow{OF}$ по векторам $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{CD}$.
2. Используя векторы, докажите, что диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.

5.

1. Длина стороны основания $ABCDEF$ правильной шестиугольной призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ равна a . Диагональ AB_1 боковой грани $AA_1 B_1 B$ наклонена к стороне AB основания под углом φ . Пусть $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ — единичные векторы, сонаправленные с векторами $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF}$ и $\overrightarrow{AA_1}$ соответственно. Разложите вектор $\overrightarrow{AD_1}$ по векторам $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$.
2. В наклонной треугольной призме проведена плоскость, пересекающая три боковых ребра и параллельная основаниям. Докажите, что точки пересечения медиан оснований и сечения лежат на одной прямой.

6.

1. В правильной шестиугольной пирамиде $MABCDEF$ сторона основания равна a , а боковые ребра составляют с плоскостью основания угол φ , $P \in MC$, причем $MP : PC = 2 : 3$. Пусть $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ — единичные векторы, сонаправленные с векторами $\overrightarrow{FA}$, $\overrightarrow{FE}$ и $\overrightarrow{FM}$. Разложите вектор $\overrightarrow{FP}$ по векторам $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$.
2. В треугольной пирамиде проведены две плоскости, параллельные основанию и пересекающие три боковых ребра. Докажите, что точки пересечения медиан основания и полученных сечений лежат на одной прямой.

7.

1. Основанием пирамиды $PABCD$ служит параллелограмм $ABCD$. $M \in BD$ и $N \in PC$, причем $MN \parallel AF$, где F — середина PB . Найдите отношение $\frac{MN}{AF}$.
2. Даны четыре точки A , B , C и D , причем $A \in BC$. Докажите, что если $\overrightarrow{OD} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$, причем $x + y + z = 1$ и O — произвольная точка пространства, то эти точки принадлежат одной плоскости.

8.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $M \in BD$ и $N \in B_1 C_1$, причем $MN \parallel AC_1$. Найдите отношения $\frac{BM}{MD}$ и $\frac{B_1 N}{NC_1}$.
2. Даны четыре точки A , B , C и D , причем $A \in BC$. Докажите, что если эти точки принадлежат одной плоскости, то $\overrightarrow{OD} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$, причем $x + y + z = 1$ и O — произвольная точка пространства.

§ 23. Повторение

1.

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ $AB = 2$ см, $AA_1 = 1$ см.

- 1) Найдите площадь полной поверхности призмы.
- 2) Найдите площадь сечения призмы плоскостью ACB_1 .
- 3) Найдите угол, который составляет прямая AB_1 с плоскостью ABC .
- 4) Найдите угол между плоскостями AB_1C и ABC .
- 5) Найдите длину вектора $\overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{B_1B} - \overrightarrow{C_1C}$.
- 6) Докажите, что прямая A_1C_1 параллельна плоскости ACB_1 .

2.

В правильной четырехугольной пирамиде $EABCD$ ребро $EA = 2\sqrt{2}$ см, $AB = 2$ см.

- 1) Найдите площадь полной поверхности пирамиды.
- 2) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью AEC .
- 3) Найдите угол, который составляет прямая EC с плоскостью ABC .
- 4) Найдите угол между плоскостями ECD и ABC .
- 5) Найдите длину вектора $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EC} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DE}$.
- 6) Докажите, что плоскости AEC и ABC взаимно перпендикулярны.

3.

В прямой призме $ABCA_1B_1C_1$ $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle CAB = 60^\circ$, $AB = 2$ см, $AA_1 = 2\sqrt{3}$ см.

- 1) Найдите площадь полной поверхности призмы.
- 2) Найдите площадь сечения призмы плоскостью A_1BC .
- 3) Найдите угол между плоскостями A_1BC и ABC .
- 4) Найдите угол между прямой CC_1 и плоскостью A_1BC .
- 5) Разложите вектор $\overrightarrow{A_1M}$ по векторам $\overrightarrow{A_1A}$, $\overrightarrow{A_1B}$, $\overrightarrow{A_1C}$, если M — точка пересечения медиан треугольника ABC .
- 6) Найдите угол между плоскостями AA_1B_1 и A_1BC .

4.

В пирамиде $DABC$ ребро AD перпендикулярно основанию, $AD = 4\sqrt{3}$ см, $AB = 2$ см, $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle BAC = 60^\circ$, M — середина отрезка DA .

- 1) Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
- 2) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью BMC .
- 3) Найдите угол между плоскостями MBC и ABC .
- 4) Найдите угол, который составляет прямая BD с плоскостью BMC .
- 5) Разложите вектор $\overrightarrow{DO}$ по векторам $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$, если O — точка пересечения медиан треугольника ABC .
- 6) Найдите угол между плоскостями MBC и ABD .

5.

В прямой призме $ABCA_1B_1C_1$, $AC = 13$ см, $AB = 14$ см, $BC = 15$ см, $AA_1 = 10$ см. Точки M и N — середины ребер AA_1 и BB_1 соответственно.

- 1) Найдите площадь полной поверхности призмы.
- 2) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNC .
- 3) Найдите угол между плоскостями MNC и ABC .
- 4) Найдите угол между прямой AA_1 и плоскостью MNC .
- 5) Разложите вектор $\overrightarrow{MK}$ по векторам $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB}$, если K — середина отрезка CH .
- 6) Постройте линию пересечения плоскостей MNC и ABC .

6.

В пирамиде $DABCD$ $DA = DB = DC = AC = 2$ см, $AB = BC$, $\angle ABC = 90^\circ$. Точки M и N — середины ребер AD и DC соответственно.

- 1) Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
- 2) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью BMN .
- 3) Найдите угол между плоскостями BMN и ABC .
- 4) Найдите угол между прямой BD и плоскостью BMN .
- 5) Разложите вектор $\overrightarrow{MK}$ по векторам $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, если K — середина отрезка BH .
- 6) Постройте линию пересечения плоскостей BMN и ABC .

7.

В прямом параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ основанием служит ромб $ABCD$, $AC = 8$ см; $BD = 6$ см, $BB_1 = 6$ см.

1. Через сторону AD и точку P ($P \in BB_1$ и $PB = 2$ см) проведена плоскость. Найдите площадь боковой поверхности образовавшейся треугольной призмы.
2. Через диагональ параллелепипеда $B_1 D$ параллельно диагонали AC основания проведена плоскость.
 - 1) Найдите площадь сечения.
 - 2) Найдите расстояние OK от точки пересечения диагоналей ромба $ABCD$ до плоскости сечения.
 - 3) Найдите расстояние между AA_1 и $B_1 D$.
 - 4) Разложите вектор $\overrightarrow{OK}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$.
 - 5) Найдите угол между AD и плоскостью сечения.

8.

Основанием пирамиды $MABCD$ служит квадрат $ABCD$ со стороной, равной a . Грань MAB — правильный треугольник — перпендикулярна к плоскости основания.

- 1) Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
- 2) Найдите площадь сечения, проведенного через середину ребра MD перпендикулярно плоскости основания и параллельно AB .
- 3) Найдите угол между плоскостями AMB и DMC .
- 4) Найдите угол между MD и плоскостью сечения.
- 5) Пусть H — точка пересечения диагоналей сечения. Разложите вектор $\overrightarrow{AH}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AM}$.
- 6) Найдите расстояние между BC и MD .

§ 24*. Параллельная проекция фигуры. Изображение фигур

1.

1. Три точки проектируются на плоскость. Сколько при этом может получиться точек на плоскости проекции?
2. Изобразите ромб с перпендикулярами, опущенными из середины одной из сторон на его диагонали.
3. Изобразите правильный шестиугольник с перпендикуляром, опущенным из его центра на одну из его сторон.

2.

1. Что собой представляют проекции двух параллельных прямых на плоскость?
2. Изобразите равнобедренный треугольник с перпендикуляром, опущенным из середины боковой стороны на основание.
3. Изобразите правильный шестиугольник с перпендикуляром, опущенным из его центра на меньшую диагональ.

3.

1. Перечислите, какие свойства прямоугольника сохраняются при параллельном проектировании.
2. Изобразите правильный шестиугольник с биссектрисой одного из его внешних углов.
3. Катеты AC и BC прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90^\circ$) относятся как $2 : 3$. Изобразите треугольник вместе с высотой, опущенной из вершины прямого угла.

4.

1. Перечислите, какие свойства ромба сохраняются при параллельном проектировании.
2. Изобразите ромб с углом 60° и перпендикуляром, опущенным из точки пересечения диагоналей на сторону.
3. Изобразите равнобедренный треугольник ABC , у которого $AB = BC = 4$ и $AC = 5$ с центром вписанной в треугольник окружности.

5.

1. Что собой представляют проекции двух скрещивающихся прямых на плоскости?
2. Изобразите квадрат $ABCD$ с перпендикуляром, опущенным из вершины C на отрезок BE , где E — середина AD .
3. Изобразите равнобедренную трапецию $ABCD$ (AD и BC — основания) с углом при основании 45° и с центром описанной около нее окружности.

6.

1. Проекции двух прямых на плоскости параллельны. Каково взаимное положение самих прямых?
2. Дано изображение некоторого треугольника и центра его описанной окружности, расположенного внутри треугольника. Постройте изображение высот этого треугольника.
3. Изобразите равнобедренный прямоугольный треугольник с квадратом, построенным на его гипотенузе (квадрат расположен вне треугольника).

§ 25*. Многогранные углы.

Теорема косинусов для трехгранного угла

1.

1. Существует ли трехгранный угол с плоскими углами: а) 90° ; 20° ; 120° , б) 40° ; 30° ; 70° ?
2. В трехгранном угле $OABC$ все плоские углы равны 60° . Какой угол с плоскостью BOC составляет ребро OA ?
3. Плоские углы трехгранного угла равны 45° , 60° и 90° . Найдите двугранный угол, лежащий против плоского угла в 60° .

2.

1. Существует ли трехгранный угол с плоскими углами: а) 100° ; 150° ; 110° , б) 60° ; 90° ; 120° ?
2. В трехгранном угле $OABC$ $\angle AOC = \angle AOB$; $\angle BOC = 90^\circ$. Ребро OA составляет с плоскостью противоположащего плоского угла угол 45° . Найдите равные плоские углы.
3. В трехгранном угле плоские углы равны 120° ; 120° и 90° . Найдите двугранный угол, лежащий против меньшего плоского угла.

3.

1. В трехгранном угле два плоских угла равны 110° и 100° . В каких границах может находиться третий плоский угол?
2. В пирамиде $DABC$ $\angle DAC = \angle DAB = 30^\circ$. Двугранный угол при ребре AD равен 90° , $DC \perp AC$ и $DB \perp AB$, $DC = DB = 20$. Найдите площадь грани BDC .
3. Плоские углы трехгранного угла равны 60° , 60° и 90° . Если сечение этого угла плоскостью, перпендикулярной к грани с наибольшим плоским углом, имеет форму равнобедренного треугольника (основание треугольника лежит в плоскости прямого угла), то секущая плоскость отсекает на ребрах трехгранного угла равные отрезки. Докажите.

4.

1. В каких границах могут изменяться плоские углы при стороне основания правильной пятиугольной пирамиды?
2. В пирамиде $DABC$ $\angle DAC = \angle DAB = 60^\circ$. Двугранный угол при ребре AD равен 120° , $DC \perp AC$, $DB \perp AB$, $BC = \sqrt{39}$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BDC .
3. Плоские углы трехгранного угла 60° , 60° и 90° . Докажите, что плоскость, отсекающая от ребер три равных отрезка, перпендикулярна плоскости прямого угла.

5.

1. Докажите, что в трехгранном угле против равных плоских углов лежат равные двугранные углы.
2. В наклонной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ $\angle A_1AC = 45^\circ$; $\angle A_1AB = 60^\circ$, $\angle BAC = 90^\circ$, $AC = \sqrt{6}$; $AB = 2\sqrt{3}$. $AA_1 = 5$. Найдите площадь боковой поверхности призмы.
3. Основанием пирамиды $MABCD$ служит квадрат со стороной a . Грань MAB — правильный треугольник, плоскость которого перпендикулярна плоскости основания. Найдите двугранный угол при ребре MD .

6.

1. Докажите, что в трехгранном угле против равных двугранных углов лежат равные плоские углы.
2. В правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол при боковом ребре равен 120° , а высота боковой грани m . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
3. Основанием пирамиды $MABCD$ служит квадрат со стороной a . Ребро MB равно a и перпендикулярно плоскости основания. Найдите величину двугранного угла с ребром MD .

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

№ 1. Аксиомы стереометрии. Взаимное положение прямых. Параллельность прямой и плоскостей

Вариант 1

1. На рис. 45 точки A , C , M и P лежат в плоскости α , а точка $B \notin \alpha$. Постройте точку пересечения прямой MP с плоскостью ABC . Поясните.
2. Треугольники ABC и ADC лежат в разных плоскостях и имеют общую сторону AC . Точка E лежит на стороне AB , а F — на стороне BC , причем EF параллельна плоскости ADC . P — середина AD , а K — середина DC .

1) Докажите, что $EF \parallel PK$.

2) Каково взаимное положение прямых PK и AB ? Чему равен угол между этими прямыми, если $\angle ABC = 40^\circ$ и $\angle BCA = 80^\circ$.

3. Плоскости α и β пересекаются по прямой m . Прямая a лежит в плоскости α . Каково возможное взаимное положение прямой a и плоскости β ? Сделайте рисунок и поясните.

- 4*. Используя рисунок 46, постройте линию пересечения плоскости EFM с плоскостью α . Поясните.

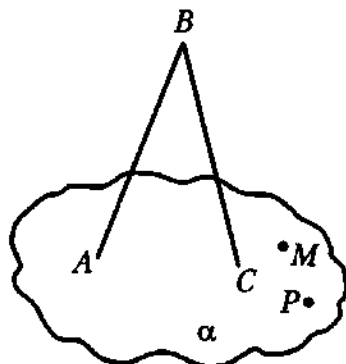


Рис. 45

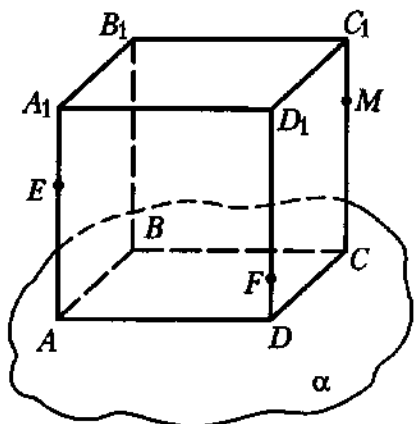


Рис. 46

Вариант 2

1. На рис. 47 точки A и B лежат в плоскости α , а C — в плоскости β . Постройте линии пересечения плоскости ABC с плоскостями α и β . Поясните.

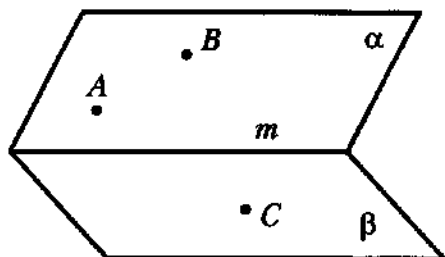


Рис. 47

2. Треугольники ABC и DCE лежат в разных плоскостях и имеют общую вершину C , $AB \parallel DE$.
- 1) Постройте линию пересечения плоскостей ABC и DCE . Поясните.
 - 2) Каково взаимное положение прямых AB и DF , где F лежит на стороне CE ? Чему равен угол между этими прямыми, если $\angle FED = 60^\circ$ и $\angle DFE = 100^\circ$? Поясните.
3. Прямая a параллельна плоскости α , точка M и прямая c лежат в плоскости α ($M \in c$). Через точку M проведена прямая b , параллельная a . Каково взаимное положение прямых b и c ? Поясните.
- 4*. Плоскости α и β пересекаются по прямой m (рис. 48). Прямая AB лежит в плоскости α , а CD — в плоскости β . Что нужно изменить в условии, чтобы прямые EF и MK могли быть параллельными? Поясните.

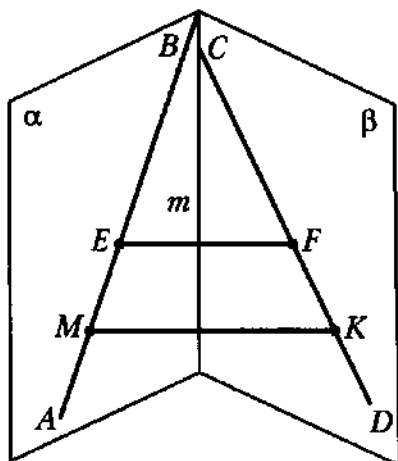


Рис. 48

Вариант 3

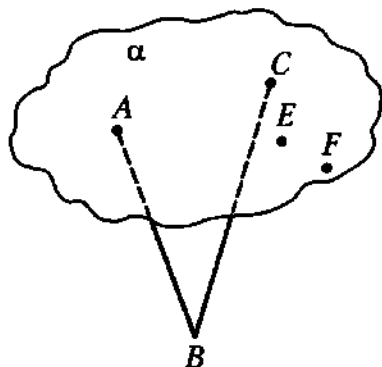


Рис. 49

1. На рис. 49 точки A , C , E и F лежат в плоскости α , а точка $B \notin \alpha$. Постройте точку пересечения прямой EF с плоскостью ABC . Поясните.
2. Трапеция $ABCD$ (AD и BC — основания) и треугольник AED имеют общую сторону AD и лежат в разных плоскостях. Точка M лежит на стороне AE , а P — на стороне DE , причем MP параллельна плоскости трапеции.
 - 1) Докажите, что $MP \parallel BC$.
 - 2) Каково взаимное положение прямых MP и AB ? Чему равен угол между этими прямыми, если $\angle ABC = 110^\circ$? Поясните.
3. Плоскости α и β пересекаются по прямой m . Прямая a лежит в плоскости α , а b — в плоскости β . Какие возможны взаимные положения прямых a и b . Сделайте рисунок и поясните.
- 4*. Используя рисунок 50, постройте линию пересечения плоскости MPK с плоскостью α . Поясните.

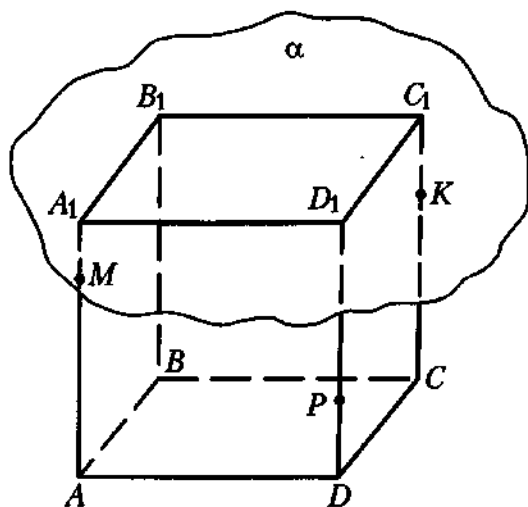


Рис. 50

Вариант 4

1. На рис. 51 точки E и F лежат в плоскости β , а M — в плоскости α . Постройте линии пересечения плоскости EFM с плоскостями α и β . Поясните.

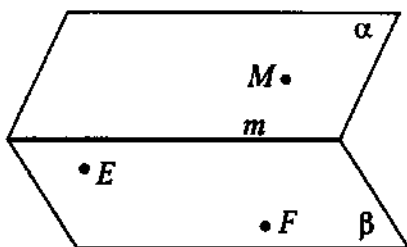


Рис. 51

2. Основание AD трапеции $ABCD$ лежит в плоскости α . Через точки B и C проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках E и F соответственно.

1) Докажите, что $BCFE$ — параллелограмм.

2) Каково взаимное положение прямых EF и AB ? Чему равен угол между ними, если $\angle ABC = 150^\circ$? Поясните.

3. Отрезок AB параллелен плоскости α , а отрезок CD лежит в этой плоскости, причем $AB = CD$. Можно ли утверждать, что четырехугольник $ABDC$ — параллелограмм? Поясните.

- 4*. Плоскости α и β пересекаются по прямой m (рис. 52). Прямая AB лежит в плоскости α , а CD — в плоскости β . Что нужно изменить в условии, чтобы прямые AC и BD могли пересекаться? В каком случае это возможно?

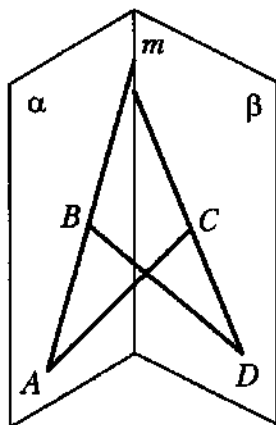


Рис. 52

№ 2. Параллельные плоскости.

Построение сечений

Вариант 1

1. Параллелограммы $ABCD$ и $ADFE$ лежат в разных плоскостях и имеют общую сторону AD . Прямая m , параллельная BC , пересекает плоскости ABE и DCF соответственно в точках H и P . Докажите, что $HPFE$ — параллелограмм.

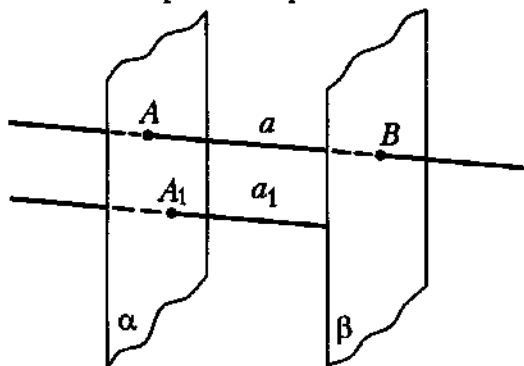


Рис. 53

2. На рис. 53 плоскости α и β параллельны, $a \parallel a_1$. Прямая a пересекает плоскости α и β соответственно в точках A и B , а прямая a_1 пересекает плоскость α в точке A_1 . Постройте точку пересечения a_1 с плоскостью β . Поясните.

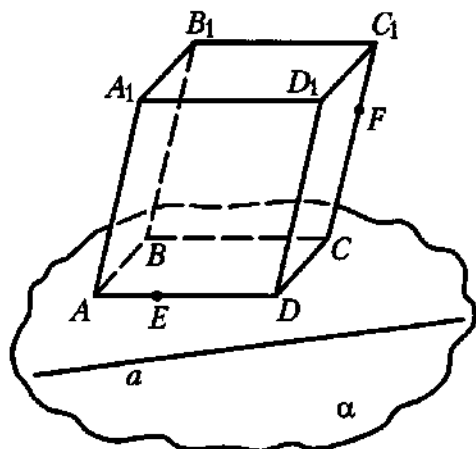


Рис. 54

3. В тетраэдре $DABC$ $\angle DBA = \angle DBC = 90^\circ$, $DB = 6$, $AB = BC = 8$, $AC = 12$. Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через середину DB и параллельной плоскости ADC . Найдите площадь сечения.

- 4*. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки E и F и параллельной прямой a (рис. 54).

Вариант 2

1. Вне плоскости α расположен треугольник ABC , у которого медианы AA_1 и BB_1 параллельны плоскости α . Через вершины B и C треугольника проведены параллельные прямые, которые пересекают плоскость α соответственно в точках E и F . Докажите, что $ECBF$ — параллелограмм.
2. На рис. 55 плоскости α и β параллельны. Прямая a пересекает плоскости α и β соответственно в точках A и B , а прямая b — в точках C и D . Найдите взаимное положение прямых a и b . Поясните.

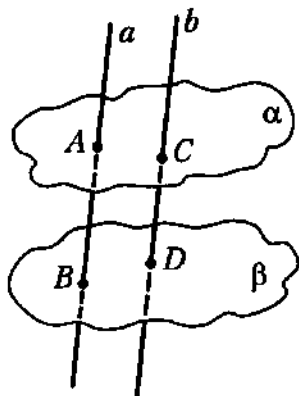


Рис. 55

3. Все грани параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ квадраты со стороной a . Через середину ребра AD параллельно плоскости $DA_1 B_1$ проведена плоскость. Найдите периметр сечения.
- 4*. Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки S и K и параллельной прямой a (рис. 56).

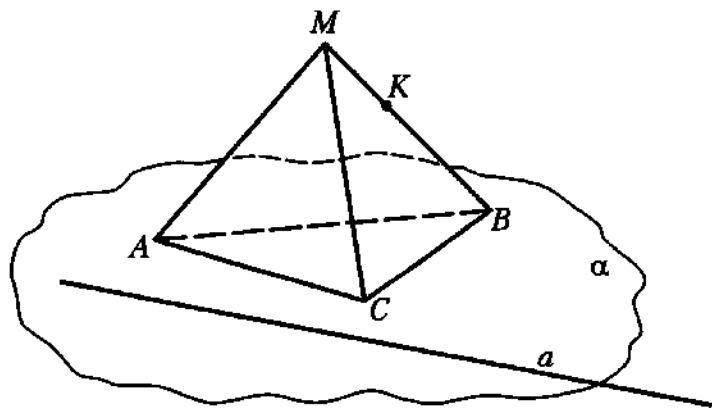


Рис. 56

Вариант 3

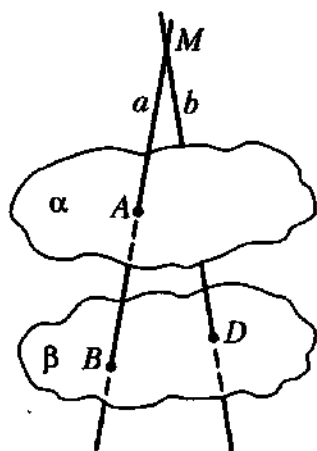


Рис. 57

1. Прямоугольники $ABCD$ и $EBCF$ лежат в разных плоскостях и имеют общую сторону BC . Прямая a параллельна AD и пересекает плоскости ABE и DCF соответственно в точках P и H . Докажите, что $PBCH$ — параллелограмм.
2. На рис. 57 плоскости α и β параллельны. Прямые a и b пересекаются в точке M . Прямая a пересекает плоскости α и β соответственно в точках A и B , а прямая b пересекает плоскость β в точке D . Постройте точку пересечения прямой b с плоскостью α .
3. В тетраэдре $DABC$ точка M — середина AC , $DB = 6$, $MD = 10$, $\angle DBM = 90^\circ$. Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через середину ребра DC , параллельной плоскости DMB , и найдите площадь сечения.

4*. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки E и P и параллельной прямой a (рис. 58).

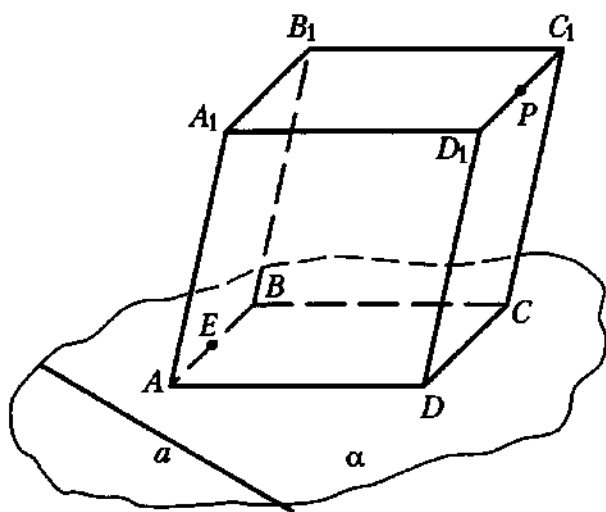


Рис. 58

Вариант 4

1. Трапеция $ABCD$ (AD и BC — основания) расположена вне плоскости α . Диагонали трапеции параллельны плоскости α . Через вершины A и B проведены параллельные прямые, которые пересекают плоскость α в точках E и F соответственно. Докажите, что $EABF$ — параллелограмм.
2. На рис. 59 плоскости α и β параллельны. Прямая a пересекает плоскости α и β соответственно в точках A и B , а прямая b — в точках C и D . Каково взаимное положение прямых a и b ? Поясните.
3. Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, все грани которого прямоугольники, $AD = 4$, $DC = 8$; $CC_1 = 6$. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через середину ребра DC и параллельной плоскости $AB_1 C_1$, и найдите периметр сечения.
- 4*. Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки C и M и параллельной прямой a (рис. 60).

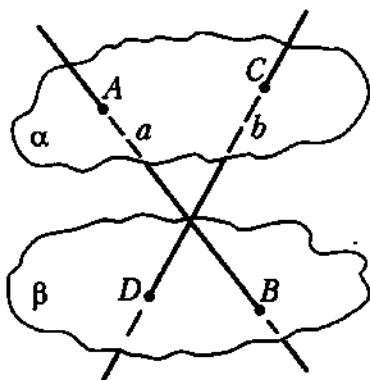


Рис. 59

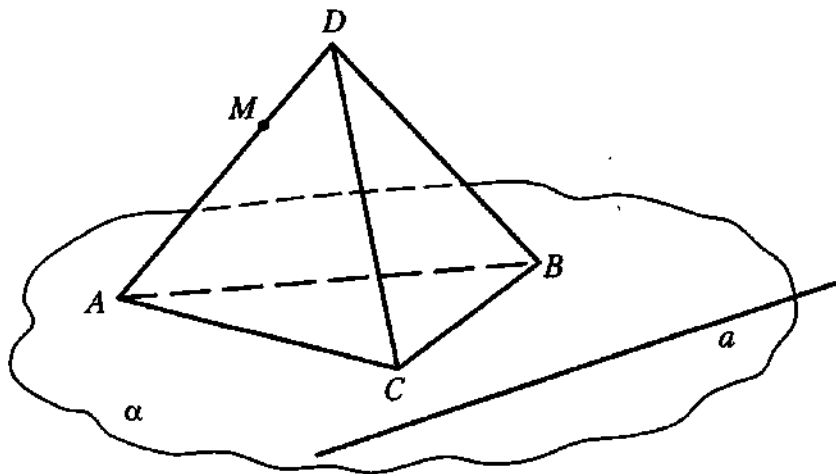


Рис. 60

№ 3. Перпендикулярность прямых и плоскостей

Вариант 1

1. В треугольнике ABC $AC = CB = 10$ см, $\angle A = 30^\circ$, BK — перпендикуляр к плоскости треугольника и равен $5\sqrt{6}$ см. Найдите расстояние от точки K до AC .
2. Точка M равноудалена от всех вершин равнобедренного прямоугольного треугольника ACB ($\angle C = 90^\circ$), $AC = BC = 4$ см. Расстояние от точки M до плоскости треугольника равно $2\sqrt{3}$ см.
 - 1) Докажите, что плоскость AMB перпендикулярна плоскости ABC .
 - 2) Какой угол плоскость BMC составляет с плоскостью ABC ?
 - 3) Найдите угол между MC и плоскостью ABC .
- 3*. Найдите расстояние от точки E — середины стороны AC — до плоскости BMC .

Вариант 2

1. Через сторону AC треугольника ABC проведена плоскость α , удаленная от вершины B на расстояние, равное 4 см, $AC = BC = 8$ см, $\angle ABC = 22^\circ 30'$. Найдите угол между плоскостями ABC и α .
2. $ABCD$ — квадрат со стороной, равной 4 см. Треугольник AMB имеет общую сторону AB с квадратом, $AM = BM = 2\sqrt{6}$ см. Плоскости треугольника и квадрата взаимно перпендикулярны.
 - 1) Докажите, что $BC \perp AM$.
 - 2) Найдите угол между MC и плоскостью квадрата.
- 3*. Найдите расстояние от точки A до плоскости DMC .

Вариант 3

1. $ABCD$ — ромб со стороной 4 см, $\angle ADC = 150^\circ$, BM — перпендикуляр к плоскости ромба и равен $2\sqrt{3}$ см. Найдите расстояние от точки M до AD .
2. Точка M равноудалена от всех сторон правильного треугольника ABC , сторона которого равна 4 см. Расстояние от точки M до плоскости ABC равно 2 см.
 - 1) Докажите, что плоскость AMO перпендикулярна плоскости BMC (O — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на плоскость ABC).
 - 2) Найдите угол между плоскостью BMC и плоскостью ABC .
 - 3) Найдите угол между MC и плоскостью ABC .
- 3*. Точка E принадлежит AC , причем $AE : EC = 2 : 1$. Найдите расстояние от точки E до плоскости BMC .

Вариант 4

1. Через сторону AD ромба $ABCD$ проведена плоскость α , удаленная от BC на расстояние, равное $3\sqrt{3}$ см. Сторона ромба — 12 см, $\angle BCD = 30^\circ$. Найдите угол между плоскостью ромба и плоскостью α .
2. Треугольник ACB — прямоугольный ($\angle C = 90^\circ$), $AC = CB = 3$ см. Треугольник AMC имеет общую сторону AC с треугольником ACB ; $AM = CM = \sqrt{6}$ см. Плоскости треугольников взаимно перпендикулярны.
 - 1) Докажите, что $MC \perp BC$.
 - 2) Найдите угол между MB и плоскостью ABC .
- 3* Найдите расстояние от середины AB — точки E — до плоскости BMC .

№ 4. Многогранники

Вариант 1

1. В основании прямого параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит ромб $ABCD$ со стороной, равной a , и углом BAD , равным 60° . Плоскость $BC_1 D$ составляет с плоскостью основания угол 60° . Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.
2. В основании пирамиды $DABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC , $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, $BC = 10$. Боковые ребра пирамиды равно наклонены к плоскости основания. Высота пирамиды равна 5. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
- 3*. В указанной выше пирамиде найдите угол между прямыми AC и DB .

Вариант 2

1. Основанием прямого параллелепипеда служит параллелограмм со сторонами 3 см и 5 см. Острый угол параллелограмма равен 60° . Площадь большего диагонального сечения равна 63 см^2 . Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.
2. Основанием пирамиды $MABCD$ служит ромб $ABCD$, $AC = 8$; $BD = 6$. Высота пирамиды равна 1. Все двугранные углы при основании равны. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.
- 3*. В указанной выше пирамиде найдите угол между гранями BMC и DMC .

Вариант 3

1. В основании прямого параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит параллелограмм $ABCD$, у которого $BD \perp AB$; $AB = 3 \text{ см}$; $BD = 4 \text{ см}$. Плоскость $AB_1 C_1$ составляет с плоскостью основания угол 45° . Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.
2. В основании пирамиды $MABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной, равной 12. Грани MBA и MBC перпендикулярны к плоскости основания. Высота пирамиды равна 5. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.
- 3*. В указанной выше пирамиде найдите расстояние между прямыми BC и MD .

Вариант 4

1. В прямом параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ основанием служит параллелограмм $ABCD$, $AD = 2$, $DC = 2\sqrt{3}$, $\angle A = 30^\circ$. Большая диагональ составляет с плоскостью основания угол 45° . Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.
2. Основанием пирамиды $MABC$ служит прямоугольный треугольник ABC , катеты которого $AC = 8$ см; $BC = 6$ см. Высота пирамиды равна $3\sqrt{5}$ см. Двугранные углы при основании пирамиды равны между собой. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.
- 3*. В указанном выше параллелепипеде найдите угол между A_1C и плоскостью грани $DD_1 C_1 C$.

№ 5. Векторы в пространстве

Вариант 1

1. Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Изобразите на рисунке векторы, равные:
 - 1) $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{DA_1} + \overrightarrow{B_1 B} + \overrightarrow{BA}$;
 - 2) $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{B_1 C_1}$.
2. В тетраэдре $DABC$ M — точка пересечения медиан грани BDC , E — середина AC . Разложите вектор $\overrightarrow{EM}$ по векторам $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.
3. Даны три неколлинеарных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Найдите значения p и q , при которых векторы $\vec{m} = p\vec{a} + q\vec{b} + 8\vec{c}$ и $\vec{n} = \vec{a} + p\vec{b} + q\vec{c}$ коллинеарны.
- 4*. В тетраэдре $DABC$ точки M и H — середины соответственно ребер AD и BC . Докажите, используя векторы, что прямые AB , HM и DC параллельны одной плоскости.

Вариант 2

1. Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Изобразите на рисунке векторы, равные:
 - 1) $\overrightarrow{B_1 C_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{B_1 A}$;
 - 2) $\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{CB_1}$.
2. В тетраэдре $DABC$ точка E — середина ребра AD , а M — точка пересечения медиан грани BDC . Разложите вектор $\overrightarrow{EM}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$.
3. Докажите, что векторы $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$, $\vec{n} = 2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ и $\vec{p} = 8\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ компланарны.
- 4*. В тетраэдре $DABC$ точки M и N — середины AB и CD соответственно. Докажите, что середины отрезков MC , MD , NA и NB являются вершинами параллелограмма.

Вариант 3

1. Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Изобразите на рисунке векторы, равные:
 - 1) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{C_1 D_1} + \overrightarrow{B_1 B} + \overrightarrow{D_1 A_1}$;
 - 2) $\overrightarrow{D_1 C_1} - \overrightarrow{A_1 B}$.
2. В тетраэдре $DABC$ точка E — середина DB , а M — точка пересечения медиан грани ABC . Разложите вектор $\overrightarrow{EM}$ по векторам $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{DC}$.
3. Даны три неколлинеарных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Найдите значение k , при котором векторы $\vec{m} = k\vec{a} + k^2\vec{b} + 2\vec{c}$ и $\vec{n} = \vec{a} + k\vec{b} + \vec{c}$ коллинеарны.
- 4*. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки E и F — середины отрезков BD и $C_1 C$. Докажите, используя векторы, что прямые BC_1 , EF и DC параллельны одной плоскости.

Вариант 4

1. Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$; изобразите на рисунке векторы, равные:
 - 1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B_1 B} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$;
 - 2) $\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{AB_1}$.
2. В тетраэдре $DABC$ M — точка пересечения медиан грани ACD , а K — середина AB . Разложите вектор $\overrightarrow{KM}$ по векторам $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BD}$.
3. Докажите, что векторы $\vec{m} = \vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c}$, $\vec{n} = 2\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$ и $\vec{p} = 3\vec{a} - 4\vec{b} - 5\vec{c}$ компланарны.
- 4*. В пространстве расположен параллелограмм $ABCD$ и произвольный четырехугольник $A_1 B_1 C_1 D_1$. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников $A_1 B B_1$, $B_1 C C_1$, $C_1 D D_1$ и $A_1 A D_1$ являются вершинами параллелограмма.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ДИКТАНТЫ

№ 1. Аксиомы стереометрии.

Параллельность прямых и плоскости

Вариант 1

1. В каком случае три точки в пространстве не определяют положение плоскости, проходящей через эти точки?
2. Могут ли две различные плоскости иметь только одну общую точку?
3. Точка M не лежит на прямой a . Через точку M проводятся прямые, пересекающие прямую a . Лежат ли эти прямые в одной плоскости?
4. Каково взаимное положение прямых:
1) AD_1 и MN ; 2) AD_1 и BC_1 ; 3) MN и DC ? (рис. 61).
5. Прямые a и b скрещиваются с прямой c . Могут ли прямые a и b пересекаться?
6. Прямая a параллельна плоскости α . Существуют ли на плоскости α прямые, не параллельные a ? Если да, то каково их взаимное положение?
7. На рис. 62 прямые m и n пересекаются в точке M , $A \in m$; $B \in n$; b лежит в плоскости α , $a \parallel b$. Каково взаимное положение прямых b и c ?
8. Даны треугольник ABC и плоскость α , $AB \parallel \alpha$; $AC \parallel \alpha$. Каково взаимное положение прямой BC и плоскости α ?
9. На рис. 63 плоскости α и β параллельны. Пересекающиеся в точке M прямые a и b пересекают плоскость α в точках A и C , а плоскость β — в точках B и D , $\frac{AM}{AB} = \frac{2}{3}$. Найдите отношение $\frac{MC}{MD}$.
10. Плоскость α пересекает только боковые ребра параллелепипеда. Определите вид сечения.

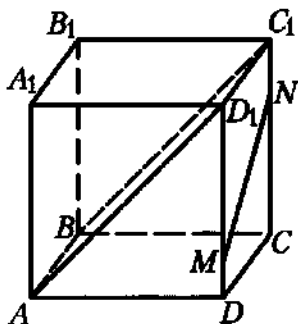


Рис. 61

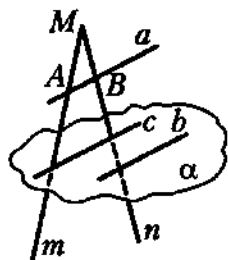


Рис. 62

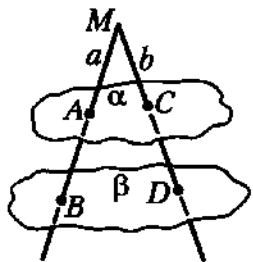


Рис. 63

Вариант 2

1. Что можно сказать о взаимном положении двух плоскостей, имеющих три общие точки, не лежащие на одной прямой?
2. Могут ли две различные плоскости иметь только две общие точки?
3. Прямые a и b пересекаются в точке M . Прямая c , не проходящая через точку M , пересекает прямые a и b . Лежат ли все эти три прямые в одной плоскости?
4. Каково взаимное положение прямых:
1) A_1D и MN ; 2) A_1D и B_1C ; 3) MN и A_1B_1 (рис. 64)?
5. Прямые a и b скрещиваются с прямой c . Могут ли прямые a и b быть параллельными?
6. Две прямые параллельны одной и той же плоскости. Можно ли утверждать, что эти прямые параллельны между собой? Если нет, то каково их взаимное положение?
7. На рис. 65 прямые m и n параллельны. Точки A и B соответственно принадлежат прямым m и n ; b лежит в плоскости α , $a \parallel b$. Каково взаимное положение прямых b и c ?
8. Даны четырехугольник $ABCD$ и плоскость α . Его диагонали AC и BD параллельны плоскости α . Каково взаимное положение AB и плоскости α ?
9. На рис. 66 плоскости α и β параллельны. Пересекающиеся в точке M прямые a и b пересекают плоскость α соответственно в точках B и A , а плоскость β — в точках E и F . $\frac{EM}{MF} = \frac{2}{5}$. Найдите отношение $\frac{MB}{MA}$.
10. Плоскость α проходит через диагональ основания параллелепипеда и середину одной из сторон верхнего основания. Определите вид сечения.

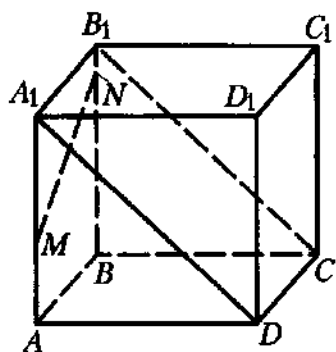


Рис. 64

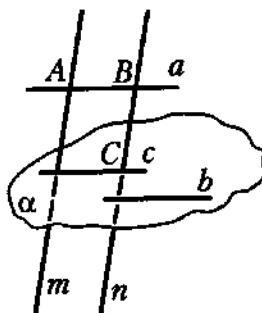


Рис. 65

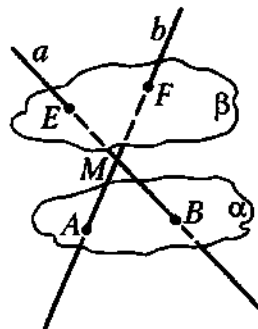


Рис. 66

№ 2. Перпендикулярность прямых и плоскости

Вариант 1

1. $AB \perp \alpha$; $CD \perp \alpha$; $B \in \alpha$; $D \in \alpha$; $AB = CD$. Каково взаимное положение прямой AC и плоскости α ?
2. К плоскости поведены две равные наклонные. Равны ли их проекции?
3. Точка M равноудалена от всех вершин прямоугольного треугольника, катеты которого 6 см и 8 см. Расстояние от точки M до плоскости треугольника равно 12 см. Найдите расстояние от точки M до вершин треугольника.
4. Основанием прямоугольного параллелепипеда является квадрат со стороной, равной a . Расстояние от бокового ребра до скрещивающейся с ним диагонали параллелепипеда равно ...

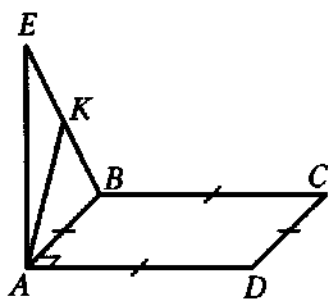


Рис. 67

5. На рис. 67 $ABCD$ — квадрат. AE — перпендикуляр к плоскости квадрата. $K \in EB$. Чему равен угол между BC и AK ?
6. В треугольнике ABC $AB = 10$; $\angle A = 30^\circ$, $BD \perp AC$, $BD = 12$. Расстояние от точки D до AC равно ...
7. Основанием прямоугольного параллелепипеда служит квадрат со стороной, равной 4. Диагональ параллелепипеда равна 8. Угол между диагональю и боковой гранью равен ...
8. Точка M равноудалена от всех сторон квадрата $ABCD$, сторона которого равна 8 см. Расстояние от точки M до плоскости квадрата равно 4 см. Угол между плоскостью MCD и плоскостью квадрата равен ...
9. Прямая a и плоскость α перпендикулярны плоскости β . Каково взаимное положение прямой a и плоскости α ?
10. Треугольник MAV и квадрат $ABCD$ имеют общую сторону AB и их плоскости взаимно перпендикулярны. Угол MAD равен ...

Вариант 2

1. $AB \perp \alpha$; $CD \parallel AB$ ($B \in \alpha$; $D \in \alpha$), $E \in \alpha$, $\angle ECD = 40^\circ$. Тогда $\angle CED$ равен ...
2. Две наклонные, проведенные к плоскости, имеют равные проекции. Равны ли сами наклонные?
3. Точка D равноудалена от всех вершин правильного треугольника и находится на расстоянии в 3 см от его плоскости. Высота треугольника равна 6 см. Расстояние от точки D до вершин треугольника равно ...
4. Основанием прямоугольного параллелепипеда служит квадрат со стороной, равной a . Расстояние между скрещивающимися диагоналями противоположных граней параллелепипеда равно ...
5. На рис. 68 $ABCD$ — квадрат. AE — перпендикуляр к плоскости квадрата, $M \in EC$. Угол между BD и AM равен ...
6. В треугольнике ABC $AB = 16$ см, $\angle A = 30^\circ$, BK — перпендикуляр к плоскости треугольника. Найдите BK , если расстояние от точки K до AC равно 17 см.
7. В прямоугольном параллелепипеде основанием служит квадрат. Диагональ параллелепипеда равна 10 см и составляет с плоскостью боковой грани угол 60° . Найдите стороны основания.
8. Точка D равноудалена от всех сторон правильного треугольника ABC . Расстояние от точки D до плоскости треугольника равно $2\sqrt{3}$. Радиус описанной около треугольника окружности равен 4. Угол между плоскостью CDB и плоскостью треугольника равен ...
9. Две плоскости перпендикулярны к третьей. Линии пересечения этих плоскостей с третьей плоскостью параллельны. Каково взаимное положение этих плоскостей?
10. Прямоугольный треугольник ACB ($\angle C = 90^\circ$) и треугольник $СМВ$ имеют общую сторону BC . Плоскости треугольников взаимно перпендикулярны. Угол $АСМ$ равен ...

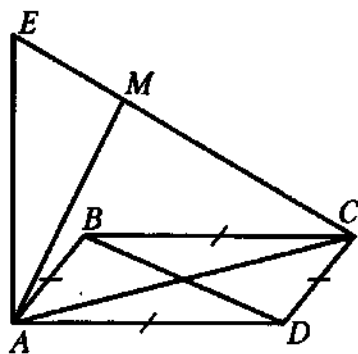


Рис. 68

№ 3. Многогранники

Вариант 1

1. Сторона основания правильной четырехугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равна 4 см, а боковое ребро — 5 см. Найдите площадь сечения, которое проходит через ребро AA_1 и вершину C .
2. В правильной треугольной призме сторона основания равна 3 см, а диагональ боковой грани составляет с плоскостью основания угол 60° . Площадь боковой поверхности призмы равна ...
3. В наклонном параллелепипеде основанием служит квадрат. Две противоположные боковые грани перпендикулярны к плоскости основания. Все ребра параллелепипеда равны 4 см. Найдите площадь каждой из наклонных боковых граней.
4. В наклонной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ основанием служит правильный треугольник со стороной, равной a . Боковое ребро равно b , $\angle A_1 AC = \angle A_1 AB$. Площадь грани $CC_1 B_1 B$ равна ...
5. В наклонной треугольной призме боковое ребро равно 10 см. Площади двух боковых граней равны 30 см^2 и 40 см^2 , угол между ними прямой. Площадь боковой поверхности призмы равна ...
6. В правильной четырехугольной пирамиде угол между диагональю основания и скрещающимся с ней боковым ребром равен ...
7. В правильной четырехугольной пирамиде угол между противоположными боковыми гранями равен 40° . Найдите угол наклона боковых граней к плоскости основания.
8. Основанием пирамиды служит треугольник со стороной, равной 8 см, и противоположным этой стороне углом в 150° . Боковые ребра наклонены к основанию под углом 45° . Высота пирамиды равна ...
9. Основанием пирамиды служит трапеция, основания которой равны 2 см и 8 см. Боковые грани пирамиды равно наклонены к плоскости основания. Высота одной из боковых граней равна 10 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
10. В пирамиде $MABCD$ основанием служит квадрат со стороной, равной a . Грань MAB — правильный треугольник, плоскость которого перпендикулярна к плоскости основания. Площади граней MAD и MBC равны ...

Вариант 2

1. Сторона основания правильной четырехугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равна 3 см, а боковое ребро — 4 см. Найдите площадь сечения, которое проходит через сторону основания AD и вершину C_1 .
2. В правильной треугольной призме боковое ребро равно 4 см, а диагональ боковой грани составляет с плоскостью основания угол 45° . Площадь боковой поверхности призмы равна ...
3. В наклонном параллелепипеде основанием служит квадрат. Две противоположные боковые грани перпендикулярны к плоскости основания. Все ребра параллелепипеда равны между собой. Площадь наклонной боковой грани равна 25 см^2 . Длина ребра параллелепипеда равна ...
4. Основанием наклонного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ служит квадрат со стороной, равной a . Боковое ребро равно b . Вершина A_1 равноудалена от всех вершин нижнего основания. Площадь диагонального сечения $BB_1 D_1 D$ равна ...
5. В наклонной треугольной призме боковое ребро равно 5 см. Площади двух боковых граней равны 20 см^2 , угол между ними — 60° . Площадь боковой поверхности призмы равна ...
6. В правильной треугольной пирамиде угол между скрепляющимися ребрами равен ...
7. В правильной четырехугольной пирамиде боковые грани наклонены к основанию под углом 50° . Угол между противоположными боковыми гранями пирамиды равен ...
8. В пирамиде основанием служит треугольник со стороной в 6 см и противолежащим углом 30° . Боковые ребра наклонены к основанию под углом 60° . Длина бокового ребра равна ...
9. Основанием пирамиды служит трапеция, боковые стороны которой равны 2 см и 4 см. Боковые грани пирамиды равно наклонены к плоскости основания. Высота одной из боковых граней равна 5 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
10. Основанием пирамиды $MABCD$ служит квадрат со стороной 6 см. Ребро MB перпендикулярно к плоскости основания. Равные боковые ребра равны 8 см. Площадь наклонных боковых граней равна ...

№ 4. Векторы в пространстве

Вариант 1

1. $DABC$ — правильная треугольная пирамида. Сторона основания равна $\sqrt{3}$. Боковые ребра наклонены к основанию под углом 60° . Найдите: $|\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC}|$.
2. Ребро куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равно 1. Найдите: $|\overrightarrow{DC_1} - \overrightarrow{DA_1}|$.
3. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелепипед, $A_1 C$ пересекает $B_1 D$ в точке M , $\overrightarrow{B_1 D} = x \overrightarrow{DM}$. Найдите x .
4. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелепипед. Укажите какой-нибудь вектор с началом и концом в вершинах параллелепипеда, который был бы компланарен с векторами $\overrightarrow{A_1 B}$ и $\overrightarrow{AC}$.
5. $\overrightarrow{AC} = x \overrightarrow{AB} + y \overrightarrow{AD}$. Могут ли прямые AC и BD быть скрещивающимися?
6. $\vec{m} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$; $\vec{n} = 2\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$; $\vec{p} = 3\vec{a} - 4\vec{b} + \vec{c}$; $\vec{k} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}$. Укажите тройку компланарных векторов.
7. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелепипед. Найдите: $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1}$.
8. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелепипед. $D_1 C$ пересекает $C_1 D$ в точке M . Выразите вектор $\overrightarrow{AM}$ через векторы $\overrightarrow{AD_1}$ и $\overrightarrow{AC}$.
9. $PABCD$ — пирамида, $ABCD$ — параллелограмм, $\overrightarrow{PA} = \vec{a}$; $\overrightarrow{PB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{PC} = \vec{c}$. Выразите вектор $\overrightarrow{PD} = \vec{x}$ через векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.
10. В правильной треугольной пирамиде $DABC$ отрезок DO — высота. Разложите вектор $\overrightarrow{DO}$ по векторам $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{DC}$.

Вариант 2

1. Основанием пирамиды $MABC$ служит прямоугольный треугольник ACB ($\angle C = 90^\circ$); $AC = 6$; $BC = 8$. Боковые ребра пирамиды наклонены к основанию под углом 60° . Найдите: $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CB}|$.
2. В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ сторона основания равна 1, точка E — середина $A_1 C_1$. Найдите: $|\overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CB_1}|$.
3. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелепипед, $A_1 C$ пересекает $B_1 D$ в точке M , $\overrightarrow{A_1 C} = x \overrightarrow{CM}$. Найдите x .
4. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелепипед, E и F — середины AD и CD соответственно. Будут ли компланарны векторы $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{EF}$ и $\overrightarrow{DD_1}$?

5. $\vec{m} = 2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$; $\vec{n} = -\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}$; $\vec{p} = \vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}$; $\vec{k} = 3\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}$.
Укажите тройку компланарных векторов.
6. $\vec{AC} \neq x\vec{AB} + y\vec{AD}$. При всех x и y $\vec{AB}$ и $\vec{AD}$ не являются коллинеарными. Могут ли пересекаться прямые AC и BD ?
7. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелепипед. Найдите: $\vec{C_1 B_1} + \vec{C_1 D_1} + \vec{C_1 C}$.
8. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелепипед. AB_1 пересекает $A_1 B$ в точке E . Выразите вектор $\vec{DE}$ через векторы $\vec{DB_1}$ и $\vec{DA}$.
9. В пирамиде $EABCD$ основанием служит параллелограмм $ABCD$. $\vec{EB} = \vec{m}$; $\vec{EC} = \vec{n}$; $\vec{ED} = \vec{p}$; $\vec{EA} = \vec{y}$. Выразите вектор $\vec{y}$ через векторы $\vec{m}$, $\vec{n}$ и $\vec{p}$.
10. В тетраэдре $DABC$ отрезки DE и CF — медианы грани BDC . DE пересекает CF в точке O . Выразите вектор $\vec{AD}$ через векторы $\vec{AO}$, $\vec{AC}$ и $\vec{AB}$.

11 класс

ЗАДАЧИ ДЛЯ УРОКА

Параграф	Тема
1	Прямоугольная система координат в пространстве. Координаты вектора
2	Связь между координатами векторов и координатами точек. Простейшие задачи в координатах
3	Угол между векторами. Скалярное произведение векторов
4	Вычисление углов между прямыми в пространстве
5	Движения
6	Применение движений пространства к решению задач
7	Цилиндр. Комбинация цилиндра с многогранниками
8	Конус, усеченный конус
9	Площадь поверхности тел вращения. Комбинации конуса с многогранниками
10	Уравнение сферы. Взаимное расположение сферы и плоскости
11	Сфера
12	Комбинация сферы с другими геометрическими телами
13	Объем прямоугольного параллелепипеда
14	Объем прямой призмы и цилиндра
15	Объем наклонной призмы
16	Объем пирамиды
17	Объем конуса
18	Объем усеченной пирамиды и усеченного конуса
19	Объем шара и его частей. Площадь сферы
20*	Уравнение плоскости

* Задачи предназначены для классов с углубленным изучением математики

ЗАДАЧИ ДЛЯ УРОКА

§ 1. Прямоугольная система координат в пространстве. Координаты вектора

1.

1. Куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ помещен в прямоугольную систему координат (рис. 1). $A(2; -2; 0)$.

1) Найдите координаты всех остальных вершин куба.

2) Найдите координаты векторов $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OC_1}$, $\overrightarrow{OM}$ и разложите их по векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$.

2. Даны векторы $\vec{a} \{2; -1; 3\}$, $\vec{b} \{-3; 2; 1\}$ и $\vec{c} \{-10; 6; -4\}$. Будут ли коллинеарными векторы $\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{c}$?

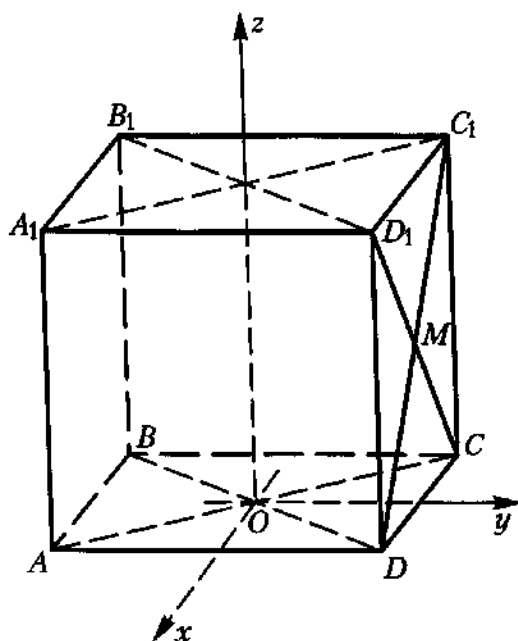


Рис. 1

2.

1. Куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ помещен в прямоугольную систему координат (рис. 2). $C(-2; 4; 0)$.

1) Найдите координаты всех остальных вершин куба.

2) Найдите координаты векторов $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OB_1}$ и $\overrightarrow{OK}$ и разложите их по векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$.

2. Даны векторы

$$\vec{a} \{-1; 3; -2\};$$

$$\vec{b} \{2; -1; 3\} \text{ и}$$

$$\vec{p} \{-3; -1; -4\}.$$

Будут ли коллинеарны векторы $\vec{a} + 2\vec{b}$ и $\vec{p}$?

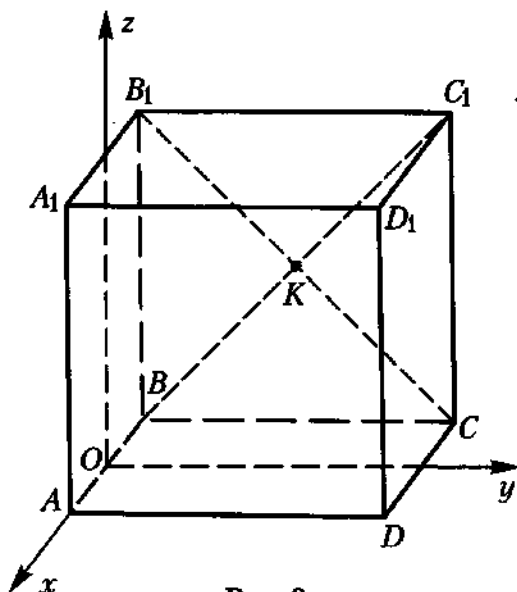


Рис. 2

3.

1. Тетраэдр $DABC$ помещен в прямоугольную систему координат (рис. 3). $\angle ACB = 90^\circ$; $\angle BAC = 30^\circ$; $AB = 10$; $DB \perp ABC$; плоскость ADC составляет с плоскостью ABC угол 60° .

1) Найдите координаты вершин тетраэдра.

2) Найдите координаты вектора $\overrightarrow{CM}$, где M — точка пересечения медиан $\angle ADB$, и разложите этот вектор по векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$.

2. В пространстве заданы четыре точки A , B , C и O , причем $\overrightarrow{OA} \{1; -1; 2\}$; $\overrightarrow{OB} \{3; -2; 4\}$ и $\overrightarrow{OC} \{5; -3; 6\}$. Лежат ли точки A , B и C на одной прямой?

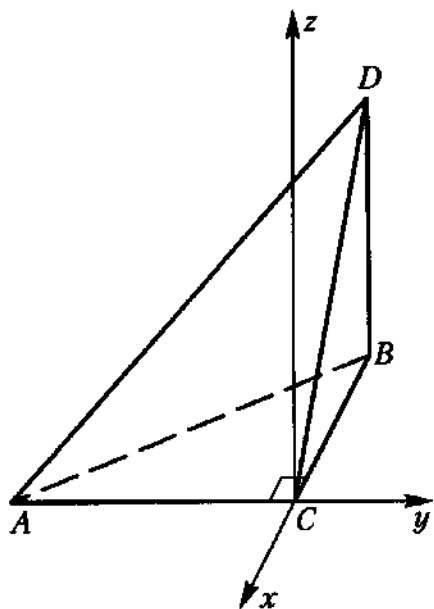


Рис. 3

4.

1. Тетраэдр $DABC$ помещен в прямоугольную систему координат (рис. 4). $\angle ACD = 90^\circ$; $AB = 8$; $\angle BAC = 60^\circ$. $DB \perp ABC$; плоскость ADC составляет с плоскостью ABC угол 60° .

1) Найдите координаты вершин тетраэдра.

2) Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AK}$, где K — точка пересечения медиан грани DBC , и разложите этот вектор по векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$.

2. В пространстве даны точки A , B и C , причем $\overrightarrow{AB} \{2; 3; -1\}$ и $\overrightarrow{AC} \{-4; m; n\}$. При каких m и n эти точки лежат на одной прямой?

5.

1. Тетраэдр $DABC$ помещен в прямоугольную систему координат (рис. 5) $AB = AC = 25$; $BC = 30$; $BO = OC$. Грань ADC составляет с плоскостью основания угол 45° .

1) Найдите координаты вершин тетраэдра.

2) Найдите координаты вектора $\overrightarrow{OK}$, где K — основание перпендикуляра, опущенного из точки O на грань ACD , и разложите этот вектор по векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$.

2. При каких значениях m векторы $\vec{a} \{2; -1; 3\}$, $\vec{b} \{1; 3; -2\}$ и $\vec{c} \{m; 2; 1\}$ компланарны?

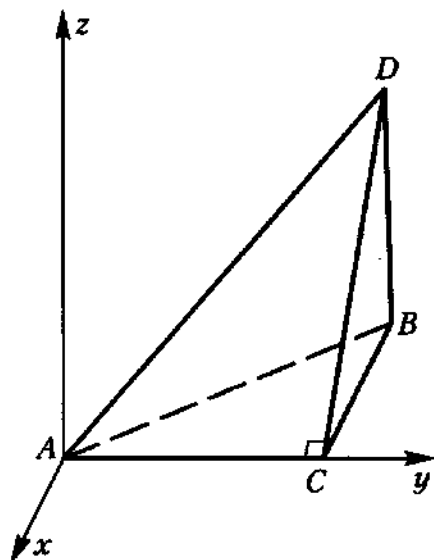


Рис. 4

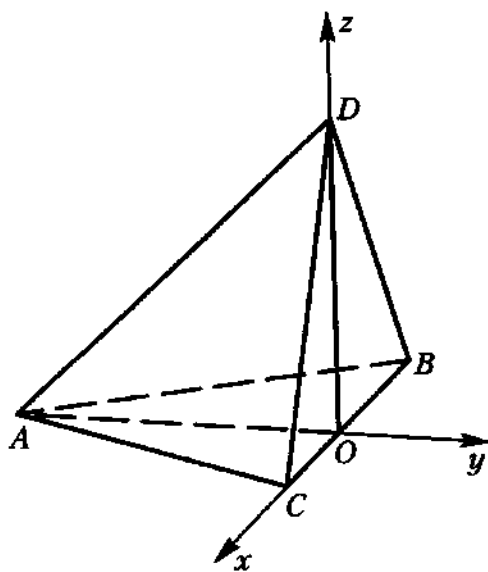


Рис. 5

6.

1. Правильная треугольная пирамида $DABC$ помещена в прямоугольную систему координат (рис. 6). Сторона основания равна 2, боковая грань наклонена к основанию под углом 60° .
 1) Найдите координаты вершин пирамиды.
 2) Найдите координаты вектора $\vec{OK}$, где $OK \perp AD$ и разложите этот вектор по векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$.
2. При каких значениях y векторы $\vec{m} \{2; -1; 3\}$, $\vec{n} \{3; 4; -2\}$ и $\vec{p} \{10; y; 2\}$ компланарны?

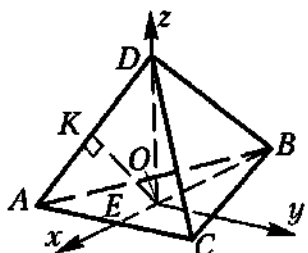


Рис. 6

7.

1. В прямой треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точки F , M и K — соответственно середины ребер AA_1 , A_1B_1 и BC , а точка E делит ребро B_1C_1 в отношении $1 : 5$, считая от вершины B_1 , $\angle ABC = 90^\circ$. Боковые ребра призмы и катеты основания равны между собой. Используя метод координат, установите, лежат ли точки F , M , E и K в одной плоскости.
2. Даны три некопланарных вектора $\vec{p} \{1; -2; 1\}$, $\vec{q} \{2; 0; -1\}$, $\vec{m} \{-1; 1; 2\}$. Разложите вектор $\vec{a} \{1; 2; -2\}$ по векторам $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\vec{m}$.

8.

1. В кубе $ABCA_1B_1C_1D_1$ точки M , P , F и K — середины ребер AD , AA_1 , A_1B_1 и C_1C соответственно. Используя метод координат, установите, лежат ли точки M , P , F и K в одной плоскости.
2. Разложите вектор $\vec{m} \{1; 1; 1\}$ по трем некопланарным векторам $\vec{a} \{1; 1; -2\}$, $\vec{b} \{1; -1; 0\}$ и $\vec{c} \{0; 2; 3\}$.

§ 2. Связь между координатами векторов и координатами точек.

Простейшие задачи в координатах

1.

1. Даны два вектора $\vec{a} \{-2; 1; -1\}$ и $\vec{b} \{1; -3; 2\}$. Найдите: $|\vec{a} + 2\vec{b}|$ и $|\vec{a}| + |2\vec{b}|$.
2. В треугольнике ABC BM — медиана. $A(-1; 2; 2)$; $B(2; -2; -6)$; $M(1; 1; -1)$.
 - 1) Найдите координаты точки C .
 - 2) Найдите длину стороны BC .
 - 3) Разложите вектор $\vec{BC}$ по векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$.

2.

1. Даны два вектора $\vec{m} \{-2; 1; -1\}$ и $\vec{n} \{1; 3; 2\}$. Найдите: $|2\vec{m} - \vec{n}|$ и $|2\vec{m}| - |\vec{n}|$.
2. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O . $A(1; 3; -1)$; $B(-2; 1; 0)$; $O(0; 1,5; 0)$.
 - 1) Найдите координаты вершин C и D .
 - 2) Найдите длину стороны BC .
 - 3) Разложите вектор $\vec{AD}$ по векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$.

3.

1. Дан равнобедренный треугольник ABC ($AC = CB$). $A(1; -2; 1)$, $B(3; 2; -3)$. Вершина C лежит на оси ординат. Найдите площадь треугольника ABC .
2. Вектор $\vec{a}$ сонаправлен с вектором $\vec{b} \{-2; 2; 1\}$. Найдите координаты вектора $\vec{a}$, если $|\vec{a}| = 12$.

4.

1. В треугольнике ABC $BC = \sqrt{3}AC$. $A(1; -1; 1)$; $B(-1; -1; 3)$. Вершина C лежит на отрицательной полуоси OZ . Найдите длину медианы CM .
2. Вектор $\vec{m}$ противоположно направлен вектору $\vec{p} \{-1; 2; 1\}$. Найдите координаты вектора $\vec{m}$, если $|\vec{m}| = 3\sqrt{6}$.

5.

1. В правильной четырехугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона основания равна 2, а боковое ребро — 4. E — середина CD и K — середина $C_1 C$. DK пересекает $D_1 C$ в точке P . Найдите расстояние между серединой M отрезка $B_1 E$ и точкой P .
2. Прямая AB задана двумя точками $A(-1; 2; 1)$ и $B(2; 1; -1)$. Найдите координаты точки M , лежащей на этой прямой, если $AM = 3\sqrt{14}$.

6.

1. В прямой треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = 6$, $BC = 8$, $BB_1 = 8$. Через вершину A и середину P ребра $B_1 B$ проведена плоскость, параллельная BC . Найдите расстояние от центра K описанной вокруг основания окружности до точки M пересечения медиан сечения.
2. Прямая EF задана двумя точками $E(-1; 2; 2)$ и $F(2; 1; 3)$. Точка P лежит на луче, противоположном лучу EF . $EP = 5\sqrt{11}$. Найдите координаты точки P .

7.

1. В тетраэдре $DABC$ $DB \perp ABC$, $DB = 4$, $AB = BC$, $BE \perp AC$, $BE = AC = 4$. Точка P равноудалена от всех вершин тетраэдра. Найдите расстояние от точки P до вершин тетраэдра.
2. Решите уравнение: $\sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2} + \sqrt{x^2 + (y-1)^2 + z^2} = 1$.

8.

1. В тетраэдре $DABC$ $AD \perp ABC$, $AD = 2$, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = CB = 4$. Точка M равноудалена от всех вершин тетраэдра. Найдите расстояние от этой точки до вершин тетраэдра.
2. Укажите в пространственной системе координат все решения уравнения $\sqrt{x^2 + y^2 + (z-1)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2}$.

§ 3. Угол между векторами.

Скалярное произведение векторов

1.

1. Ребра правильного тетраэдра $DABC$ равны a . K — середина BC . Найдите:

1) $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AK}$.

2) $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

2. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ M — центр грани $DD_1 C_1 C$. Какой угол, острый, прямой или тупой, между векторами $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{BD_1}$?

2.

1. В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ все ребра равны a . Найдите:

1) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AC}$.

2) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{DB}$.

2. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ K — центр грани $AA_1 B_1 B$. Какой угол, острый, прямой или тупой, между векторами $\overrightarrow{A_1 C}$ и $\overrightarrow{KD}$?

3.

1. В прямом параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все ребра равны a . $\angle BAD = 60^\circ$. Найдите:

1) $\overrightarrow{C_1 D} \cdot \overrightarrow{AC}$,

2) $\overrightarrow{B_1 D} \cdot \overrightarrow{AC}$.

2. Точки $A(1; 1; 5)$; $B(4; 7; 5)$; $C(8; 5; 5)$; $D(5; -1; 5)$ являются вершинами прямоугольника $ABCD$. Найдите больший угол между диагоналями прямоугольника.

4.

1. В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ все ребра равны a . P — середина $A_1 B_1$. Найдите:

1) $\overrightarrow{C_1 P} \cdot \overrightarrow{B_1 C}$

2) $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{PC_1}$.

2. Точки $A(14; -8; -1)$; $B(7; 3; -1)$; $C(-6; 4; -1)$; $D(1; -7; -1)$ являются вершинами ромба $ABCD$. Найдите острый угол ромба.

5.

1. Вектор $\vec{a}$ образует с векторами $\vec{i}$ и $\vec{k}$ соответственно углы в 120° и 135° . Найдите угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{j}$.
2. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ M — центр грани $AA_1 B_1 B$; K — середина AD . Найдите площадь треугольника $MC_1 K$, если ребро куба равно 1.

6.

1. Вектор $\vec{m}$ образует с векторами $\vec{i}$ и $\vec{j}$ углы по 60° . Найдите угол, который образует этот вектор с вектором $\vec{k}$.
2. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ E — середина AA_1 , а F — центр грани $DD_1 C_1 C$. Найдите площадь треугольника $EB_1 F$, если ребро куба равно 1.

7.

1. В основании пирамиды $MABCD$, помещенной в прямоугольную систему координат, лежит ромб $ABCD$. $A(-3; 10; -5)$; $C(3; 4; 1)$, $M(5; 8; -3)$. $\angle MAD = \angle MAB$. Найдите высоту пирамиды.
2. Используя скалярное произведение векторов, найдите наибольшее значение выражения $\sqrt{\sin^2 x + 0,5} + \sqrt{\cos^2 x - 0,5} + \sqrt{0,5}$. При каком значении x оно достигается?

8.

1. В тетраэдре $DABC$, помещенном в прямоугольную систему координат, основанием служит равнобедренный треугольник ABC . $AB = AC$. Высоты граней ADC и ADB , проведенные из вершины D , равны между собой. $A(1; 0; -2)$; $D(2; -1; 1)$; $K(0; 1; -1)$ — середина BC . Найдите высоту пирамиды.
2. Используя скалярное произведение векторов, найдите наибольшее значение суммы $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + 1$. При каком x это значение суммы достигается?

§ 4. Вычисление углов между прямыми в пространстве

1.

1. $|\vec{a}| = \sqrt{2}$; $|\vec{b}| = 1$; $\hat{\vec{a}} \vec{b} = 135^\circ$. Найдите угол между векторами $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - 2\vec{b}$.
2. В тетраэдре $DABC$ основанием служит равнобедренный треугольник ABC . $AB = AC$. $\angle DAC = \angle DAB$. Используя векторы, докажите, что $AD \perp BC$.

2.

1. $|\vec{a}| = 2$; $|\vec{b}| = 1$. $\hat{\vec{a}} \vec{b} = 120^\circ$. Найдите угол между векторами $\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{a} + 2\vec{b}$.
2. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ основанием служит ромб $ABCD$. $\angle A_1 AD = \angle A_1 AB$. Используя векторы, докажите, что $BD \perp AA_1$.

3.

1. В тетраэдре $BACD$ $\angle BDC = \angle BDA = \angle DCA = 90^\circ$. $BC = 3$; $AC = 4$. Найдите сумму $\vec{AB} \cdot \vec{AC} + \vec{BC} \cdot \vec{BA} + \vec{CA} \cdot \vec{CB}$.
2. В прямой треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ основанием служит равнобедренный треугольник ABC . $AC = CB = a$. $\angle ACB = 120^\circ$. $AA_1 = a$. E и F — середины соответственно ребер CA и BB_1 . Найдите:
 - 1) длину EF ,
 - 2) угол между прямыми EF и AA_1 .

4.

1. В пирамиде $PHKM$ ребро PM является высотой. $\angle PKN = 90^\circ$. Найдите сумму $\vec{MH} \cdot \vec{MK} + \vec{HK} \cdot \vec{HM} + \vec{KM} \cdot \vec{KH}$, если $MK = 6$; $KN = 8$.
2. В тетраэдре $MAVC$ $MC \perp ACB$; $\angle ACB = 135^\circ$; $AC = a\sqrt{2}$; $BC = MC = a$; E и F — середины соответственно ребер CA и BM . Найдите:
 - 1) длину EF ,
 - 2) угол между прямыми EF и CM .

5.

1. В прямой треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ основанием служит равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$). $BD \perp AC$. $BD = AC = 4$. $BB_1 = 2$. Через середину диагонали B_1C боковой грани перпендикулярно к ней проведена плоскость. Найдите угол между прямой AB_1 и этой плоскостью.
2. В тетраэдре $ABDC$ $BD = BC = BA$; $\angle ABD = \angle ABC = 60^\circ$; $\angle CBD = 90^\circ$. Используя векторы, докажите, что плоскости DAC и DBC перпендикулярны.

6.

1. В основании пирамиды $DABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$), $BD \perp ABC$, $AC = CB = 1$, $BD = 2$. Через середину ребра DC перпендикулярно к нему проведена плоскость. Найдите угол между AD и этой плоскостью.
2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $AB = 2$, $BC = AA_1 = 1$. Докажите, что диагональ BD_1 не перпендикулярна плоскости $A_1 C_1 D$.

7.

1. В основании пирамиды $MABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$), $AC = 3$, $BC = 5$. Ребро AM перпендикулярно стороне основания AC . $AM = 4$, $MB = \sqrt{30}$. Найдите высоту пирамиды.
2. В тетраэдре $DABC$ углы ADB , ADC и BDC — тупые. $AD = BD = CD$. Докажите, что треугольник ABC остроугольный.

8.

1. В тетраэдре $DABC$ $DB = DC = CB = AC = 3\sqrt{2}$. $AD = 3$, $\angle ACB = 90^\circ$. Найдите высоту пирамиды, опущенную из вершины D .
2. В пирамиде $MEFKP$ плоские углы при вершине M равны α . Вычислите угол β при вершине диагонального сечения EMK .

§ 5. Движения

1.

1. Найдите координаты точек, в которые переходит точка $A(100; 200; 1)$ при:
а) центральной симметрии относительно начала координат;
б) зеркальной симметрии относительно плоскости OXY .
2. Докажите, что при движении треугольник отображается на равный ему треугольник.

2.

1. Найдите координаты точек, в которые переходит точка $B(0,01; 0,02; -1)$ при:
а) осевой симметрии относительно оси OZ ;
б) параллельном переносе на вектор $\vec{p}(0,09; 0,08; 1)$.
2. Докажите, что при движении угол отображается на равный ему угол.

3.

1. а) Докажите, что точки $A(1; 2; 3)$ и $B(-1; -2; -3)$ симметричны относительно начала координат.
б) Докажите, что точки $B(3; -4; 5)$ и $C(3; 4; 5)$ симметричны относительно плоскости OXZ .
2. Докажите, что при движении двугранный угол отображается на равный ему двугранный угол.

4.

1. а) Пусть при параллельном переносе на вектор $\vec{p}$ точка $A(1; 2; 3)$ переходит в $B(4; 5; 6)$. Найдите координаты $\vec{p}$.
б) Докажите, что точки $A(5; 6; 7)$ и $B(-5; 6; -7)$ симметричны относительно оси OY .
2. Докажите, что при движении прямая и плоскость, составляющие угол φ , отображаются на прямую и плоскость, составляющие угол φ .

5.

1. Прямая a содержит биссектрису угла, образованного координатными осями OX и OY . Найдите координаты точки A_1 , в которую переходит точка $A (10; 20; 0)$ при осевой симметрии относительно прямой a .
2. Является ли движением отображение пространства на себя, при котором любая точка с координатами $(x; y; z)$ переходит в точку с координатами $(2x; 2y; 2z)$?

6.

1. Плоскость α содержит ось OX и биссектрису угла, образованного осями OZ и OY . Найдите координаты точки, в которую переходит точка $B (0; 20; 10)$ при зеркальной симметрии относительно плоскости α .
2. Является ли движение отображением пространства на себя, при котором любая точка с координатами $(x; y; z)$ переходит в точку $(x - 5; y + 3; z - 7)$?

7.

1. Пусть m_1 и m_2 — пересекающиеся перпендикулярные прямые. Докажите, что композиция симметрий относительно этих прямых есть симметрия относительно прямой, которая перпендикулярна этим прямым.
2. Является ли движением отображение пространства на себя, при котором любая точка с координатами $(x; y; z)$ переходит в точку $(-x + 2; -y - 3; -z + 1)$. Если да, то каким образом может быть получена такая точка?

8.

1. Докажите, что композиция трех центральных симметрий относительно точек A , B и C (точки не лежат на одной прямой) есть центральная симметрия относительно точки D , являющейся вершиной параллелограмма $ABCD$.
2. Является ли движением отображение пространства на себя, при котором любая точка с координатами $(x; y; z)$ переходит в точку $(x - 1; -y - 2; z + 1)$. Если да, то каким образом может быть получена такая точка?

§ 6. Применение движений пространства к решению задач

1.

- 1) Докажите, что при движении прямая, перпендикулярная плоскости, отображается на прямую, перпендикулярную плоскости.
- 2) Исходя из доказанного в задаче 1, докажите, что если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и другая перпендикулярна этой плоскости.

2.

- 1) Докажите, что при движении плоскость, перпендикулярная прямой, отображается на плоскость, перпендикулярную прямой.
- 2) Исходя из доказанного в задаче 1, докажите, что если одна из двух параллельных плоскостей перпендикулярна прямой, то и другая плоскость перпендикулярна этой прямой.

3.

- 1) Докажите, что прямая, содержащая высоту правильной четырехугольной пирамиды, является ее осью симметрии.
- 2) Исходя из доказанного в задаче 1, докажите, что любое сечение правильной четырехугольной пирамиды, содержащее ее высоту, является равнобедренным треугольником.

4.

- 1) Докажите, что прямая, содержащая точки пересечения диагоналей противоположных граней прямоугольного параллелепипеда, является его осью симметрии.
- 2) Исходя из доказанного в задаче 1, докажите, что любое сечение прямоугольного параллелепипеда плоскостью, содержащей точки пересечения диагоналей противоположных граней, является прямоугольником.

5.

- 1) Докажите, что прямая, содержащая середины противоположных ребер правильного тетраэдра, является его осью симметрии.
- 2) Исходя из доказанного в задаче 1, докажите, что каждая плоскость, проведенная через середины противоположных ребер правильного тетраэдра, делит этот тетраэдр на две равные части.

6.

- 1) Докажите, что точка пересечения диагоналей параллелепипеда является его центром симметрии.
- 2) Исходя из доказанного в задаче 1, докажите, что каждая плоскость, проведенная через точку пересечения диагоналей параллелепипеда, делит его на равные части.

7.

1. Даны осевые симметрии S_p и S_q пространства. p и q — оси симметрии, которые не совпадают. $S_q \cdot S_p$ и $S_p \cdot S_q$ — композиции этих симметрий. Докажите, что если $S_q \cdot S_p = S_p \cdot S_q$, то p и q — пересекающиеся прямые.
2. На данной прямой l найдите точку, симметричную данной точке A относительно точки, лежащей в плоскости α (l пересекает плоскость в точке M).

8.

1. Докажите, что биссектриса линейного угла двугранного угла является осью симметрии двугранного угла.
2. Из вершины параллелепипеда проведены три диагонали его граней. На этих отрезках, как на ребрах, построен параллелепипед. Докажите, что противоположная вершина данного параллелепипеда служит центром симметрии построенного.

§ 7. Цилиндр

1.

1. Через образующую цилиндра проведено два сечения, из которых одно — осевое с площадью, равной S . Угол между плоскостями сечений равен 30° . Найдите площадь второго сечения.
2. В правильную треугольную призму вписан цилиндр. Найдите площадь его поверхности, если сторона основания призмы равна $2\sqrt{3}$, а высота — 3.

2.

1. Через образующую цилиндра проведено два сечения, из которых одно осевое. Площадь меньшего из сечений равна Q . Угол между плоскостями сечений равен 60° . Найдите площадь осевого сечения.
2. Вокруг правильной треугольной призмы описан цилиндр. Найдите площадь поверхности цилиндра, если высота призмы равна 4, а высота основания призмы — 6.

3.

1. Диагональ развертки боковой поверхности цилиндра составляет со стороной основания развертки угол φ . Найдите угол между диагональю осевого сечения цилиндра и плоскостью основания.
2. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна 10, боковые грани наклонены к основанию под углом 60° . В эту пирамиду вписан цилиндр, одно основание которого лежит в плоскости основания пирамиды, а окружность верхнего основания касается боковой поверхности пирамиды. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если радиус основания равен 2.

4.

1. Угол между диагоналями осевого сечения цилиндра и плоскостью его основания равен α . Найдите угол между диагональю развертки его боковой поверхности и стороной основания развертки.
2. В правильную треугольную пирамиду вписан цилиндр, нижнее основание которого лежит в плоскости основания пирамиды, а окружность верхнего основания касается боковой поверхности пирамиды. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если сторона основания пирамиды равна $8\sqrt{3}$, а высота цилиндра — 2. Боковые грани пирамиды составляют с плоскостью основания угол 45° .

5.

1. В цилиндр, высота которого равна a , вписан прямоугольник, у которого одна сторона равна a , а вторая наклонена к плоскости основания цилиндра под углом в 60° . Зная, что вершины прямоугольника находятся на окружностях оснований цилиндра, найдите площадь осевого сечения цилиндра.
2. Все ребра правильной треугольной призмы равны по a ; боковые ребра ее являются осями цилиндрических поверхностей радиуса a . Найдите площадь боковой поверхности тела, ограниченного указанными цилиндрическими поверхностями и плоскостями оснований призмы.

6.

1. Вершины прямоугольника лежат на окружностях оснований цилиндра. Стороны прямоугольника относятся как 1 : 2, причем меньшие стороны лежат в плоскостях оснований. Высота цилиндра равна 5, а радиус основания — $2\sqrt{5}$. Плоскость прямоугольника пересекает ось цилиндра. Найдите площадь прямоугольника.
2. Все ребра правильной треугольной призмы равны a . Боковые ребра ее являются осями цилиндрических поверхностей радиуса $\frac{a}{2}$. Найдите площадь боковой поверхности тела, ограниченного указанными цилиндрическими поверхностями, плоскостями оснований призмы и лежащего внутри призмы.

7.

1. $ABCD$ и $EFKL$ — два взаимно перпендикулярных осевых сечения цилиндра, причем AD и EL — диаметры одного основания. M — середина образующей AB . $ML \perp AC$. Площадь осевого сечения равна 4. Найти площадь поверхности цилиндра.
2. В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ сторона основания равна a , а боковые грани наклонены к плоскости основания под углом $\varphi = \arctg 2$. В эту пирамиду вписан равносторонний цилиндр (осевое сечение — квадрат), у которого одна образующая принадлежит плоскости основания, а окружности оснований касаются апофем граней AMB и DMC . Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

8.

1. $ABCD$ и $EFKL$ — два взаимно перпендикулярных осевых сечения цилиндра, причем AD и EL — диаметры одного основания. M — середина FA , а N — середина AL , $MN = \sqrt{17}$. Площадь осевого сечения равна 16. Найдите площадь поверхности цилиндра.
2. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a . Боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 60° . В эту пирамиду вписан цилиндр, боковая поверхность которого касается пирамиды, а окружности оснований — боковых граней, причем образующая цилиндра расположена на диагонали основания. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если его высота равна h .

§ 8. Конус, усеченный конус

1.

1. В конусе через его вершину проведена плоскость, пересекающая основание по хорде, длина которой равна a и стягивающей дугу 90° . Наибольший угол между образующими конуса равен 60° . Найдите площадь боковой поверхности конуса.
2. Длины окружностей оснований усеченного конуса равны 4π и 10π . Высота конуса равна 4. Найдите площадь поверхности усеченного конуса.

2.

1. Через вершину конуса проведена плоскость, пересекающая основание по хорде, длина которой равна m . Угол между образующими в сечении прямой, а наибольший угол между образующими конуса 120° . Найдите площадь боковой поверхности конуса.
2. Найдите радиусы основания усеченного конуса, если его боковая поверхность равна 208π , образующая — 13, а высота — 5.

3.

1. Центральный угол в развертке боковой поверхности конуса равен 120° . Площадь боковой поверхности равна 12π . Найдите площадь осевого сечения конуса.
2. Образующая усеченного конуса равна l и составляет с плоскостью основания угол α . Диагональ его осевого сечения перпендикулярна образующей. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

4.

1. Центральный угол в развертке боковой поверхности конуса равен — 240° . Высота конуса — $5\sqrt{5}$. Найдите площадь боковой поверхности конуса.
2. Образующая усеченного конуса составляет с плоскостью нижнего основания угол φ . Диагональ его осевого сечения перпендикулярна образующей конуса. Сумма длин окружностей оснований равна $2\pi t$. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

5.

1. Центральный угол в развертке боковой поверхности конуса равен 270° . Через вершину конуса проведено сечение наибольшей площади. Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью основания.
2. Через середину высоты конуса проведена плоскость, параллельная основанию. Площади полных поверхностей частей конуса, которые при этом образовались, относятся как $3 : 11$. Найдите угол между образующей конуса и плоскостью основания.

6.

1. Центральный угол в развертке боковой поверхности конуса равен 200° . Через вершину конуса проведено сечение наибольшей площади. Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью основания.
2. Радиусы оснований усеченного конуса относятся как $1 : 2$. Через середину высоты конуса проведена плоскость, параллельная основаниям, которая делит конус на части, полные поверхности которых относятся как $23 : 39$. Найдите угол наклона образующей к плоскости основания.

7.

1. Точки $A(1; 2; -2)$; $B(4; 2; -2)$; $C(3; 4; -2)$ лежат на окружности основания конуса, высота которого равна 3. Конус пересекает плоскость $z = 0$. Найдите площадь сечения конуса этой плоскостью, координаты вершины конуса и площадь боковой поверхности конуса.
2. Диагонали осевого сечения усеченного конуса взаимно перпендикулярны. Площадь боковой поверхности усеченного конуса относится к площади боковой поверхности конуса, образующей которого служит диагональ сечения, а радиусом основания его высота, как $\sqrt{6} : 3$. Найдите угол наклона образующей к плоскости основания.

8.

1. Точки $A(1; -1; 2)$; $B(-2; -1; 2)$; $C(-2; 3; 2)$ лежат на окружности основания конуса. Точка $M(0; \frac{5}{3}; 6)$ лежит на его боковой поверхности. Найдите площадь боковой поверхности конуса.
2. Образующая усеченного конуса равна 1, диагонали осевого сечения взаимно перпендикулярны. Площадь полной поверхности конуса равна $\frac{\pi}{2}(\sqrt{3} + 1)$. Найдите угол наклона образующей к плоскости основания.

§ 9. Площадь поверхности тел вращения.

Комбинации конуса с многогранниками

1.

1. Прямоугольный треугольник с катетами, равными 3 и 4, вращается вокруг прямой, содержащей гипотенузу. Найдите площадь поверхности тела вращения.
2. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a , а боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 45° . Найдите площадь боковой поверхности, вписанного в пирамиду конуса.

2.

1. Равнобедренный треугольник, у которого основание равно $4\sqrt{3}$, а угол при вершине 120° , вращается вокруг прямой, содержащей основание. Найдите площадь поверхности тела вращения.
2. Вокруг правильной треугольной пирамиды описан конус. Найдите площадь боковой поверхности конуса, если сторона основания пирамиды равна a , а боковые ребра наклонены к основанию под углом 30° .

3.

1. В прямоугольной трапеции $ABCD$ (BC и AD — основания) $\angle BAD = 90^\circ$; $BC = AB = a$; $AD = 2a$. Найдите площадь поверхности тела, образованного при вращении этой трапеции вокруг прямой, содержащей основание трапеции AD .
2. В основании пирамиды $DABC$ лежит равнобедренный треугольник ABC , у которого $AC = AB = a$, $\angle BAC = \alpha$. Вокруг пирамиды описан конус. Найдите площадь его боковой поверхности, если $\angle DAC = \beta$.

4.

1. Диагонали ромба равны 6 и 8. Этот ромб вращается вокруг прямой, содержащей одну из его сторон. Найдите площадь поверхности полученного тела.
2. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник, боковая сторона которого равна a , угол при основании α . Боковые грани пирамиды наклонены к основанию под углом φ . Найдите площадь боковой поверхности вписанного в пирамиду конуса.

5.

1. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна a , а угол при вершине равен 120° . Треугольник вращается вокруг прямой, проходящей через вершину треугольника, которая параллельна биссектрисе угла при основании. Найдите площадь поверхности тела вращения.
2. В правильной пятиугольной пирамиде боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом φ . Образующая вписанного в пирамиду конуса равна m . Найдите площадь осевого сечения конуса.

6.

1. Периметр параллелограмма равен P , а диагональ — d . Параллелограмм вращается вокруг оси, проходящей через вершину параллелограмма и перпендикулярной его диагонали. Найдите площадь поверхности тела вращения.
2. В правильной пятиугольной пирамиде угол наклона боковой грани к плоскости основания равен φ , образующая описанного около пирамиды конуса равна l . Найдите площадь осевого сечения конуса.

7.

1. На рис. 7 изображена 8-звеньевая ломаная линия, все звенья которой равны a , а угол между звеньями α . Найдите площадь поверхности, которая образуется при вращении этой ломаной вокруг оси l .
2. Все ребра правильной треугольной призмы равны a . Четыре вершины призмы лежат в плоскости основания конуса, а две другие — на его боковой поверхности. Образующая конуса составляет с плоскостью основания угол φ . Найдите площадь осевого сечения конуса и ее наименьшее возможное значение. При каком значении угла φ это достигается?

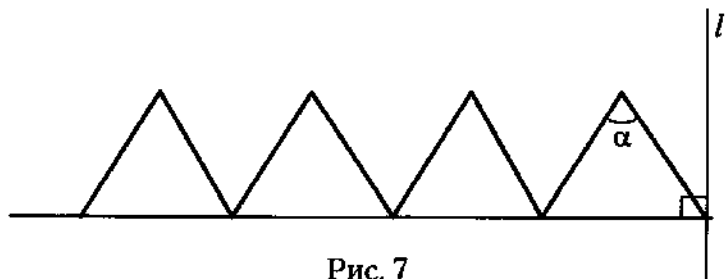


Рис. 7

8.

1. На рис. 8 изображено три квадрата со стороной, равной a . Найдите площадь поверхности, которая образуется при вращении этой фигуры вокруг оси l .
2. Правильная треугольная призма, все ребра которой равны a , вписана в конус, причем три ее вершины лежат на боковой поверхности конуса, а три — в плоскости основания. Образующая конуса составляет с плоскостью основания угол φ . Найдите площадь осевого сечения конуса и ее наименьшее значение. При каком значении φ оно достигается?

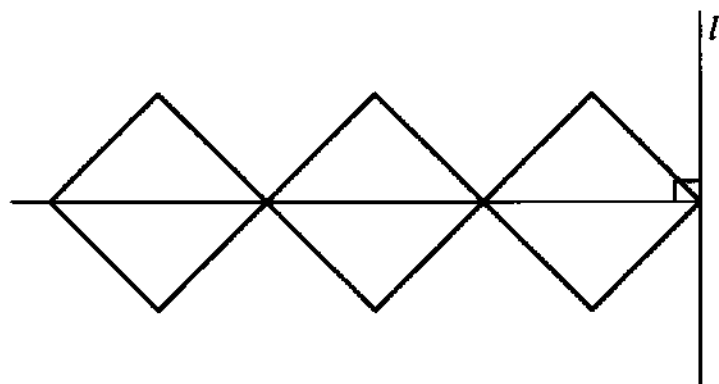


Рис. 8

§ 10. Уравнение сферы.

Взаимное расположение сферы и плоскости

1.

1. Точка $A(0; \sqrt{2}; \sqrt{5})$ лежит на сфере с центром $O(3; 0; 0)$.
 - а) Напишите уравнение сферы.
 - б) Принадлежат ли этой сфере точки с координатами $(5; 0; 2\sqrt{3})$; $(4; -1; 0)$?
2. Вершины прямоугольного треугольника с катетами 15 и $\sqrt{351}$ лежат на сфере. Найдите радиус сферы, если расстояние от центра сферы до плоскости треугольника равно 5.

2.

1. Центр сферы имеет координаты $(0; 0; 4)$. Сфера проходит через точку $(2\sqrt{2}; 0; 5)$.
 - 1) Напишите уравнение сферы.
 - 2) Принадлежат ли сфере точки с координатами $(3; 1; 5)$; $(0; \sqrt{5}; 6)$?
2. Все стороны квадрата касаются сферы. Диагональ квадрата равна $10\sqrt{2}$. Найдите радиус сферы, если расстояние от центра сферы до плоскости квадрата равно 12.

3.

1. Составьте уравнение сферы, радиус которой равен 2, если известно, что центр сферы лежит в плоскости OXZ , а сама сфера проходит через начало координат и точку $A(1; 1; 0)$.
2. Сторона ромба равна a , острый угол в ромбе α . Все стороны ромба касаются шара, площадь большего круга которого равна $\frac{\pi a^2}{8}$. Найдите расстояние от центра шара до плоскости ромба.

4.

1. Составьте уравнение сферы с радиусом, равным 3, если известно, что центр сферы лежит на оси OZ и сфера проходит через точку $K(-2; -2; 1)$.
2. Точки A , B и C лежат на поверхности шара. Хорды AB и BC равны a , угол между ними α . На каком расстоянии от центра шара находится плоскость ABC , если площадь большего круга шара равна $\frac{\pi a^2}{2}$.

5.

1. Дана сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ и на ней точка $A(\sqrt{2}; \sqrt{2}; z)$. Через точки A и $B(-\sqrt{2}; 2\sqrt{2}; \sqrt{2})$ проведена прямая. Найдите координаты точек пересечения этой прямой и сферы.
2. Плоскость проходит через точки $A(3; 0; 0)$; $B(0; 4; 0)$; $C(0; 0; 1)$. Пересекает ли эта плоскость сферу $x^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{49}{169}$. Если да, то найдите длину линии пересечения.

6.

1. Прямая задана точками $A(1; 2; -1)$ и $B(3; 0; 2)$. Найдите координаты точек пересечения прямой AB со сферой $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = \frac{17}{4}$.
2. Плоскость проходит через точки $A(2; 0; 0)$; $B(0; 0; 3)$; $C(0; 1; 0)$. Выясните взаимное положение сферы $x^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 + z^2 = R^2$ и плоскости ABC в зависимости от R .

7.

1. Сферы $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z - 2 = 0$ и $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 2z - 6 = 0$ пересекаются. Найдите длину линии пересечения этих сфер.
2. Найдите множество точек, расположенных вдвое ближе к точке $A(2; 0; 0)$, чем к точке $B(-4; 0; 0)$.

8.

1. Даны две сферы $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 20 = 0$ и сфера с центром в точке $O_2(2; 4; 2)$. Они пересекаются по окружности, длина которой равна $2\pi\sqrt{21}$. Найдите уравнение второй сферы.
2. Найдите множество точек, расположенных вдвое ближе к точке $M(0; 2; 0)$, чем к точке $P(0; 4; 0)$.

§ 11. Сфера

1.

1. Линия пересечения сферы и плоскости, удаленной от центра сферы на 8, имеет длину 12π . Найдите площадь поверхности сферы.
2. Плоскость пересекает шар. Диаметр, проведенный в одну из точек линии пересечения, составляет с плоскостью угол 45° . Найдите площадь сечения, если диаметр шара равен $4\sqrt{3}$.

2.

1. Сечение шара плоскостью, удаленной от его центра на 12, имеет площадь 25π . Определите площадь поверхности шара.
2. Плоскость пересекает сферу. Диаметр сферы, проведенный в одну из точек линии пересечения, имеет длину $4\sqrt{2}$ и составляет с плоскостью угол 45° . Найдите длину линии пересечения.

3.

1. Сечения шара двумя параллельными плоскостями, между которыми лежит центр шара, имеют площади 144π и 25π . Найдите площадь поверхности шара, если расстояние между параллельными плоскостями равно 17.
2. Через точку, не лежащую на сфере, проведены две плоскости, касающиеся сферы. Найдите расстояние от центра сферы до линии пересечения плоскостей, если угол между плоскостями равен 60° , а площадь сферы 32π .

4.

1. Сечения сферы двумя параллельными плоскостями имеют длины 10π и 24π . Найдите площадь сферы, если расстояние между плоскостями равно 7 и центры сечений лежат на одном радиусе.
2. Через точку на поверхности шара проведены две плоскости, пересекающие его. Обе плоскости удалены от центра сферы на расстояние $2\sqrt{3}$, угол между ними равен 60° . Найдите площадь полученных сечений.

5.

1. Два взаимно перпендикулярных сечения шара имеют общую хорду длиной 12. Зная, что площади этих сечений 100π и 64π , найдите радиус шара.
2. Конус, осевое сечение которого прямоугольный треугольник, и полушар с радиусом R имеют общее основание. Параллельно основанию полушара проведена плоскость. Найдите расстояние от проведенной плоскости до центра полушара так, чтобы площадь кольца, которое образовалось при пересечении полушара и конуса с этой плоскостью, была наибольшей.

6.

1. Площадь большого круга шара равна 50π . Два взаимно перпендикулярных сечения шара имеют общую хорду длиной 6. Найдите расстояние от центра шара до плоскостей сечений, если площадь одного из них 25π .
2. Полушар пересечен плоскостью, параллельной основанию. Получившееся сечение служит верхним основанием цилиндра, нижнее основание которого лежит в плоскости основания полушара. Найдите расстояние от плоскости сечения до центра полушара так, чтобы площадь боковой поверхности цилиндра была наибольшей.

7.

1. Из точки поверхности шара проведены три равные хорды под углом α одна к другой. Найдите их длину, если радиус шара равен R .
2. Из одной точки сферы проведены три попарно перпендикулярные хорды длиной a , b и c . Найдите площадь сферы.

8.

1. Четыре шара радиуса R расположены так, что каждый шар касается трех других. Найдите радиус сферы, которая внутренним образом касается данных шаров.
2. Шар касается всех ребер тетраэдра. Сравните суммы длин скрещивающихся ребер тетраэдра.

§ 12. Комбинация сферы с другими геометрическими телами

1.

1. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 3, а боковые ребра наклонены к основанию под углом 60° . Найдите радиус описанной вокруг пирамиды сферы.
2. В правильную четырехугольную призму вписана сфера. Найдите отношение площади полной поверхности призмы к площади сферы.

2.

1. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 4, а боковые грани наклонены к основанию под углом 60° . Найдите радиус вписанной в эту пирамиду сферы.
2. В правильной четырехугольной призме сторона основания равна 2, а боковое ребро — $2\sqrt{2}$. Найдите площадь описанной около призмы сферы.

3.

1. В основании пирамиды лежит треугольник, одна из сторон которого равна 4, а противолежащий ей угол равен 30° . Боковые ребра пирамиды равны 5. Найдите расстояние от центра описанного около пирамиды шара до плоскости основания.
2. В основании прямого параллелепипеда лежит ромб с острым углом α . В этот параллелепипед вписан шар. Найдите угол между большей диагональю параллелепипеда и плоскостью основания.

4.

1. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник, катеты которого равны 3 и 4. Вершина пирамиды удалена от каждой стороны основания на расстояние, равное 3. Найдите радиус вписанного в пирамиду шара.
2. В основании прямой призмы лежит треугольник со стороной, равной 5. Угол, лежащий против этой стороны, равен 150° . Высота призмы равна 24. Найдите площадь описанной около призмы сферы.

5.

1. В шар с радиусом R вписана пирамида, в основании которой лежит квадрат. Одно из боковых ребер перпендикулярно к плоскости основания, а наибольшее боковое ребро образует с ней угол 30° . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
2. Около шара описана правильная треугольная усеченная пирамида, стороны основания которой равны a и b . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

6.

1. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a . Поверхность вписанного в пирамиду шара делит высоту пирамиды пополам. Найдите боковое ребро пирамиды.
2. В шар с радиусом R вписана правильная шестиугольная призма. Радиус, проведенный в вершину призмы, образует с плоскостью боковой грани угол 45° . Найдите площадь боковой поверхности призмы.

7.

1. Все ребра четырехугольной пирамиды равны по a . Высота пирамиды является диаметром шара. Найдите длину линии пересечения поверхностей этих тел.
2. В куб с ребром, равным a , вписан шар. Затем в один из трехгранных углов при вершине куба вписан второй шар, касающийся первого шара. Найдите радиус второго шара.

8.

1. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a . Боковые грани наклонены к основанию под углом 60° . Высота пирамиды является диаметром шара. Найдите длину линии пересечения поверхностей этих тел.
2. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a , двугранный угол при основании пирамиды 60° . В пирамиду вписаны три равных шара, каждый из которых касается двух других шаров, плоскости основания и одной из боковых граней пирамиды. Зная, что точки касания шаров с основанием лежат на апофемах основания, найдите радиус шара.

§ 13. Объем прямоугольного параллелепипеда

1.

1. Измерения прямоугольного параллелепипеда относятся как $2 : 3 : 4$. Диагональ параллелепипеда равна $\sqrt{29}$. Найдите его объем.
2. Основанием прямой призмы служит прямоугольный треугольник с углом 30° . Расстояние от бокового ребра, проходящего через вершину прямого угла, до противоположной боковой грани равно боковому ребру и равно 6. Найдите объем призмы.

2.

1. Стороны оснований и диагональ прямоугольного параллелепипеда относятся как $1 : 2 : 3$. Длина бокового ребра равна 4. Найдите объем параллелепипеда.
2. В основании прямой призмы лежит равнобедренный прямоугольный треугольник. Диагональ большей боковой грани равна 12 и составляет с плоскостью основания угол 45° . Найдите объем призмы.

3.

1. Основанием прямоугольного параллелепипеда служит квадрат. Диагональ параллелепипеда равна d и составляет с боковой гранью угол 30° . Найдите его объем.
2. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит прямоугольный треугольник ABC ($C = 90^\circ$). $AC = 4$; $BC = 2\sqrt{3}$; $\angle AB_1C = 30^\circ$. Найдите объем призмы.

4.

1. Основанием прямоугольного параллелепипеда служит квадрат со стороной a . Диагональ параллелепипеда составляет с боковой гранью угол в 30° . Найдите объем параллелепипеда.
2. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$). $AC = 5$. Плоскость AB_1C составляет с плоскостью основания угол 45° . Расстояние от вершины B до этой плоскости равно $2\sqrt{2}$. Найдите объем призмы.

5.

1. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны 6 и 8. Через диагональ основания проведена плоскость, параллельная диагонали параллелепипеда. Эта плоскость составляет с плоскостью основания угол 45° . Найдите объем параллелепипеда.
2. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$); $AC = BC = a$. Диагональ боковой грани B_1C составляет с плоскостью грани AA_1B_1B угол α . Найдите объем призмы.

6.

1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $AB = 6$; $BC = \frac{12}{\sqrt{5}}$. Через диагональ основания и вершину B_1 проведена плоскость, удаленная от вершины B на расстояние, равное 2,4. Найдите объем параллелепипеда.
2. В прямой призме $ABCA_1B_1C_1$ основанием служит прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$); $\angle ABC = \beta$. Через диагональ боковой грани B_1C проведена плоскость, перпендикулярная грани AA_1B_1B и составляющая с плоскостью основания угол α . Высота призмы равна h . Найдите объем призмы.

7.

1. Стороны AB и BC основания прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равны соответственно 6 и 8. Через середины сторон AD и CD и вершину B , проведена плоскость, составляющая с плоскостью основания угол 45° . Найдите объем параллелепипеда.
2. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$). $BC = 4$; $BB_1 = 3$. Угол между диагоналями граней AC_1 и CB_1 равен $\arccos \frac{3\sqrt{2}}{10}$. Найдите объем призмы.

8.

1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $AB = 5$, $BC = 12$. Через диагональ параллелепипеда $B_1 D$ параллельно диагонали основания AC проведена плоскость, составляющая с плоскостью основания угол в 60° . Найдите объем параллелепипеда.
2. Основанием прямой призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ служит прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$). $AC = 3$; $CB = 6$. M — точка пересечения медиан треугольника ABC , а P — центр симметрии грани $CC_1 B_1 B$. Прямая MP составляет с плоскостью грани $AA_1 C_1 C$ угол $\arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}$. Найдите объем призмы.

§ 14. Объем прямой призмы и цилиндра

1.

1. Основанием прямой призмы служит треугольник со сторонами 10, 10 и 12. Через большую сторону нижнего основания и середину противоположного бокового ребра проведена плоскость под углом 60° к плоскости основания. Найдите объем призмы.
2. Сечение цилиндра, параллельное его оси, отсекает от окружности основания дугу 120° . Радиус основания цилиндра равен R , а угол между диагональю сечения и осью цилиндра равен 30° . Найдите объем цилиндра.

2.

1. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит треугольник ABC , у которого $AB = BC = 10$; $\angle ABC = 30^\circ$. Через ребро AA_1 проведена плоскость, перпендикулярная к грани CC_1B_1B . Диагональ сечения составляет с плоскостью основания угол 45° . Найдите объем призмы.
2. Плоскость, параллельная оси цилиндра, отстоит от нее на расстоянии, равное 15. Диагональ получившегося сечения равна 20, а радиус основания цилиндра — 17. Найдите объем цилиндра.

3.

1. В основании прямого параллелепипеда лежит ромб, диагонали которого равны 6 и 8. Плоскость сечения, проходящего через два противоположных ребра верхнего и нижнего оснований, составляет с основанием угол 60° . Найдите объем параллелепипеда.
2. Радиус основания конуса равен 4, а его высота — 10. В этот конус вписан цилиндр так, что его верхнее основание касается боковой поверхности конуса, а нижнее лежит в плоскости его основания. Осевое сечение цилиндра — квадрат. Найдите объем цилиндра.

4.

1. Основанием прямого параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ служит параллелограмм $ABCD$. $BD = 6$; $\angle ABD = 90^\circ$; $\angle BDA = 30^\circ$. Плоскость сечения, проходящая через большие два ребра оснований, составляет с основанием угол 30° . Найдите объем параллелепипеда.
2. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна 8, а ее высота — 16. В эту пирамиду вписан цилиндр так, что окружность верхнего основания касается боковой поверхности пирамиды, а нижнее основание лежит в плоскости ее основания. Осевое сечение цилиндра — квадрат. Найдите объем цилиндра.

5.

1. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ диагонали $B_1 F$ и $B_1 E$ равны соответственно 24 и 25. Найдите объем призмы.
2. Сечение, параллельное оси цилиндра, отсекает от окружности основания дугу 120° . Найдите отношение объемов частей, на которые эта плоскость разделила цилиндр.

6.

1. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ $C_1 E = 3$, $\angle F C_1 E = \arctg \frac{1}{3}$. Найдите объем призмы.
2. Сечение, параллельное оси цилиндра, отсекает от окружности основания дугу 60° . Найдите отношение объемов частей, на которые эта плоскость разделила цилиндр.

7.

1. Около куба описана призма так, что все вершины куба являются серединами сторон оснований призмы. Основанием призмы служит трапеция, основания которой равны a и b . Найдите объем призмы.
2. Корыто полуцилиндрической формы наполнено до краев жидкостью. Сколько процентов жидкости выльется, если корыто наклонить на 30° так, чтобы образующие цилиндра оставались горизонтальными.

8.

1. Площадь боковой грани правильной шестиугольной призмы равна Q . Через боковое ребро проведено сечение, которое разделило призму на части, объемы которых относятся как 1 : 3. Найдите площадь сечения.
2. Две образующие цилиндра с квадратным осевым сечением лежат на основаниях другого цилиндра, а окружности его оснований касаются боковой поверхности другого цилиндра. Найдите отношение объемов этих цилиндров.

§ 15. Объем наклонной призмы

1.

- Основанием наклонной призмы служит правильный треугольник. Одна из боковых граней является ромбом с диагоналями, равными 6 и 8. Боковые ребра наклонены к основанию под углом 60° . Найдите объем призмы.
- В наклонном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ боковое ребро равно 10. Расстояние между ребром AA_1 и ребрами BB_1 и DD_1 соответственно равно 5 и 12, а расстояние между AA_1 и CC_1 равно 13. Найдите объем параллелепипеда.

2.

- Основанием наклонного параллелепипеда служит ромб, одна из диагоналей которого равна 6. Диагональ одной из боковых граней равна $5\sqrt{3}$ и перпендикулярна к плоскости основания. Боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 60° . Найдите объем параллелепипеда.
- В наклонной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ боковое ребро равно 10, расстояния от ребра AA_1 до ребер CC_1 и BB_1 равны 13, а расстояние от AA_1 до противоположащей боковой грани — 5. Найдите объем призмы.

3.

- Основанием наклонной призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ служит правильный треугольник ABC . $\angle A_1 AC = \angle A_1 AB = 60^\circ$. Сторона основания равна a , а боковое ребро — b . Найдите объем призмы.
- В наклонном параллелепипеде боковое ребро наклонено к основанию под углом 60° . Высота параллелепипеда равна $5\sqrt{3}$. Площади двух смежных боковых граней равны 40 и 60. Угол между ними равен 45° . Найдите объем параллелепипеда.

4.

- Основанием наклонного параллелепипеда служит прямоугольник со сторонами, равными a и b . Боковое ребро, равное c , составляет с прилежащими сторонами основания угол 60° . Найдите объем параллелепипеда.
- В наклонной треугольной призме высота равна $10\sqrt{2}$, а боковые ребра составляют с плоскостью основания угол 45° . Площади двух граней равны 100 и 200, а угол между ними 120° . Найдите объем призмы.

5.

1. Основанием наклонной призмы служит правильный треугольник. Все ребра призмы равны между собой. Одно из боковых ребер составляет с прилежащими сторонами основания угол 45° . Площадь боковой поверхности призмы равна $4(1 + \sqrt{2})$. Найдите объем призмы.
2. В наклонной треугольной призме расстояние от бокового ребра до диагонали противоположающей боковой грани равно 5, а площадь этой грани 40. Найдите объем призмы.

6.

1. Основанием наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$). Плоскость грани AA_1C_1C перпендикулярна плоскости основания. Боковое ребро призмы наклонено к основанию под углом 60° и равно катетам основания. Площадь боковой поверхности призмы равна $2(\sqrt{7} + \sqrt{3} + 2)$. Найдите объем призмы.
2. В наклонной треугольной призме угол между боковым ребром и скрещивающейся с ним стороной основания равен 45° . Длина этой стороны равна 6, а расстояние от бокового ребра до боковой грани, содержащей эту сторону, равно 4. Длина бокового ребра равна 5. Найдите объем призмы.

7.

1. Основанием наклонной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит правильный треугольник ABC со стороной, равной a . Боковое ребро равно b . $\angle A_1AC = 60^\circ$; $\angle AA_1B = 45^\circ$. Найдите объем призмы.
2. В наклонной четырехугольной призме $ABCD A_1B_1C_1D_1$ основанием служит четырехугольник $ABCD$, у которого $AC = 5$; $BD = 4$ и $AC \perp BD$. Диагональное сечение BB_1D_1D — прямоугольник, а площадь сечения AA_1C_1C равна 30. Найдите объем призмы.

8.

1. Основанием наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит треугольник ABC , у которого $AB = 50$; $AC = 40$ и $\angle BAC = 60^\circ$, $AA_1 = 25$. Расстояние от вершины A_1 до стороны AC равно 7, а до стороны AB — 20. Найдите объем призмы.
2. Основанием наклонного параллелепипеда $ABCD A_1B_1C_1D_1$ служит квадрат со стороной, равной a . Боковые ребра тоже равны a . $\angle A_1AD = \angle A_1AB < 90^\circ$. Двугранный угол при ребре AA_1 равен 120° . Найдите объем параллелепипеда.

§ 16. Объем пирамиды

1.

1. В правильной треугольной пирамиде высота основания равна h , боковые ребра наклонены к основанию под углом α . Найдите объем пирамиды.
2. Основанием пирамиды $MABCD$ служит ромб со стороной a и острым углом A , равным α . Боковое ребро MB перпендикулярно к плоскости основания, а грани MAD и MDC наклонены к нему под углом β . Найдите объем пирамиды.

2.

1. В правильной четырехугольной пирамиде диагональ основания равна d . Боковые грани наклонены к основанию под углом α . Найдите объем пирамиды.
2. Основанием пирамиды $DABC$ служит равнобедренный треугольник ABC . $AB = BC = a$, $\angle ABC = \alpha$. Ребро BD перпендикулярно к плоскости основания, а грань ADC составляет с ним угол β . Найдите объем пирамиды.

3.

1. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна h , а плоский угол при вершине α . Найдите объем пирамиды.
2. В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами $\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$ и 4. Боковые ребра наклонены к основанию под углом 45° . Найдите объем пирамиды.

4.

1. Высота правильной треугольной пирамиды равна h , а плоский угол при вершине пирамиды — α . Найдите объем пирамиды.
2. В основании пирамиды лежит равнобедренная трапеция с углом 30° . Боковые грани наклонены к основанию под углом 60° . Высота пирамиды равна $3\sqrt{3}$. Найдите объем пирамиды.

5.

1. Основанием пирамиды $MABC$ служит прямоугольный треугольник ABC . $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = \alpha$. Грань AMB перпендикулярна плоскости основания, а остальные две грани наклонены к нему под углом β . Расстояние от основания высоты до грани BMC равно d . Найдите объем пирамиды.
2. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a , а угол между смежными боковыми гранями α . Найдите объем пирамиды.

6.

1. Основанием пирамиды $DABC$ служит равнобедренный треугольник ABC . $AB = BC$, $\angle ABC = \alpha$. Грань ADC перпендикулярна плоскости основания, а остальные две грани наклонены к нему под углом β . Расстояние от основания высоты до боковой грани BDC равно d . Найдите объем пирамиды.
2. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна a , а угол между смежными боковыми гранями α . Найдите объем пирамиды.

7.

1. В основании треугольной пирамиды $MABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной, равной $\sqrt{2}$. $MA = \sqrt{2}$. Боковые грани пирамиды имеют равные площади. Найдите объем пирамиды.
2. В тетраэдре $DABC$ $M \in AB$, причем $AM = \frac{1}{3}AB$. P — середина медианы AF грани ABC , а K — середина медианы AL грани ADB . Через точки M , K и P проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

8.

1. В основании пирамиды $MABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной, равной $\sqrt{3}$. $MA = 6$. Боковые грани имеют равные площади. Найдите объем пирамиды.
2. В треугольной пирамиде $MABC$ $MA = 4$, $MB = 6$, $MC = 5$. На ребрах MA , MB и MC выбраны точки A_1 , B_1 и C_1 так, что $MA_1 = 1$; $MB_1 = 3$ и $MC_1 = 2$. В каком отношении плоскость $A_1B_1C_1$ делит объем пирамиды?

§ 17. Объем конуса

1.

1. Через вершину конуса проведена плоскость под углом 60° к плоскости основания и пересекающая основание по хорде, стягивающей дугу 60° . Высота конуса равна $4\sqrt{3}$. Найдите объем конуса.
2. В правильную четырехугольную пирамиду вписан конус. Найдите отношение объемов конуса и пирамиды.

2.

1. Через вершину конуса проведена плоскость, пересекающая окружность основания по хорде, равной $6\sqrt{3}$ и стягивающей дугу 120° . Плоскость составляет с плоскостью основания угол 45° . Найдите объем конуса.
2. Вокруг правильной четырехугольной пирамиды описан конус. Найдите отношение объемов конуса и пирамиды.

3.

1. Угол в развертке боковой поверхности конуса равен 120° . Площадь боковой поверхности конуса равна 3π . Найдите объем конуса.
2. В правильную треугольную пирамиду вписан конус. Сторона основания пирамиды равна $10\sqrt{3}$. Расстояние от середины высоты пирамиды до боковой грани равно $\frac{30}{13}$. Найдите объем конуса.

4.

1. Длина хорды и радиус развертки боковой поверхности конуса соответственно равны $6\sqrt{3}$ и 6. Найдите объем конуса.
2. В правильную треугольную пирамиду вписан конус. Сторона основания пирамиды равна $6\sqrt{3}$. Расстояние от вершины основания до противоположной боковой грани равно $\sqrt{56}$. Найдите объем конуса.

5.

1. Два конуса расположены так, что основания их параллельны и вершина каждого из них расположена в центре основания другого. Найдите объем общей части конусов, если образующая одного из них равна a и составляет с высотой угол β , а наибольший угол между образующими другого конуса равен α .
2. Основанием пирамиды служит равнобедренная трапеция, основания которой равны 10 и 20, а боковая сторона равна 10. Объем описанного около пирамиды конуса равен $\frac{1000\pi\sqrt{3}}{3}$. Найдите угол наклона боковых ребер к плоскости основания.

6.

1. Два конуса расположены так, что основания их параллельны и вершины каждого из них расположены в центре основания другого. Найдите объем общей части этих конусов, если радиусы их оснований равны 4 и 6, а общая высота — 15.
2. Конус вписан в пирамиду, основанием которой служит прямоугольная трапеция, основания которой равны 2 и 4. Объем конуса равен $\frac{64\pi}{81}$. Найдите угол наклона боковых граней к плоскости основания.

7.

1. Через вершину конуса проведено сечение, имеющее наибольшую площадь. Плоскость этого сечения составляет с плоскостью основания угол $\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$. Образующая конуса равна l . Найдите объем меньшей части конуса, отсеченной этой плоскостью.
2. Длина бокового ребра правильной треугольной пирамиды равна 10, длина стороны основания — 12. Боковая грань пирамиды вписана в окружность основания конуса, образующей которого принадлежит боковое ребро пирамиды. Найдите объем конуса.

8.

1. Через вершину конуса проведено сечение, имеющее наибольшую площадь. Плоскость этого сечения составляет с плоскостью основания угол $\arctg \sqrt{2}$. Высота конуса равна H . Найдите объем большей части конуса, отсеченного этой плоскостью.
2. Основанием пирамиды служит прямоугольник, стороны которого 12 и 4. Боковые ребра пирамиды равны 10. Боковая грань, проходящая через большую сторону прямоугольника, вписана в окружность основания конуса, а образующая конуса принадлежит высоте противоположной боковой грани, проведенной из вершины пирамиды. Найдите объем конуса.

§ 18. Объем усеченной пирамиды и усеченного конуса

1.

1. Стороны оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны $6\sqrt{2}$ и $4\sqrt{2}$. Площадь диагонального сечения равна 90. Найдите объем пирамиды.
2. Радиусы оснований усеченного конуса относятся как 1 : 3. Образующая конуса равна 4 и составляет с плоскостью основания угол 60° . Найдите объем конуса.

2.

1. Стороны оснований правильной треугольной усеченной пирамиды равны $8\sqrt{3}$ и $4\sqrt{3}$. Площадь сечения, проходящего через боковое ребро пирамиды и середину противоположной стороны основания равна 54. Найдите объем пирамиды.
2. Высота усеченного конуса равна 5, а диагональ осевого сечения — 13. Радиусы оснований относятся как 1 : 2. Найдите объем конуса.

3.

1. В правильной треугольной усеченной пирамиде стороны основания равны a и b ($a > b$). Боковое ребро равно $a - b$. Найдите объем пирамиды.
2. В равнобедренном треугольнике ABC $AB = BC = 10$; $AC = 12$. Треугольник вращается вокруг оси, проходящей через вершину C и перпендикулярной AC . Найдите объем тела вращения.

4.

1. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде стороны оснований равны m и $2m$, апофема пирамиды равна $\frac{m\sqrt{3}}{2}$. Найдите объем пирамиды.
2. В равнобедренном треугольнике ABC $AC = CB = 25$, $AB = 48$. Треугольник вращается вокруг оси, проходящей через вершину B и перпендикулярной AB . Найдите объем тела вращения.

5.

1. Основаниями треугольной усеченной пирамиды служат правильные треугольники со сторонами 4 и 12. Одна боковая грань перпендикулярна плоскости основания, а две другие составляют с ней угол 60° . Найдите объем пирамиды.
2. Параллелограмм $ABCD$ вращается вокруг прямой, проходящей через вершину A параллельно меньшей диагонали BD . Найдите объем тела вращения, если в данном параллелограмме $\angle A = 60^\circ$, большая сторона 6, а меньшая диагональ перпендикулярна стороне.

6.

1. Основаниями усеченной пирамиды служат ромбы. Диагонали нижнего основания равны 12 и 16, а верхнего — 8 и 6. Две боковые грани, проходящие через стороны тупых углов ромбов, перпендикулярны плоскости основания, а остальные две из них составляют с основанием угол 45° . Найдите объем пирамиды.
2. Расстояние между основаниями перпендикуляров, опущенных из вершины тупого угла ромба на его стороны, равно 20. Найдите объем тела, полученного от вращения ромба вокруг оси, проходящей через вершину острого угла, равного 60° , и перпендикулярной большей диагонали.

7.

1. Стороны основания правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны a и b ($a > b$). Через противоположные стороны верхнего и нижнего оснований проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?
2. Прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$), у которого катет $BC = a$ и $\angle A = 60^\circ$ вращается вокруг прямой, проходящей через вершину A и перпендикулярной биссектрисе угла A . Найдите объем тела вращения.

8.

1. Стороны оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды относятся как 1 : 2. Через центр нижнего основания и среднюю линию одной из боковых граней проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость разделила объем пирамиды?
2. В равнобедренном треугольнике угол при вершине равен 120° , а основание — a . Этот треугольник вращается вокруг оси, проходящей через точку пересечения высот треугольника и параллельной основанию этого треугольника. Найдите объем тела вращения.

§ 19. Объем шара и его частей. Площадь сферы

1.

1. Площадь поверхности полушара равна 48π . Найдите его объем.
2. В конус, осевое сечение которого правильный треугольник, вписан шар. Найдите отношение их объемов.

2.

1. Объем шара равен $\frac{32\pi}{3}$. Найдите площадь поверхности полушара.
2. Вокруг конуса, у которого осевым сечением служит правильный треугольник, описан шар. Найдите отношение их объемов.

3.

1. Шар, радиус которого равен 5, касается плоскости. Через точку касания проведена плоскость, пересекающая шар под углом $\arccos \frac{3}{5}$ к касательной плоскости. Найдите объем меньшей части шара, отсеченный этой плоскостью.
2. Образующая конуса равна 10, а площадь его боковой поверхности — 60π . Найдите объем вписанного в конус шара.

4.

1. Шаровой сегмент и конус вместе составляют шаровой сектор. Высота сегмента равна 1, а объем конуса — 12π . Найдите объем шарового сектора.
2. Объем конуса равен 128π , а его высота — 6. Найдите объем описанного около конуса шара.

5.

1. Найдите объем двояковыпуклого стекла, у которого радиусы поверхностей 13 и 20, а расстояние между центрами — 21.
2. Объем конуса в $2\frac{1}{4}$ раза больше объема вписанного в него шара. Найдите величину угла между образующей конуса и плоскостью основания.

6.

1. Найдите объем выпукло-вогнутой линзы, у которой радиусы поверхностей равны 25 и 29, а расстояние между центрами — 6.
2. Отношение объема конуса к объему вписанного в конус шара равно $8 : 3$. Найдите величину угла при вершине осевого сечения конуса.

7.

1. Основанием пирамиды служит правильный треугольник со стороной, равной 1. Основание K высоты пирамиды лежит на расстоянии $2 - \frac{\sqrt{3}}{3}$ от центра O этого треугольника, причем луч OK проходит через одну из его вершин. Найдите площадь поверхности вписанного в пирамиду шара, если высота пирамиды равна $\sqrt[4]{\frac{4}{3}}$.
2. Полый шар радиуса 9 см, толщина стенок которого 3 см, плавает в воде, причем из воды выступает его часть высотой 6 см. Найдите плотность материала, из которого изготовлен шар.

8.

1. Основанием пирамиды служит равносторонний треугольник со стороной $\frac{1}{2}$. Основание K высоты пирамиды лежит на расстоянии $\frac{2}{\sqrt{3}}$ от центра O этого треугольника, причем луч OK проходит через середину одной из его сторон. Найдите площадь поверхности шара, вписанного в пирамиду, если ее высота равна $\frac{2}{\sqrt{3}}$.
2. Полый металлический шар, внешний радиус которого R , плавает, будучи наполовину погруженным в воду. Плотность материала d . Найдите толщину стенок шара.

§ 20*. Уравнение плоскости

1.

1. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2; -1; 3)$ и параллельной плоскости $2x - 3y + z - 4 = 0$.
2. Найдите угол между плоскостями $2x + y - z + 1 = 0$ и $x - 2y + 3z - 2 = 0$.

2.

1. Даны точки $A(2; m; -1)$ и $B(1; 2; m)$ и плоскость $2x - 3y + z - 1 = 0$. При каком значении m эта плоскость параллельна прямой AB ?
2. Найдите угол между прямой AB и плоскостью $2x - 2y + z - 3 = 0$, если $A(-1; 2; 1)$ и $B(2; -1; -2)$.

3.

1. Дан шар, ограниченный сферой $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 + (z - 2)^2 = 1$ и плоскостью $2x - y + 2z - 1 = 0$. Пересекает ли эта плоскость шар? Если да, то найдите площадь сечения.
2. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1; 0; -2)$ и $B(0; 3; 1)$, которая параллельна оси OZ .

4.

1. Докажите, что плоскость $x - 2y + 2z - 9 = 0$ является касательной к сфере $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 + (z + 4)^2 = 36$.
2. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки $E(-1; 2; 0)$ и $F(1; 0; -2)$, и которая параллельна оси OX .

5.

1. Даны плоскость $x + y - z - 2 = 0$ и точка $A(1; 1; 1)$. Найдите координаты точки A_1 , которая симметрична данной точке A относительно указанной плоскости.
2. Плоскость α проходит через точку $M(1; 1; -2)$ и пересекает плоскость HOY по прямой $y - x = 1$. Напишите уравнение этой плоскости.

6.

1. Даны прямая EF , где $E(1; -2; 1)$ и $F(2; -1; 3)$ и плоскость $x - 2y + z - 3 = 0$. Найдите координаты точки P пересечения этой прямой с плоскостью.
2. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1; -1; 1)$ и $B(2; 1; -1)$, которая перпендикулярна плоскости $x - 2y + z - 1 = 0$.

7.

1. В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ сторона основания равна 2, а высота — 1. Используя метод координат, найдите угол между AM и плоскостью DMC .
2. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1; -1; 1)$ и $B(2; 0; -1)$, которая была бы параллельна направлению вектора $\vec{m} \{3; 1; -1\}$.

8.

1. Основанием пирамиды $MABCD$ служит прямоугольник $ABCD$, где $AB = 2$, $AD = 1$. Грань AMB — равнобедренный треугольник ($AM = BM$), плоскость которого перпендикулярна плоскости основания. Высота пирамиды $MO = 1$. Используя метод координат, найдите угол между гранями AMD и DMC .
2. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1; 1; 1)$ и перпендикулярную линии пересечения плоскостей $2x - y + z - 1 = 0$ и $x + y - 2z - 2 = 0$.

РАБОТЫ НА ПОВТОРЕНИЕ

№ 1. Взаимное положение прямых и плоскости. Перпендикулярность прямых и плоскости

1.

В основании пирамиды $DABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной, равной a . Две боковые грани ADB и CDB перпендикулярны к плоскости основания. Их общее ребро тоже равно a .

1. Каково взаимное положение прямых:

1) AB и CD ; 2) BD и AC ; 3) PQ и AC , где P и Q соответственно середины ребер AB и CD . Дайте обоснование.

2. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через центр основания параллельно ребрам AC и BD . Определите вид сечения и найдите его площадь.

3. Найдите угол между гранями: 1) ADB и CDB ; 2) DAC и ABC .

4. Чему равен угол между BD и гранью ADC ?

5. Найдите угол между AB и DC .

6. Чему равно расстояние между AB и DC ?

2.

Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$), $AC = CB = a$. Боковые ребра тоже равны a .

1. Каково взаимное положение прямых:

1) AA_1 и BC ; 2) A_1C_1 и BC ; 3) EF и AC , где $E \in AB_1$ ($AE : EB_1 = 1 : 2$) и $F \in CB_1$ ($CF : FB_1 = 2 : 1$). Дайте обоснование.

2. Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через AC и середину B_1C_1 . Определите вид сечения и найдите его площадь.

3. Найдите угол: 1) между плоскостью сечения и плоскостью основания; 2) между плоскостью сечения и плоскостью грани CC_1B_1B .

4. Чему равен угол между B_1C_1 и плоскостью грани AA_1B_1B ?

5. Найдите угол между AB и B_1C .

6. Чему равно расстояние между AB и B_1C ?

3.

Основанием пирамиды $MABCD$ служит квадрат $ABCD$ со стороной, равной a . Грань AMB является правильным треугольником и перпендикулярна плоскости основания.

1. Каково взаимное положение прямых: 1) MB и AD ; 2) AC и MD ; 3) EF и PT , где E, F, T и P соответственно середины ребер MA, MC, CD и AD . Дайте обоснование.
2. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середину AD параллельно грани AMB . Определите вид сечения и найдите его площадь.
3. Чему равен угол между плоскостями: 1) ABC и DMC ; 2) AMB и DMC ?
4. Чему равен угол между MD и плоскостью AMB ?
5. Чему равен угол между MD и AC ?
6. Найдите расстояние между BC и MD .

4.

В тетраэдре $DABC$ грани ABC и DBC — правильные треугольники со стороной, равной a . Плоскости этих граней перпендикулярны.

1. Каково взаимное положение прямых: 1) AC и DB ; 2) AD и BC ; 3) EF и BC , где E и F соответственно середины ребер AC и BD . Дайте обоснование.
2. Через вершину A и середину M ребра DC проведите плоскость параллельно BC . Определите вид сечения и найдите его площадь.
3. Найдите угол между плоскостями: 1) ADC и ABC ; 2) ADC и ADB .
4. Найдите угол между медианой грани ADC , проведенной из вершины A , и плоскостью ABC .
5. Найдите угол между: 1) AD и BC ; 2) AB и DC .
6. Найдите расстояние между AD и BC .

№ 2. Многогранники

1.

В прямом параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ основанием служит ромб, диагонали которого $AC = 8$ и $BD = 6$. Через диагональ BD и середину ребра CC_1 проведена плоскость, составляющая с плоскостью основания угол 45° .

- 1) На какие части эта плоскость делит объем параллелепипеда?
- 2) Найдите площадь поверхности призмы $AB_1 BDC_1 C$.
- 3) Чему равен угол между диагональю $A_1 C$ и плоскостью грани $DD_1 C_1 C$?

2.

Основанием пирамиды $DABC$ служит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC ($\angle ACB = 90^\circ$), $AC = CB = 4$. Боковые ребра наклонены к основанию под углом 60° .

- 1) На какие части делит объем пирамиды плоскость CEF , где F — середина BD , а точка E лежит на ребре AB , причем $AB : EB = 1 : 3$?
- 2) Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
- 3) Чему равен двугранный угол, образованный гранями ADC и BDC ?

3.

Основанием наклонной призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ служит правильный треугольник со стороной, равной $4\sqrt{3}$. Вершина A_1 проектируется на середину стороны BC , боковые ребра составляют с плоскостью основания угол 45° .

- 1) Найдите площадь боковой поверхности призмы.
- 2) Через сторону основания BC проведена плоскость, перпендикулярная грани $CC_1 B_1 B$. В каком отношении она делит объем призмы?
- 3) Найдите расстояние от вершины B до боковой грани $AA_1 C_1 C$.

4.

В основании пирамиды $MAVC$ лежит равнобедренный треугольник ABC . $AB = BC = 10$; $AC = 12$. Высота пирамиды равна 4. Боковые грани пирамиды равно наклонены к основанию.

- 1) Через точки A , O и E , где E — середина MB , а O — основание высоты пирамиды MO проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?
- 2) Найдите площадь поверхности пирамиды.
- 3) Чему равен угол между MB и плоскостью грани AMC ?

№ 3. Тела и вращения

1.

Наибольший угол между образующими конуса равен 120° . Площадь осевого сечения равна $16\sqrt{3}$.

- 1) Найдите площадь боковой поверхности конуса.
- 2) Найдите центральный угол в развертке боковой поверхности конуса.
- 3) В данный конус вписан другой конус, основание которого параллельно основанию данного конуса и делит его высоту в отношении $1 : 2$, считая от вершины. Вершина вписанного конуса совпадает с центром основания данного. Найдите отношение объемов этих конусов.
- 4) Найдите площадь поверхности описанного около данного конуса шара.

2.

В цилиндре, высота которого равна 8, через его образующую проведены две плоскости, угол между которыми 60° . Площади сечений равны $32\sqrt{3}$.

- 1) Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.
- 2) Найдите острый угол между диагоналями развертки боковой поверхности цилиндра.
- 3) Выясните, можно ли в данный цилиндр вписать шар, и если да, то найдите отношение их объемов.
- 4) Найдите площадь поверхности, описанного около этого цилиндра шара.

3.

В усеченный конус вписан шар, диаметр которого равен $5\sqrt{3}$. Образующие конуса составляют с плоскостью основания угол 60° .

- 1) Найдите площадь боковой поверхности конуса.
- 2) Найдите объем конуса.
- 3) Укажите размеры развертки боковой поверхности конуса (центральный угол развертки, радиусы концентрических окружностей).
- 4) Какова площадь поверхности описанного около конуса шара?

4.

Цилиндр, осевое сечение которого квадрат, вписан в конус так, что окружность верхнего основания цилиндра касается боковой поверхности конуса, а нижнее основание лежит на основании конуса. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 16π , а образующая конуса составляет с плоскостью основания угол 45° .

- 1) Найдите площадь боковой поверхности конуса.
- 2) Какова наибольшая возможная площадь сечения, проведенного через вершину конуса?
- 3) Найдите отношение объемов конуса, отсеченного от данного конуса верхним основанием цилиндра, к объему цилиндра.
- 4) Найдите объем вписанного в конус шара.

№ 4. Координаты и векторы

1.

1. 1) В наклонной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра равны a . $\angle A_1AC = \angle A_1AB = 60^\circ$. Используя векторы, найдите угол между A_1C и медианой AK основания.
2) Используя векторы, докажите, что грань CC_1B_1B — прямоугольник.
2. Призма $ABCA_1B_1C_1$ задана координатами своих вершин: $A(1; 2; 2)$; $B(-1; -1; 2)$; $C(3; -2; 2)$; $A_1(1; 2; 5)$. Найдите угол между прямой AE , где E — середина A_1C_1 и плоскостью, которая перпендикулярна диагонали грани B_1C .

2.

1. В тетраэдре $MABC$ основанием служит правильный треугольник ABC со стороной a , $AM = 2a$; $\angle MAC = \angle MAB = 45^\circ$. Используя векторы:
1) докажите, что $AM \perp CB$;
2) найдите расстояние между серединами ребер AE и BM .
2. Пирамида $MABCD$ задана координатами своих вершин $M(-1; 2; 5)$; $A(1; -1; 2)$; $B(-2; 1; 2)$; $C(-1; 3; 2)$; $D(3; 1; 2)$. Найдите объем пирамиды.

3.

1. В прямом параллелепипеде $ABCA_1B_1C_1D_1$ основанием служит ромб $ABCD$ со стороной a и углом A , равным 60° . Боковые ребра тоже равны a . Используя векторы:
1) найдите угол между AE и BD , где F — центр симметрии грани DD_1C_1C ;
2) докажите, что $A_1C \perp BD$.
2. В кубе $ABCA_1B_1C_1D_1$, используя метод координат, найдите угол между FE , где F — середина DC , а E — середина B_1C_1 , и плоскостью A_1BD .

4.

1. В правильном тетраэдре $DABC$ ребра равны a . M — точка пересечения медиан грани BDC , а E — середина ребра AD . Используя векторы:
 - 1) найдите расстояние EM ;
 - 2) докажите, что $PK \perp AD$, где P и K — соответственно середины ребер DC и DB .
2. Основанием пирамиды $MABCD$ служит прямоугольник $ABCD$, где $AB = 2$ и $AD = 1$. Грань AMB — равнобедренный треугольник, плоскость которого перпендикулярна основанию пирамиды. Высота пирамиды равна 1. Используя метод координат, найдите угол между AF и DE , где F — середина MD , а E — середина MC .

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

№ 1. Координаты и векторы

Вариант 1

1. Какой угол образуют единичные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если известно, что векторы $\vec{a} + 2\vec{b}$ и $5\vec{a} - 4\vec{b}$ взаимно перпендикулярны?
2. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ длина ребра равна 1. M — центр грани $DD_1 C_1 C$. Используя метод координат, найдите:
 - 1) угол между прямыми AM и $B_1 D_1$;
 - 2) расстояние между серединами отрезков AM и $B_1 D_1$.
3. Даны две точки: A , лежащая на оси ординат, и $B(1; 0; 1)$. Прямая AB составляет с плоскостью OXZ угол 30° . Найдите координаты точки A .
- 4*. Найдите координаты вектора $\vec{a}$, коллинеарного вектору $\vec{b}\{6; 8; -7,5\}$ и образующего тупой угол с координатным вектором $\vec{j}$, если $|\vec{a}| = 50$.

Вариант 2

1. Даны точки $A(-1; 2; 1)$; $B(3; 0; 1)$; $C(2; -1; 0)$ и $D(2; 1; 2)$. Найдите:
 - 1) угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$;
 - 2) расстояние между серединами отрезков AB и CD .
2. Основанием прямой призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ служит равнобедренный треугольник ABC . $\angle ACB = 120^\circ$. $AC = CB = BB_1$. Используя векторы, найдите угол между прямыми AB и CB_1 .
3. Даны две точки: A_1 , лежащая в плоскости OXY , и $B(1; 1; 1)$, причем абсцисса точки A равна ее ординате. Прямая AB составляет с плоскостью OZY угол 30° . Найдите координаты точки A .
- 4*. Даны векторы $\vec{a}\{7; 0; 0\}$ и $\vec{b}\{0; 0; 3\}$. Найдите множество точек M , для каждой из которых выполняются условия $\overrightarrow{OM} \cdot \vec{a} = 0$ и $\overrightarrow{OM} \cdot \vec{b} = 0$, где O — начало координат.

Вариант 3

1. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$; $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$. $\vec{a} \wedge \vec{b} = 135^\circ$. Найдите $|\vec{a} - 2\vec{b}|$.
2. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ длина ребра равна 1. M — середина ребра $A_1 D_1$. Используя метод координат, найдите:
 - 1) угол между прямыми $A_1 C_1$ и $C_1 M$;
 - 2) расстояние между серединами отрезков $A_1 C$ и $C_1 M$.
3. Даны две точки: A , лежащая на оси аппликат, и $B(2; 2; 0)$. Прямая AB составляет с плоскостью OXY угол 60° . Найдите координаты точки A .
- 4*. Вектор $\vec{b}$, коллинеарный вектору $\vec{a} \{8; -10; 13\}$ составляет с положительным направлением оси OZ острый угол. $|\vec{b}| = \sqrt{37}$. Найдите координаты вектора $\vec{b}$.

Вариант 4

1. Даны точки $E(1; -2; 2)$; $F(3; 0; 2)$; $K(0; -2; 3)$; $T(2; 4; 1)$. Найдите:
 - 1) угол между векторами $\vec{EF}$ и $\vec{KT}$;
 - 2) расстояние между серединами отрезков EF и KT .
2. В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ все ребра равны между собой. Используя векторы, найдите угол между прямыми $A_1 C$ и AB .
3. Даны две точки: M , лежащая в плоскости OXZ , и $P(1; 2; 1)$, причем абсцисса точки M равна ее аппликату. Прямая PM составляет с плоскостью XOY угол 30° . Найдите координаты точки M .
- 4*. Даны векторы $\vec{c} \{0; -2; 0\}$ и $\vec{b} \{0; 0; 5\}$. Найдите множество точек E , для каждой из которых выполнимо условие $\vec{OE} \cdot \vec{b} = 0$ и $\vec{OE} \cdot \vec{c} = 0$, где O — начало координат.

№ 2. Цилиндр, конус, шар

Вариант 1

1. Прямоугольная трапеция с углом 45° вращается вокруг прямой, содержащей большее основание. Найдите площадь поверхности тела вращения, если основания трапеции равны 3 и 5.
2. В шар радиуса R вписан конус, у которого образующая составляет с плоскостью основания угол φ .
 - 1) Найдите площадь боковой поверхности конуса.
 - 2) Если $\varphi = 30^\circ$, то найдите наибольшую возможную площадь сечения, проходящего через вершину конуса.
- 3*. Сфера $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 4$ пересекает оси координат в точках A , B и C . A — точка пересечения с осью OX , B — с осью OY , а C — с осью OZ (координаты этих точек положительны). Найдите угол между плоскостью ABC и плоскостью $z = 0$.

Вариант 2

1. В цилиндре проведена плоскость, параллельная оси и отсекающая от окружности основания дугу 90° . Диагональ сечения равна 10 и удалена от оси на расстояние, равное 4. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.
2. В правильной треугольной пирамиде боковые грани наклонены к основанию под углом 60° . В эту пирамиду вписан шар радиуса R .
 - 1) Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
 - 2) Найдите длину окружности, по которой поверхность шара касается боковых граней пирамиды.
- 3*. Из точки $M(-7; 3; -4)$ проведена касательная к сфере $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 27 = 0$. Найдите длину касательной от точки M до точки касания.

Вариант 3

1. Ромб $ABCD$ со стороной a и углом A , равным 60° , вращается вокруг прямой, проходящей через вершину C и перпендикулярной диагонали AC . Найдите площадь поверхности тела вращения.
2. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a , а боковые ребра наклонены к основанию под углом α .
 - 1) Найдите площадь описанной около пирамиды сферы.
 - 2) Если $\alpha = 30^\circ$, то найдите угол между радиусом сферы, проведенным в одну из вершин основания, и плоскостью основания.
- 3*. Сфера $(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 5$ пересекает ось ординат в точке A ($y < 0$). Через точку $M(1; 1; 0)$ проведена прямая, параллельная оси OZ и пересекающая сферу в точке B ($z > 0$). Найдите угол между прямой AB и плоскостью XOY .

Вариант 4

1. Через вершину конуса проведена плоскость, пересекающая основание по хорде, длина которой равна 3, стягивающей дугу 120° . Плоскость сечения составляет с плоскостью основания угол 45° . Найдите площадь боковой поверхности конуса.
2. В правильную четырехугольную пирамиду вписан шар. Расстояние от центра шара до вершины пирамиды равно a . Боковые грани наклонены к основанию под углом 60° .
 - 1) Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
 - 2) Найдите площадь круга, ограниченного окружностью, по которой сфера касается боковой поверхности пирамиды.
- 3*. Через точку $M(4; 2; 8)$ проведена плоскость, которая параллельна оси OZ и составляет с плоскостями OXZ и OXY угол 45° . Найдите длину окружности, по которой сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ пересекает эту плоскость.

№ 3. Объем тел

Вариант 1

1. В правильной треугольной пирамиде боковые грани наклонены к основанию под углом 60° . Расстояние от центра основания до боковой грани равно $2\sqrt{3}$. Найдите объем пирамиды.
2. В цилиндре проведена плоскость, параллельная его оси, которая отсекает от окружности основания дугу 2α . Диагональ полученного сечения составляет с осью цилиндра угол φ и удалена от нее на расстояние, равное d . Найдите объем цилиндра.
- 3*. В пирамиду, данную в задаче 1, вписан шар, касающийся боковой поверхности пирамиды по некоторой окружности. Плоскость, которой принадлежит эта окружность, делит шар на две части. Найдите объем меньшей из этих частей.

Вариант 2

1. В правильной четырехугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ через концы трех ребер, исходящих из вершины C , проведена плоскость на расстоянии $4\sqrt{2}$ от этой вершины и составляющая с плоскостью основания угол 45° . Найдите объем призмы.
2. В конусе через его вершину под углом φ к плоскости основания проведена плоскость, отсекающая от окружности основания дугу 2α . Радиус основания конуса равен R . Найдите объем конуса.
- 3*. В призме, данной в задаче 1, проведена плоскость, перпендикулярная диагонали призмы и делящая ее в отношении $1:3$. Указанная плоскость делит описанный около призмы шар на две части. Найдите объем меньшей из этих частей.

Вариант 3

1. В правильной четырехугольной пирамиде боковые грани наклонены к основанию под углом 60° . Расстояние от середины высоты пирамиды до боковой грани равно 2. Найдите объем пирамиды.
2. В цилиндре проведена плоскость, параллельная его оси, которая отсекает от окружности основания дугу φ . Диагональ полученного сечения равна $2t$ и удалена от оси цилиндра на расстояние, равное t . Найдите объем цилиндра.
- 3*. В пирамиду, данную в задаче 1, вписан шар, касающийся боковой поверхности пирамиды по некоторой окружности. Плоскость, которой принадлежит эта окружность, делит шар на две части. Найдите объем меньшей из этих частей.

Вариант 4

1. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ через сторону нижнего основания BC и противоположащую вершину A_1 проведена плоскость под углом 45° к плоскости основания. Расстояние от этой плоскости до вершины A равно 2. Найдите объем призмы.
2. В конусе через его вершину под углом φ к плоскости основания проведена плоскость, отсекающая от окружности основания дугу α . Высота конуса равна h . Найдите объем конуса.
- 3*. Вокруг призмы, данной в задаче 1, описан шар. Найдите объем меньшей части шара, которая отсекается от него плоскостью боковой грани.

№ 4. Итоговое повторение

Вариант 1

1. В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ сторона основания равна 6, а боковое ребро — 5. Найдите:
- 1) площадь боковой поверхности пирамиды;
 - 2) объем пирамиды;
 - 3) угол наклона боковой грани к плоскости основания;
 - 4) скалярное произведение векторов $(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{AM}$;
 - 5) площадь описанной около пирамиды сферы;
 - 6)* угол между BD и плоскостью DMC .

Вариант 2

1. В правильной треугольной пирамиде $MABC$ сторона основания равна $4\sqrt{3}$, а боковое ребро — 5. Найдите:
- 1) площадь боковой поверхности пирамиды;
 - 2) объем пирамиды;
 - 3) угол между боковым ребром и плоскостью основания;
 - 4) скалярное произведение векторов $\frac{1}{2}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) \cdot \overrightarrow{EA}$, где E — середина BC ;
 - 5) объем вписанного в пирамиду шара;
 - 6)* угол между стороной основания и плоскостью боковой грани.

Вариант 3

1. В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ боковое ребро равно 8 и наклонено к плоскости основания под углом 60° . Найдите:
- 1) площадь боковой поверхности пирамиды;
 - 2) объем пирамиды;
 - 3) угол между противоположными боковыми гранями;
 - 4) скалярное произведение векторов $\frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}) \cdot \overrightarrow{ME}$, где E — середина DC ;
 - 5) объем описанного около пирамиды шара;
 - 6)* угол между боковым ребром AM и плоскостью DMC .

Вариант 4

В правильной треугольной пирамиде $MAVC$ сторона основания равна $2\sqrt{3}$, а боковые грани наклонены к основанию под углом 60° . Найдите:

- 1) площадь боковой поверхности пирамиды;
- 2) объем пирамиды;
- 3) угол между боковым ребром и плоскостью основания;
- 4) скалярное произведение векторов $\frac{1}{2}(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB}) \cdot \overrightarrow{OM}$, где O — основание высоты пирамиды;
- 5) площадь вписанной в пирамиду сферы;
- 6)* угол между ME , где E — середина VC , и плоскостью AMC .

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ДИКТАНТЫ

№ 1. Координаты и векторы

Вариант 1

1. Дана точка $M(1; 3; 2)$. Найдите координаты точки M_1 — проекции точки M на плоскость OXZ и координаты точки M_2 — проекции точки M на ось OZ .
2. Даны точки $E(-1; 2; 3)$ и $F(1; -1; 4)$. Разложите вектор $\overrightarrow{EF}$ по векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$.
3. Найдите угол между векторами $\vec{j}$ и $\vec{m} = 2\vec{i} - 3\vec{k}$.
4. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $A_1(1; 2; -4)$ и $C_1(3; 0; 2)$. Найдите координаты точки пересечения его диагоналей.
5. Даны точки A, B и C , причем $\overrightarrow{AB} \{-2; 4; 3\}$ и $\overrightarrow{AC} \{4; -8; -6\}$. Лежат ли эти точки на одной прямой?
6. Дан вектор $\vec{m} \{1; 2; 2\}$. Найдите координаты единичного вектора $\vec{e}$, сонаправленного с вектором $\vec{m}$.
7. Вектор $\vec{a}$ составляет с положительным направлением оси OX угол 135° . Найдите абсциссу вектора $\vec{a}$, если $|\vec{a}| = 2$.
8. $DABC$ — правильный тетраэдр. Упростите выражение $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$.
9. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$; $|\vec{a}| = 1$; $|\vec{b}| = 2$; $\vec{a} \wedge \vec{b} = 120^\circ$. Найдите $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a}$.
10. В треугольнике ABC $A(0; 0; 0)$; $B(1; 2; 1)$; $C(1; -1; 1)$. Найдите координаты центра описанной около треугольника окружности.

Вариант 2

1. Дана точка $E(2; -1; 3)$. Найдите координаты точки E_1 — проекции точки E на плоскости OYZ и координаты точки E_2 — проекции точки E на ось OY .
2. Даны точки $K(2; -1; 3)$ и $M(1; -2; 1)$. Разложите вектор $\overrightarrow{KM}$ по векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$.
3. Найдите угол между векторами $\vec{i}$ и $\vec{n} = -2\vec{j} + \vec{k}$.
4. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $B_1(-1; 3; 2)$, а точка пересечения диагоналей параллелепипеда $M(2; -1; 1)$. Найдите координаты вершины D .

5. Даны точки E, F и K , причем $\overrightarrow{EF} \{1; -2; 3\}$ и $\overrightarrow{EK} \{-2; 4; 6\}$. Лежат ли эти точки на одной прямой?
6. Дан вектор $\vec{p} \{-2; -2; 1\}$. Найдите координаты единичного вектора $\vec{e}$, противоположно направленного вектору $\vec{p}$.
7. Вектор $\vec{a}$ составляет с положительным направлением оси OY угол 135° . Найдите ординату вектора $\vec{a}$, если $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}$.
8. В пирамиде $HPMKE$ все ребра равны. Упростите выражение $(\overrightarrow{PH} - \overrightarrow{MK}) \cdot (\overrightarrow{PH} + \overrightarrow{MK}) + \overrightarrow{HK}(\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KE})$.
9. Даны векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$. $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = \sqrt{2}$. $\vec{m} \wedge \vec{n} = 135^\circ$. Найдите $(\vec{m} - \vec{n}) \cdot \vec{n}$.
10. В треугольнике MFP $M(0; 0; 0)$; $F(2; -1; 3)$; $P(-1; 1; 1)$. Найдите диаметр окружности, описанной около этого треугольника.

№ 2. Цилиндр, конус, шар

Вариант 1

1. Сечение, параллельное оси цилиндра, отстоит от его оси на расстоянии, равное 3. Найдите площадь сечения, если радиус основания цилиндра равен 5, а его высота — 10.
2. Основанием прямой призмы служит треугольник со сторонами 6, 8 и 10. Высота призмы равна 4. Площадь боковой поверхности описанного около призмы цилиндра равна...
3. Через вершину конуса проведена плоскость, пересекающая основание по хорде, длина которой равна a . Эта хорда стягивает дугу 90° . Угол между образующими в сечении равен 60° . Площадь боковой поверхности конуса равна...
4. Основанием пирамиды служит треугольник со стороной, равной 10 и противолежащим ей углом 30° . Боковые ребра пирамиды наклонены к основанию под углом 60° . Площадь боковой поверхности описанного около пирамиды конуса равна...
5. Найдите множество точек, удаленных на a от точки M и на b от точки P .
6. Укажите множество центров всех сфер, которые касаются плоскости в заданной точке.
7. Через точку $A(3; 4; 12)$, принадлежащую сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 169$, проведена плоскость, перпендикулярная оси OZ . Найдите радиус сечения.

8. Радиусы оснований усеченного конуса равны 2 и 4. В этот конус вписан шар. Площадь боковой поверхности конуса равна...
9. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 3. Боковые ребра наклонены к основанию под углом 45° . Площадь описанной около пирамиды сферы равна...
10. В пирамиду с равно наклоненными к основанию гранями вписан шар. Центр шара делит высоту в отношении $2 : 1$, считая от вершины. Угол наклона боковых граней к основанию равен...

Вариант 2

1. В цилиндре проведено сечение, параллельное его оси. Диагональ сечения равна 16 и составляет угол 60° с плоскостью основания. Радиус основания цилиндра равен 5. Найдите расстояние от оси цилиндра до плоскости сечения.
2. Основанием прямого параллелепипеда служит ромб со стороной, равной 4, и углом в 60° . Высота параллелепипеда равна 5. Площадь боковой поверхности вписанного в параллелепипед цилиндра равна...
3. Через вершину конуса проведена плоскость, пересекающая основание по хорде, длина которой равна m . Эта хорда стягивает дугу 60° . Угол между образующими в сечении прямой. Площадь боковой поверхности конуса равна...
4. В правильную треугольную пирамиду вписан конус. Сторона основания пирамиды равна 6, а ее высота — 1. Площадь боковой поверхности конуса равна...
5. Найдите множество точек, из которых данный отрезок виден под прямым углом.
6. Укажите множество центров всех шаров данного радиуса, которые касаются данной плоскости.
7. Через точку $B(3; 4; 12)$ принадлежащей сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 169$ проведена плоскость, перпендикулярная оси OX . Найдите радиус сечения.
8. Образующая усеченного конуса равна 6. В этот конус вписан шар. Площадь боковой поверхности конуса равна...
9. В правильной четырехугольной пирамиде боковые ребра наклонены к основанию под углом 45° . Площадь описанной около пирамиды сферы равна 64π . Сторона основания пирамиды равна...
10. Боковые грани пирамиды наклонены к основанию под углом 45° . В эту пирамиду вписан шар. В каком отношении, считая от вершины, центр этого шара делит высоту пирамиды?

№ 3. Объем тел

Вариант 1

1. Основанием правильной четырехугольной призмы служит квадрат, диагональ которого равна d . Через диагональ основания и противоположащую вершину верхнего основания проведена плоскость под углом 45° к нему. Объем призмы равен...
2. В наклонной треугольной призме площади двух граней равны 30 и 40. Угол между ними прямой. Боковое ребро равно 10. Найдите объем призмы.
3. Объем наклонной треугольной призмы равен V . Через среднюю линию основания и середину бокового ребра, проходящего через вершину основания, противоположащую средней линии, проведена плоскость. Найдите объем отсеченной треугольной пирамиды.
4. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник, катеты которого равны 3 и 4. Боковые грани наклонены к основанию под углом 45° . Объем пирамиды равен...
5. Площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды равна S , а расстояние от центра основания до боковых граней — d . Найдите объем пирамиды.
6. Объем пирамиды равен V . Боковое ребро пирамиды разделено на три равные части и через точки деления проведены плоскости, параллельные основанию. Объем усеченной пирамиды, заключенной между параллельными плоскостями, равен...
7. Через середину образующей конуса проведена плоскость параллельно плоскости основания. Полученное сечение служит верхним основанием цилиндра, нижнее основание которого лежит на основании конуса. Объем конуса равен 40. Чему равен объем цилиндра?
8. Боковые ребра пирамиды наклонены к основанию под углом 45° . Основанием пирамиды служит треугольник со стороной, равной 10 и противоположащим углом 30° . Чему равен объем описанного около пирамиды конуса?
9. В правильную треугольную призму, сторона основания которой равна $2\sqrt{3}$, вписан шар. Найдите объем этого шара.
10. Плоскость, перпендикулярная диаметру шара, делит этот диаметр на две части, равные 3 и 9. Найдите объем меньшей из этих частей.

Вариант 2

1. В правильной треугольной призме сторона основания равна a . Через сторону основания и противоположащую вершину верхнего основания проведена плоскость под углом 45° к основанию. Чему равен объем призмы?
2. В наклонной треугольной призме две боковые грани взаимно перпендикулярны, их площади равны 20 и 30. Боковые ребра равны 5. Найдите объем призмы.
3. В наклонном параллелепипеде через диагональ основания и середину противоположащего бокового ребра проведена плоскость. Объем параллелепипеда равен V . Чему равен объем отсеченной треугольной пирамиды?
4. Основанием пирамиды служит ромб с углом 30° и стороной, равной a . Боковые грани пирамиды наклонены к основанию под углом 60° . Найдите объем пирамиды.
5. Объем правильной треугольной пирамиды равен V , а площадь ее боковой поверхности — S . Найдите расстояние от центра основания до боковых граней.
6. Боковые ребра пирамиды разделены на три части в отношении $1 : 2 : 1$. Через точки деления проведены плоскости, параллельные основанию. Найдите отношение объема усеченной пирамиды, заключенной между параллельными плоскостями, к объему отсеченной пирамиды.
7. Через середину образующей конуса проведена плоскость параллельно плоскости основания. Полученное сечение служит верхним основанием цилиндра, нижнее основание которого лежит на основании конуса. Объем цилиндра равен 9. Найдите объем конуса.
8. Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами 6, 8 и 10. Боковые ребра пирамиды наклонены к основанию под углом 60° . Объем описанного около пирамиды конуса равен...
9. Основанием прямого параллелепипеда служит ромб со стороной, равной $4\sqrt{3}$, и углом в 60° . В этот параллелепипед вписан шар. Чему равен его объем?
10. В круговом секторе радиус равен 6, а угол — 60° . Этот сектор вращается вокруг прямой, содержащей один из ограничивающих его радиусов. Найдите объем тела вращения.

ОТВЕТЫ

7-й КЛАСС. ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ ДЛЯ УРОКА

§ 1

1. 4. Точка пересечения прямых.
2. 4. Нет.
3. 3. Точка D .
4. 3. Точка N .
5. 3. Пересекаются или не имеют общих точек. 4. Можно.
6. 3. Может. 4. Может.
7. 1. Шесть, четыре или одну (рис. 1). 2. 15.
8. 1. Шесть, четыре или одну (рис. 2). 2. 15.

§ 2

1. 1. 1) Три; 2) три.
2. 1. 1) Три; 2) три.
3. 1. 1) 12 неразвернутых углов и 6 развернутых углов.
4. 1. 1) 16 неразвернутых углов и 8 развернутых углов.
5. 1. 12 неразвернутых углов и 3 развернутых угла.
6. 1. 8 неразвернутых углов и 2 развернутых угла.

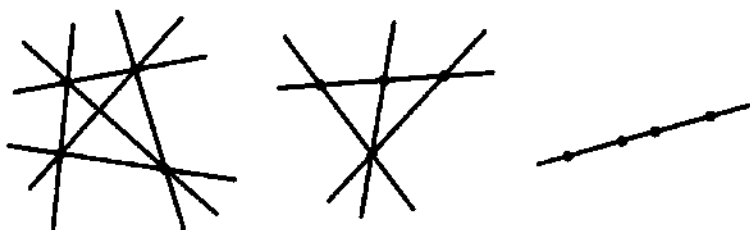


Рис. 1



Рис. 2

§ 3

1. 1. $AB < DB$. 2. $\angle AOC = \angle DOB$.
2. 1. $EK > NL$. 2. $\angle MOK = \angle NOL$.
3. 1. $CE = AB$.
4. 1. $MC = AB$. 2. Да, является.
5. 1. Да.
7. 1. $BC < AB$ или $BC > AB$. 2. $\angle MON = \angle AOC$.
8. 1. $BC > AC$ или $BC < AC$. 2. $\angle AOC = \angle BOD$.

§ 4

1. 1. 20 см или 3 см. 2. 1) 45° или 135° ; 2) острым или тупым; 3) да, если луч OC проведен во внутренней области угла AOB .
2. 1. 130 дм или 16 дм. 2. 1) 60° или 180° ; 2) острым или развернутым; 3) да, если луч OC проведен во внутренней области угла AOB .
3. 1. 4,7 дм и 1,6 дм, или 3,3 дм и 6,4 дм. 2. 1) 16° , 64° ; 2) 160° , тупым.
4. 1. 44 см и 20 см или 76 см и 100 см. 2. 1) 25° и 75° ; 2) 50° , острым.
5. 1. 102 см.
6. 1. 33 м. 2. 120° .
7. 1. Точка D лежит между точками A и B , $DB = 3,5$ см или точка B лежит между точками A и D , $DB = 7$ см. 2. 36° и 54° .
8. 1. Точка M лежит между точками A и B , $MB = 4$ см или точка B лежит между точками A и M , $MB = 12$ см. 2. 45° .

§ 5

1. 1. 36° и 144° . 2. 50° , 40° , 130° .
2. 1. 70° и 110° . 2. 50° , 50° , 40° .
3. 1. 90° , 60° , 150° . 2. 80° , 100° , 80° , 100° .
4. 1. 90° , 50° , 40° . 2. 80° , 100° , 80° , 100° .
5. 1. 45° , 135° . 2. Да.
6. 1. 135° .

§ 6

1. 1. 45° . 2. $P_{ABC} > P_{ABD}$.
2. 1. 17 см. 2. $P_{DFK} < P_{EFK}$.
3. 1. 110° . 2. 12 см, 12 см, 12 см; 12 см, 14 см, 14 см.
4. 1. 20° . 2. 45 см.
5. 1. 55° . 2. 10 см или 6 см.
6. 1. 14 см; 90° . 2. 9 мм или 15 мм.
7. 1. 120° . 2. 35 см.
8. 1. 110° . 2. 60 см.

§ 7

3. 1. 40° . 2. Да; да.
4. 1. 110° . 2. $P_{ABD} = P_{EBD}$.

§ 8

1. 1. Для $\triangle ADC$. 2. $\angle ABC = 81^\circ$, $\angle FEC = 90^\circ$.
2. 1. Для $\triangle EFK$ и $\triangle LFK$. 2. 20 дм; $65^\circ 15'$.
3. 2. 135° .

§ 9

5. 1. 10 см. 2. 70° , 70° .
6. 1. 15 дм. 2. $m = 1$.

§ 10

1. $BD = B_1D_1$.
2. $\angle BDC = \angle B_1D_1C_1$.

7. На прямых AC и A_1C_1 за точки A и A_1 отложены отрезки AE и A_1E_1 , соответственно равные AB и A_1B_1 (рис. 3). Точки E и B , E_1 и B_1 соединим отрезками, $\triangle EBC = \triangle E_1B_1C_1$, так как $BC = B_1C_1$, $\angle C = \angle C_1$ и $CE = C_1E_1$ ($CE = AC + AB$ и $C_1E_1 = A_1C_1 + A_1B_1$). Из равенства этих треугольников следует, что $EB = E_1B_1$ и $\angle BEC = \angle B_1E_1C_1$. Тогда $\triangle EAB = \triangle E_1A_1B_1$ и $AE = A_1E_1$. В таком случае $AC = A_1C_1$ и дальнейшее доказательство очевидно.

8. Пусть BM и B_1M_1 — медианы треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, причем $BM = B_1M_1$. Кроме того, $\angle ABM = \angle A_1B_1M_1$ и $\angle MBC = \angle M_1B_1C_1$ (рис. 4). Продолжим BM и B_1M_1 , как указано на рисунке, так, что $MD = MB$ и $M_1D_1 = M_1B_1$, $\triangle BMC = \triangle DMA$ и $\triangle B_1M_1C_1 = \triangle D_1M_1A_1$. Отсюда следует, что $\angle BDA = \angle MBC$ и $\angle B_1D_1A_1 = \angle M_1B_1C_1$. Так как $BD = B_1D_1$, $\angle ABM = \angle A_1B_1M_1$ и $\angle BDA = \angle B_1D_1A_1$, то $\triangle ABD = \triangle A_1B_1D_1$. Отсюда $AB = A_1B_1$. Аналогично можно доказать, что $BC = B_1C_1$. В таком случае $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ по двум сторонам и углу между ними.

§ 11

7. Точки A , E , K и F лежат на окружности с центром в точке B (рис. 5).
8. Точки A , E , C , и O лежат на окружности с центром в точке K .

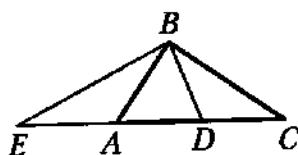


Рис. 3

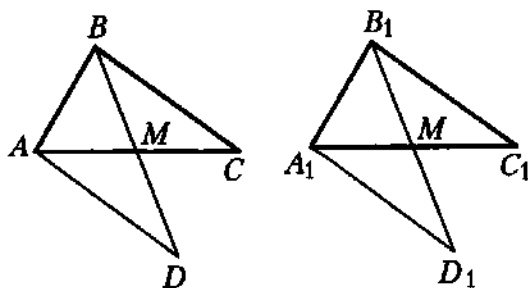


Рис. 4

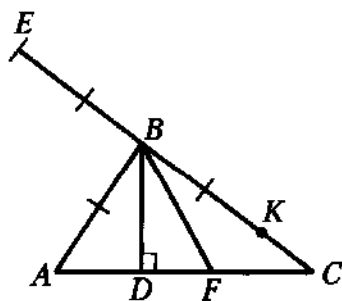


Рис. 5

§ 12

7. 2. Необходимо учесть, что $54^\circ : 3 = 18^\circ$ и $54^\circ \cdot 3 = 162^\circ$. Тогда, учитывая, что $162^\circ = 180^\circ - 18^\circ$, легко построить угол в 18° и разделить данный угол в 54° на три равные части.

8. 1. Точка M является точкой пересечения окружности с центром в точке A и радиусом, равным PQ , с биссектрисой угла EOF . Таких точек может быть две, одна или ни одной. 2. Необходимо учесть, что $35^\circ : 7 = 5^\circ$ и $35^\circ \cdot 5 = 175^\circ$. Тогда, учитывая, что $175^\circ = 180^\circ - 5^\circ$, легко построить угол в 5° и разделить данный угол в 35° на семь равных частей.

§ 13

1. 1. 1) Да; 2) да; 3) да; 4) да.

2. 1. 1) Да; 2) да; 3) да; 4) да.

7. Соединим точки A и D , $\triangle AED = \triangle AFD$ по трем сторонам. Отсюда $\angle EAD = \angle DAF$. Так как треугольник AMD равнобедренный, то $\angle EAD = \angle MDA$. В таком случае $\angle MDA = \angle DAF$, тогда $MD \parallel AC$.

8. $\triangle ADB = \triangle CEB$ по двум сторонам и углу между ними. Тогда $AB = BC$, и отсюда $\angle BAC = \angle BCA$. По условию $\angle BAC = \angle MAC$. Поэтому $\angle MAC = \angle BCA$ и $AM \parallel BC$.

§ 14.

1. 1. Да. 2. Да.

2. 1. Да. 2. Да.

3. 1. Да, да.

4. 1. Да, да.

7. 1. Соединим точки A и C , B и D , C и E , $\triangle ABC = \triangle BCD = \triangle CDE$ по двум сторонам и углу между ними. Из равенства треугольников вытекает, что $\angle DBC = \angle ACB$ и $\angle BDC = \angle DCE$. Тогда $CA \parallel BD$ и $CE \parallel BD$. Но через точку C можно провести только одну прямую, параллельную BD . Поэтому точки A , C и E лежат на одной прямой.

8. 1. Задача решается аналогично задаче 7 (1).

§ 15

1. 1. 45° и 135° . 2. 45° .

2. 1. 58° и 122° . 2. 50° .

3. 1. 20° .

4. 1. 140° .

5. 1. $\triangle DBC$ равнобедренный, а потому $\angle BDC = \angle BCD$. Т. к. $BE \parallel DC$, то $\angle ABE = \angle BDC$ и $\angle EBC = \angle BCD$. Из этого следует, что $\angle ABE = \angle EBC$, BE — биссектриса равнобедренного треугольника ABC и потому $BE \perp AC$. А так как $DC \parallel BE$, то $DC \perp AC$.

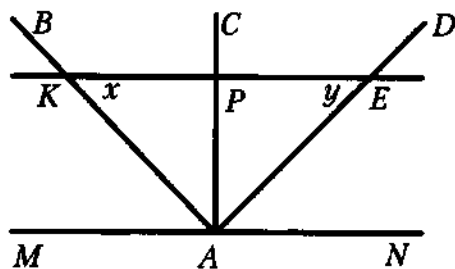


Рис. 6

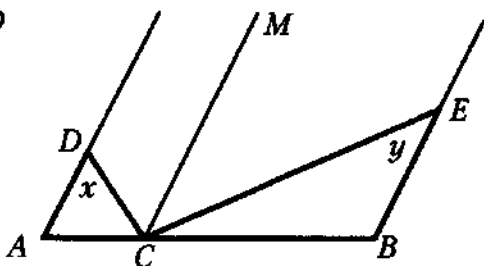


Рис. 7

6. 1. Так как $DE \parallel AC$, то $\angle DEA = \angle EAC$, а так как треугольник AOE равнобедренный, то $\angle DEA = \angle DAE$. Тогда имеем, что $\angle DAE = \angle EAC$ и AC — биссектриса равнобедренного треугольника BAC , а потому $AE \perp BC$.

7. Пусть $\angle PKA = x$ и $\angle PEA = y$ (рис. 6). Так как $KP = PA$ и $PE = PA$, то $\angle KAP = x$ и $\angle PAE = y$. По условию $KE \parallel MN$, а потому $\angle KAM = x$ и $\angle EAN = y$. Так как $\angle MAN$ — развернутый угол, то $2x + 2y = 180^\circ$. Отсюда $x + y = 90^\circ$, т. е. $\angle KAE = 90^\circ$ и $AB \perp AD$.

8. Через точку C проведем луч CM , параллельный AD и BE (рис. 7). Пусть $\angle ADC = x$ и $\angle CEB = y$. Так как треугольники ADC и CBE равнобедренные, то $\angle ACD = x$ и $\angle BCE = y$. По построению CM параллельна AD и BE , а потому $\angle DCM = x$ и $\angle ECM = y$. $\angle ACB$ развернутый, а потому $2x + 2y = 180^\circ$ и $x + y = 90^\circ$, т. е. $\angle DCE = 90^\circ$ и $DC \perp CE$.

§ 16

1. 1. 50° , 130° , 50° . 2. Нет.

2. 1. 120° , 120° , 120° . 2. Нет.

3. 1. Нет.

4. 1. Нет.

5. 1. 50° . Указание. Через точку E провести луч EM параллельно лучу CD .

6. 1. 70° .

7. Продолжим отрезок BD за точку D и отложим отрезок DE , равный BD . Точки A и E соединим отрезком; $\triangle BDC = \triangle ADE$ по двум сторонам и углу между ними. Отсюда следует, что $\angle CBE = \angle BEA$, а потому $BC \parallel AE$. Так как $AB = 2BD$, то $AB = BE$ и $\triangle ABE$ равнобедренный. Поэтому $\angle BAE = \angle BEA$. По доказанному $BC \parallel AE$, отсюда $\angle EBC = \angle BAE$ и $\angle BAE = \angle CBF$. Таким образом, $\angle EBC = \angle CBF$, т. е. BC — биссектриса угла DBF .

8. Задача решается аналогично задаче 7.

§ 17

1. 1. Нет. 2. Да.

2. 1. Нет. 2. Да.

3. 1. 130° .

4. 1. 85° .

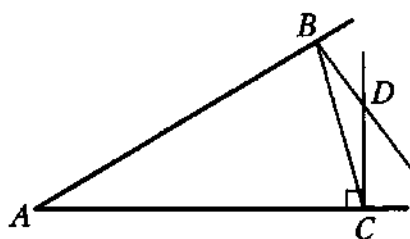


Рис. 8

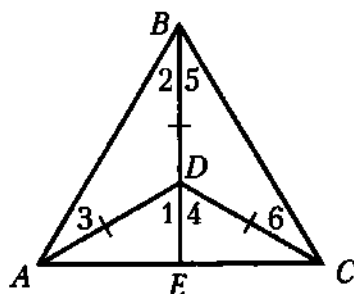


Рис. 9

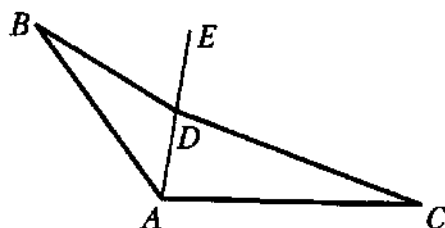


Рис. 10

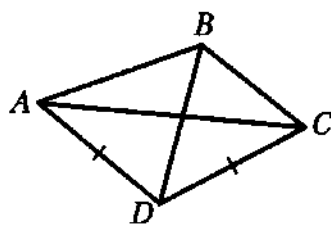


Рис. 11

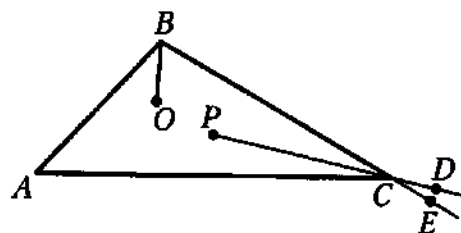


Рис. 12

5. 1. Сумма углов двух треугольников ABC и BCD равна 360° (рис. 8). Значит, $\angle ABD + \angle ACD + \angle A + \angle BDC = 360^\circ$, откуда $\angle BDC = 130^\circ$.

2. Продлим отрезок BD до пересечения со стороной AC в точке E (рис. 9). Тогда $\angle 1 = \angle 2 + \angle 3$, $\angle 4 = \angle 5 + \angle 6$. Так как $DA = DB$ и $DB = DC$, то $\angle 3 = \angle 2$, $\angle 5 = \angle 6$. Тогда $\angle ADC = 2 \angle ABC = 120^\circ$.

6. 1. Продлим отрезок AD , как показано на рисунке 10. $\angle BDE = \angle BAD + \angle ABD$, $\angle EDC = \angle CAD + \angle ACD$. Значит, $\angle BDC = \angle ABD + \angle ACD + \angle A = 171^\circ$.

2. Так как $AD = DB$, то $\angle ADB = 180^\circ - 2 \angle DBA$ (рис. 11). Аналогично получаем, что $\angle BDC = 180^\circ - 2 \angle DBC$. Значит, $\angle ADB = 360^\circ - 2(\angle DBA + \angle DBC) = 360^\circ - 2 \angle ABC = 100^\circ$.

7. 1. На продолжении стороны BC за точку C отметим точку E (рис. 12). $\angle ACE = \angle A + \angle ABC > \angle ABC$. Но $\angle ABO < \angle ABC$, а $\angle ACE < \angle ACD$, значит, $\angle ACD > \angle ABO$ при любом расположении точек O и P .

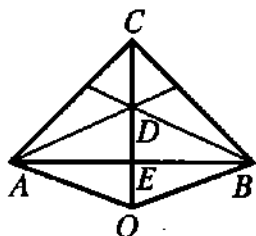


Рис. 13

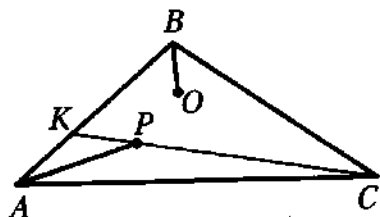


Рис. 14

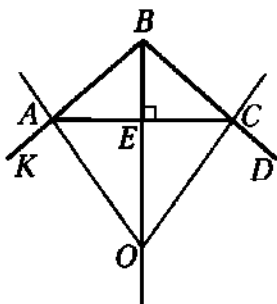


Рис. 15

2. Пусть E — середина стороны AB (рис. 13). Из того, что $AO = BO$ и $AC = BC$, можно доказать, что точки O , E , D лежат на одной прямой и $DO \perp AB$. Пусть $\angle AOD = x$. Тогда $\angle ACO = 90^\circ - \frac{x}{2}$, так как $AO = CO$. Из треугольников ACE и AOE получаем, что $\angle CAB = \frac{x}{2}$, $\angle OAE = 90^\circ - x$. Значит, $\angle DAE = \frac{x}{4}$ (так как AD — биссектриса угла CAB). Но треугольники DAE и OAE равны. Следовательно, $90 - x = \frac{x}{4}$, откуда $x = 72$. Значит, можно доказать, что углы треугольника ABC равны 36° , 36° и 108° .

8. 1. Так как внешний угол треугольника больше внутреннего несмежного с ним (рис. 14), то $\angle APC > \angle AKP > \angle ABC > \angle OBC$. Ответ. Нельзя.

2. Предположим, что $OA = OB = OC$. Из того, что треугольники ABC и AOC равнобедренные, можно доказать, что середина отрезка AC — точка E (рис. 15) — лежит на прямой BO и $BO \perp AC$. Пусть $\angle AOB = x$, тогда $\angle ABO = 90^\circ - \frac{x}{2}$, так как $AO = OB$. С другой стороны, из треугольника AOE получаем $\angle OAE = 90^\circ - x$, $\angle KAO = 90^\circ - x$ (так как AO — биссектриса угла $KAЕ$). Значит, $\angle BAC = 180^\circ - (180^\circ - 2x) = 2x$, откуда $2x = \frac{x}{2}$ и $x = 0$. Полученное противоречие говорит о том, что равенство $OA = OB = OC$ выполняться не может.

§ 18

1. 1. $\angle B < \angle K$. 2. 90° .

2. 1. $AB < PK$. 2. $AE = BE$.

5. 1. Продлим медиану BD на ее длину, как показано на рисунке 16. Так как треугольники ADE и CDB равны, то $BC = AE$, $\angle CAE = \angle BCA$. Значит, $\angle ABE < \angle BAE$. Следовательно, в треугольнике ABE $BE > AE$, откуда $2BD > BC$.

2. Указание. Докажите, что $BD = BC$, и сравните DK и DB .

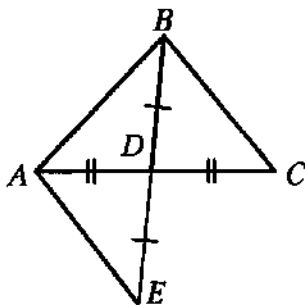


Рис. 16

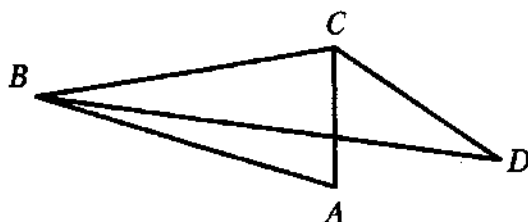


Рис. 17

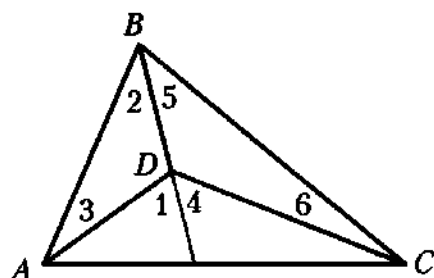


Рис. 18

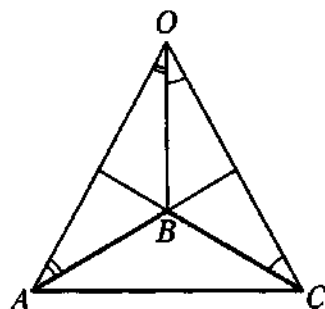


Рис. 19

6. Задачи решаются аналогично задачам 5 (1, 2).

7. 1. $\angle BCA > \angle ABC$, так как $AB > AC$ (рис. 17). Значит, $\angle BCD > \angle BCA > \angle ABC > \angle DBC$, откуда из треугольника BDC получаем $BD > CD$.

2. Указание. Докажите, что $MA = MB = MC$. Отсюда следует, что медианы треугольника ABC являются его высотами. Значит, треугольник ABC равносторонний.

8. 1. $\angle 1 = \angle 2 + \angle 3$, $\angle 4 = \angle 5 + \angle 6$ (рис. 18). Значит, $\angle 1 > \angle 3$, $\angle 4 > \angle 6$. Отсюда следует, что $\angle ADC > \angle BCD + \angle BAD$. Учитывая условие задачи, получаем, что $\angle ADC > \angle DAC$. Значит $AC > DC$.

2. Указание. Аналогично тому, как это сделано в задаче 5 (2), докажите, что треугольник AOC равносторонний (рис. 19). Ответ: $\angle BCA = 30^\circ$.

§ 19

1. 1. Нет. 2. Нет.

2. 1. Нет. 2. Нет.

3. 1. Нет.

4. 1. Нет.

5. 1. Продлим отрезок BB_1 на его длину, как показано на рисунке 20. Можно доказать, что треугольники ABB_1 и DCB_1 равны. Учитывая, что $BD < BC + CD$, получаем, что $2BB_1 < BC + AB$.

2. Не может.

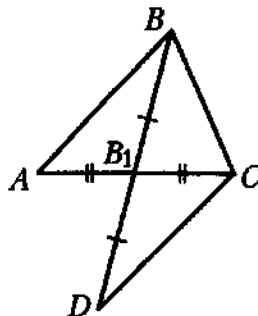


Рис. 20

6. Задачи решаются аналогично задачам 5 (1, 2).

7. 1. Пусть в треугольнике ABC медианы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O . Тогда $AO + OB_1 > AB_1$ и $BO + OA_1 > BA_1$, значит,

$$AO + OB_1 + BO + OA_1 > AB_1 + BA_1.$$

Следовательно,

$$AA_1 + BB_1 > 0,5(AC + BC).$$

2. Пусть прямая AE пересекает сторону BC в точке D , тогда один из углов ADB или ADC не острый. Пусть для определенности это будет угол ADB . Тогда из треугольника ADB $AB > AD$, а из треугольника BEC $EB + EC > BC$. Так как $AB = BC$, то $AD < EB + EC$. Но $EA < AD$.

8. 1. Пусть отрезки AC и BD пересекаются в точке O . Тогда

$$AO + BO > AB, AO + OD > AD, OD + OC > DC, BO + OC > BC.$$

Значит,

$$AO + BO + AO + DO + OD + OC + BO + OC > AB + AD + DC + BC,$$

откуда получаем, что

$$2(AC + BD) > AB + AD + DC + BC.$$

2. Пусть прямая AM пересекает сторону BC в точке D . Можно доказать, что $AB > AD > AM$ (см. задачу 7 (2)). С другой стороны, $CE + EB > CB$, но $CB = AB$. Значит, $MA < BE + EC$.

§ 20

1. 2. 4 см.
2. 2. 60° .
3. 2. 10 см.
4. 2. 150° .

5. 2. Так как $BD = 2BC$, то $\angle DCB = 30^\circ$ (рис. 21). Значит $\angle CAB = 30^\circ$. Отсюда получаем, что $AB = 2BC = 4BD$, тогда $AD = AB - BD = 3BD$.

6. 1. $\angle ABB_1 = \angle 1 + \angle 2$, так как $\angle ABB_1$ — внешний угол треугольника ABO (рис. 22). Аналогично $\angle CBB_1 = \angle 3 + \angle 4$. Тогда $\angle ABC = \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = \angle AOC + \angle 2 + \angle 4$. Из треугольников AOC_1 и COA_1 получаем $\angle 2 = 90^\circ - \angle AOC$, $\angle 4 = 90^\circ - \angle AOC$. Значит, $\angle ABC = 180^\circ - \angle AOC$.

2. Задача решается аналогично задаче 5 (2).

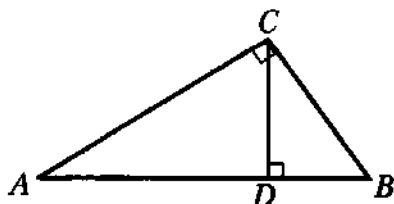


Рис. 21

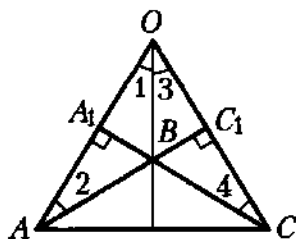


Рис. 22

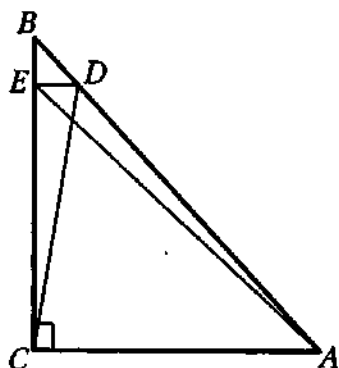


Рис. 23

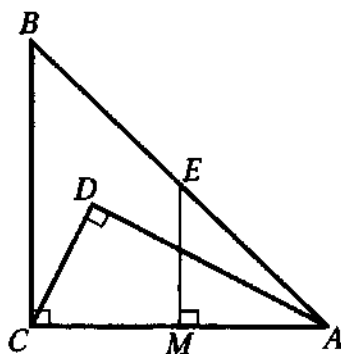


Рис. 24

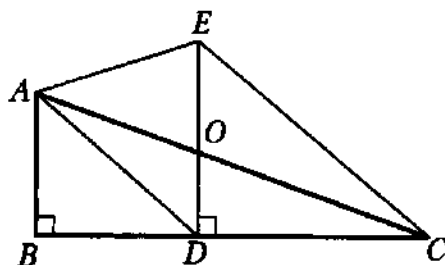


Рис. 25

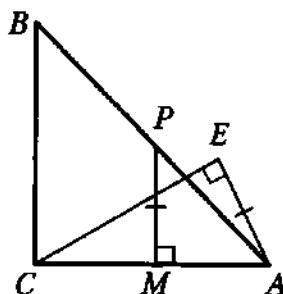


Рис. 26

7. 1. В треугольнике ABC $\angle BAC = 90^\circ - \angle CBA = 50^\circ$ (рис. 23). Тогда $\angle EAC = 45^\circ$, откуда $\angle CEA = 45^\circ$. Значит, $EC = AC$. С другой стороны, $\angle DCA = 80^\circ$ и из треугольника CDA $\angle CDA = 50^\circ$. Следовательно, $CD = CA$, значит, $CE = CD$. Из треугольника CED находим, что $\angle EDC = 85^\circ$.

2. В треугольнике ABC $\angle CAB = 90^\circ - \angle B = 45^\circ$ (рис. 24). В треугольнике AEM $\angle MEA = 90^\circ - \angle MAE = 45^\circ$. Значит, $ME = MA$. В треугольнике CDA $\angle CAD = 90^\circ - \angle DCA = 30^\circ$. Значит, $CD = 0,5AC = MA$. Следовательно, $CD = ME$.

8. 1. В треугольнике DOC $\angle OCD = 20^\circ$, в треугольнике ABD $\angle BDA = 40^\circ$ (рис. 25). Значит, $\angle ADE = 50^\circ$ и $\angle ADC = 140^\circ$. Тогда в треугольнике ADC $\angle DAC = 20^\circ$. Следовательно, $DA = DC$. С другой стороны, в треугольнике EDC $\angle ECD = 45^\circ$ и $DC = DE$. Тогда $AD = DE$, и из треугольника DEA имеем $\angle DEA = 65^\circ$.

2. В треугольнике ABC $\angle BAC = 90^\circ - \angle CBA = 45^\circ$ (рис. 26). В треугольнике PMA $\angle MPA = 45^\circ$. Значит, $MP = MA$ и $AC = 2EA$, откуда $\angle ECA = 30^\circ$ и $\angle EAC = 60^\circ$.

§ 21

5. 1. Пусть D — середина стороны AB . Тогда треугольники ADE и DBE равны по двум катетам. Следовательно, $AE = BE$. Периметр треугольника AEC равен $AC + AE + CE = AC + BE + CE = AC + BC = AC + 24$, откуда находим, что $AC = 6$ см.

6. 1. Треугольники ADK и BDK равны по катету и острому углу. Значит, $AD = BD$. Далее задача решается аналогично задаче 5 (1).

2. Пусть BO и CO — биссектрисы внешних углов при вершинах B и C треугольника ABC (рис. 27). Из точки O проведите перпендикуляры OM , OK , OP на прямые AB , BC , AC соответственно. Докажите сначала, что $OM = OK$ и $OK = OP$, а затем, что $\angle MAO = \angle PAO$.

7. 1. Треугольники ABA_1 и ACC_1 равны по двум катетам. Значит, $AB = AC$. Далее можно доказать, что $BC_1 = A_1C$ и $BC = AC$. Следовательно, треугольник ABC равносторонний и $\angle B = 60^\circ$.

2. Из треугольника ABC находим $\angle C = 90^\circ$. Треугольники BB_1C и B_1AK равны по двум сторонам и углу между ними. Значит, можно доказать, что $\angle MAM_1 = \angle AA_1C$. Следовательно, треугольники MAM_1 и AA_1C равны по гипотенузе и острому углу. Значит, $AM_1 = A_1C$, а так как A_1 — середина отрезка BC , то $AM_1 = BA_1$.

8. 1. Треугольники AOC_1 и A_1OC равны по катету и острому углу (рис. 28), значит, $\angle OCA_1 = \angle OA_1C$ и $AO = OC$. Следовательно, $CC_1 = AA_1$ и треугольники ACC_1 и ACA_1 равны по катету и гипотенузе. Значит, $\angle A_1AC = \angle C_1CA$. Таким образом, каждый из отрезков AA_1 и CC_1 является одновременно высотой и биссектрисой треугольника ABC . Следовательно, этот треугольник равносторонний и $AC = 2BA_1$.

2. Из треугольника ABC находим, что угол BCA равен 90° . Так как A_1 — середина BC , то $AM_1 = A_1C$ и треугольники AMM_1 и AA_1C равны по катету и гипотенузе. Отсюда можно доказать, что прямые BC и DA параллельны. Следовательно, $\angle DAB = \angle ABC$. Значит, треугольники ADC_1 и BC_1C равны по стороне и двум прилежащим к ней углам и $DC_1 = CC_1$.

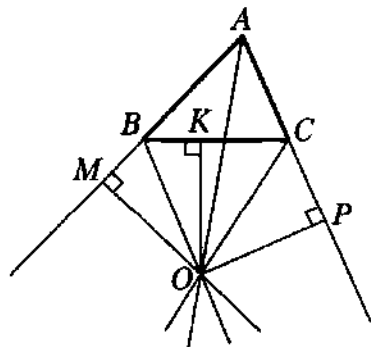


Рис. 27

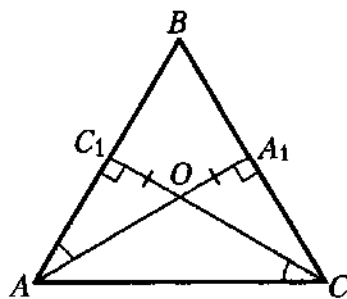


Рис. 28

§ 22

1. 1. $AC > BD$. 2. а) 4 см; б) 5 см.

2. 1. $AC > BD$. 2. а) 30° ; б) 10 см.

3. 1. $AB > DC$.

4. 1. $PM > KE$.

5. 1. Один из возможных чертежей к задаче изображен на рисунке 29. Из условия $\angle OAD + \angle BOE = 90^\circ$ получим, что $\angle ADO = 90^\circ$. Треугольники BOE и AOD равны по катету и острому углу. Значит, $AO = EO$, откуда $AB = DE$. Но $AC > AB$, следовательно, $AC > DE$.

2. а) $0,5x$; б) $0,5x$.

6. 1. Отложим от луча MP угол EMP , равный углу ONP (рис. 30). Треугольники OME и ONP равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Тогда $OE = OP$ и $HE = MP$, но $HE > HK$, значит, $HK < MP$. Любая наклонная, проведенная из точки M к прямой a , больше MP , и, следовательно, она больше HK .

2. а) Можно доказать, что треугольник ABM равносторонний (рис. 31). Значит, все его углы равны 60° . Зная внешний угол равнобедренного треугольника BMC при вершине M , найдем, что $\angle C = \angle MBC = 30^\circ$. Тогда $\angle ABC = 90^\circ$. Значит, AB — расстояние от точки A до прямой BC . Из треугольника ABM находим, что $AB = x$.

б) Проведем $MK \perp BC$, MC — расстояние между прямыми a и BC . Из треугольника MKS находим, что $MK = 0,5x$.

7. 1. Если предположить, что $AB > 2AC$, тогда на продолжении отрезка AC за точку C можно отложить последовательно отрезки CK и KE так, что $CK = AC$ и $AB = AE$ (рис. 32). Треугольники BKC и ACD равны по двум сторонам и углу между ними. Значит, $\angle KBC = 90^\circ$ и $\angle BKC$ острый. Следовательно, $\angle BKC < \angle KBC$. Но $\angle ABE > \angle KBC$, а $\angle BKC > \angle BEC$. Получаем $\angle ABE > \angle BEC$, чего быть не может, т. к. $AB = AE$. Значит, неравенство $AB > 2AC$ выполняться не может.

2. Пусть прямая a пересекает сторону BC в точке K (рис. 33). Пусть E — середина отрезка MB . Проведем $MT \perp AC$, $EP \perp a$, $EO \perp BC$. Треугольники AMT , MEP , EBO равны по гипотенузе и острому углу. Тогда

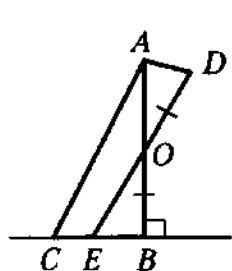


Рис. 29

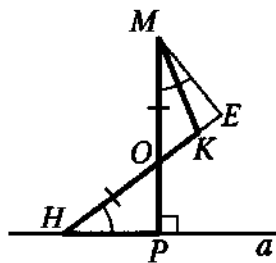


Рис. 30

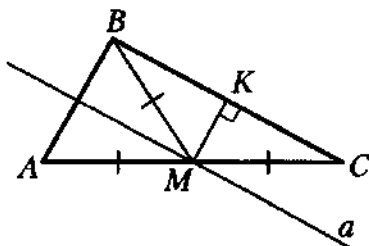


Рис. 31

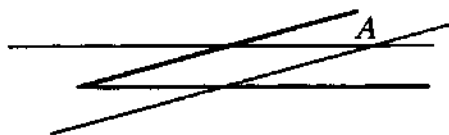


Рис. 36

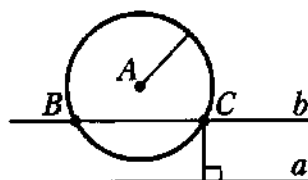


Рис. 37

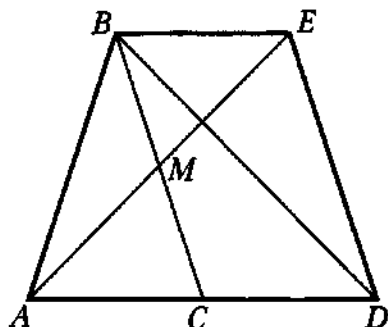


Рис. 38

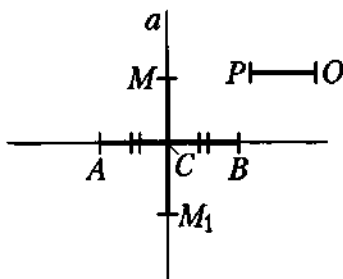


Рис. 39

2. Построим две прямые, соответственно параллельные сторонам угла, удаленные от них на расстояние, равное данному отрезку (рис. 36). Точка A пересечения данных прямых будет искомой.

6. 2. Пусть даны прямая a и точка A, не лежащая на ней (рис. 37). Построим окружность с центром A и радиусом, равным данному отрезку, и прямую b , параллельную a , удаленную от прямой a на расстояние, равное данному отрезку. Точки B и C пересечения построенных окружности и прямой b являются искомыми.

7. 1. $BE \parallel AD$, так как точки B и E равноудалены от прямой AD. Проведем отрезки BE и BD (рис. 38). Треугольники BME и AMC равны по стороне и двум прилежащим углам. Значит, $AC = BE = CD$. Треугольники BCD и BED равны по стороне и двум прилежащим углам. Значит, $BC = ED$.

2. Через точку C — середину отрезка AB проведем прямую a , перпендикулярную AB (рис. 39). От точки C на прямой a отложим отрезки MC и M_1C , равные PO. Точки M и M_1 будут искомыми. В самом деле, треугольники AMC и BMC равны по двум катетам, значит, $MA = MB$, $MC = PO$ по построению. Аналогично проводится доказательство для точки M_1 .

8. 1. $BD \parallel AC$, так как точки B и D равноудалены от прямой AC. Построим $EC \perp BD$, $EO = OC$ (рис. 40). Тогда $ED = CD$, так как треугольники EOD и COD равны по двум катетам. Аналогично $BE = BC$. В треугольнике AED $AE < AD + DE$. Тогда, учитывая доказанное и условие, получаем, что $2BC < AD + DC$.

2. Построение дано на рисунке 41.

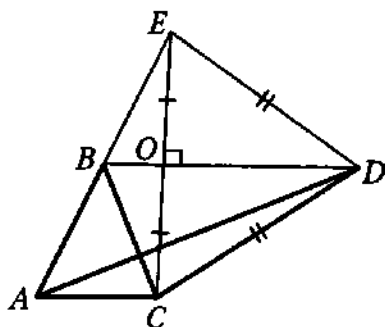


Рис. 40

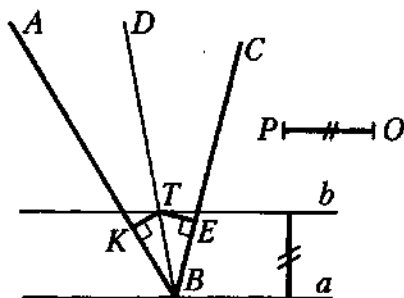


Рис. 41

§ 24

5. 1. Так как $\angle B = 15^\circ$, треугольник ABC можно построить по стороне AB и двум прилежащим к ней углам.

2. Построим треугольник B_1OC по трем сторонам. Затем построим треугольник BOC по стороне OC , углу BCO , равному углу B_1CO и углу BOC , смежному с углом B_1OC (рис. 42). Аналогичным образом строим треугольник ABB_1 .

6. 1. Если $\angle B = 120^\circ$, $\angle C = 45^\circ$, $\angle A = 15^\circ$. Для построения угла в 15° построим произвольный равносторонний треугольник и разделим один из его углов на четыре равные части. Теперь треугольник ABC можно построить по двум сторонам AB и AC и углу между ними.

7. 1. Пусть прямая A пересекает отрезок AB в точке D . Построим отрезок BE : $BE \perp a$, $BO = OE$ (рис. 43). Искомая точка C получается при пересечении прямых a и AE .

2. Построим треугольник MBK по трем сторонам так, чтобы $MB = PK$. Затем построим $BP \parallel MK$, $PK \parallel MB$ (рис. 44). Треугольник PKC построен по стороне PK , углу KPC , смежному с углом BPK , и данному углу PKC . Точку A получим пересечением прямых MB и CK . Треугольник ABC искомым. В самом деле, $MK \parallel BC$, $KP \parallel AB$ по построению. Можно доказать, что треугольники MBK и BPK равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Значит, $MB = PK$.

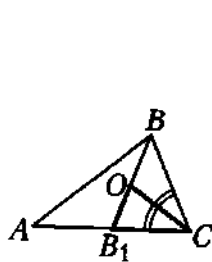


Рис. 42

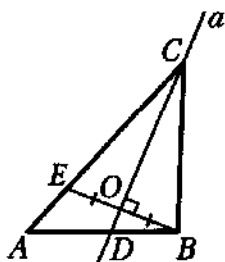


Рис. 43

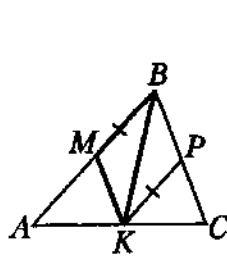


Рис. 44

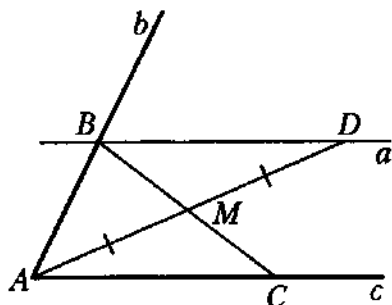


Рис. 45

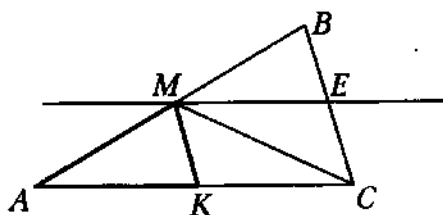


Рис. 46

8. 1. Пусть стороны угла A лежат на прямых b и c . Построим отрезок AD с серединой в точке M (рис. 45). Затем через точку D проведем прямую a , параллельную прямой c . B — точка пересечения прямых a и b . Точку C построим как пересечение BM и c . Точки B и C являются искомыми. В самом деле, можно доказать, что треугольники BMD и AMC равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Значит, $BM = MC$ и отрезок AM является медианой треугольника ABC .

2. Построим треугольник AMK по трем сторонам так, чтобы $AM = PQ$, $MK = P_1Q_1$, $KA = P_2Q_2$ (рис. 46). Треугольник AMC построим по стороне AM , углу A и углу AMC , равному hk . Построим $ME \parallel AC$, $EC \parallel MK$. Точку B получим как пересечение прямых AM и EC . Треугольник ABC будет искомым.

В самом деле, $ME \parallel AC$ по построению. Можно доказать, что треугольники MKC и MEC равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Значит, $MK = EC$. Кроме того, $\angle AMC$, $AC \parallel ME$, AM равны данным по построению.

§ 25

3. 1. Пусть требуется построить треугольник ABC с прямым углом C по катету BC и медиане BM . Построим сначала треугольник BMC по катету и гипотенузе. Далее построим треугольник ABC по двум катетам BC и $AC = 2MC$.

2. Пусть угол при вершине искомого треугольника равен x . Тогда угол при основании равен $90^\circ - 0,5x$. Построив этот угол, можно затем построить искомый треугольник по основанию и двум прилежащим углам.

4. 1. Пусть требуется построить остроугольный треугольник ABC по высоте BM и углам ABM и MBC . Треугольники ABM и CBM строим по катету и прилежащему острому углу. Треугольник ABC будет искомым.

2. Пусть требуется построить треугольник ABC с прямым углом C по высоте CD и углу B . Вначале построим треугольник CBD по катету CD и противолежащему углу B . Треугольник ABC строим по катету BC и острому углу B , прилежащему к этому катету.

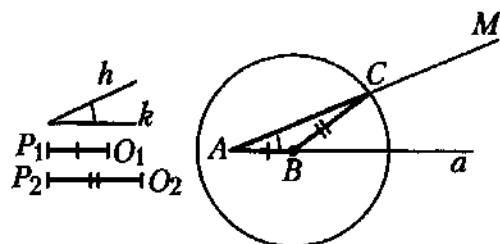


Рис. 47

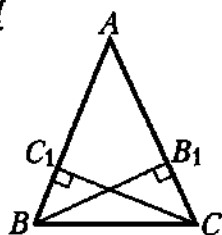


Рис. 48

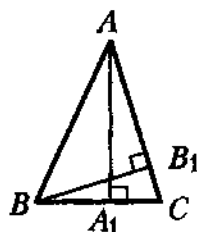


Рис. 49

5. 1. Пусть даны отрезки P_1O_1 и P_2O_2 и угол hk . Требуется построить треугольник ABC , в котором $AB = P_1O_1$, $\angle A = \angle hk$, $BC = P_2O_2$.

Проведем прямую a , на ней с помощью циркуля отложим отрезок AB , равный отрезку P_1O_1 (рис. 47). Затем построим угол BAM , равный данному углу hk . Далее построим окружность с центром B и радиусом P_2O_2 . Соединив точку B с точкой C — точкой пересечения окружности и луча AM , построим искомый треугольник ABC . Задача может не иметь решения, если окружность не пересечет луч AM , или иметь два решения, если окружность пересечет луч AM в двух точках.

2. Пусть требуется построить треугольник ABC по высотам BB_1 и CC_1 и углу A . Построим треугольники ABB_1 и ACC_1 по катету и противолежащему углу (рис. 48). Далее соединим точки B и C отрезком.

6. 1. Вначале постройте угол, равный третьему углу треугольника, а затем выполните построение треугольника по стороне и двум прилежащим углам. Задача может не иметь решения, если сумма данных углов не меньше 18° .

2. Пусть требуется построить треугольник ABC по высотам BB_1 и AA_1 и углу A . Построим сначала треугольник ABB_1 по катету и противолежащему углу, а затем треугольник ABA_1 по гипотенузе AB и катету AA_1 (рис. 49). Точка C получается пересечением прямых AB_1 и BA_1 .

7. 1. Вначале построим треугольник ABM по двум сторонам AB и BM и углу AMB , противолежащему одной из них. Затем строим треугольник ABC по углам A и BCM и стороне AB .

2. Вначале построим угол C , равный $180^\circ - (\angle B + \angle A)$. Затем построим треугольник CDB по катету BD и противолежащему ему углу C . Треугольник ABC строится по сторонам AC и BC и углу C между ними.

8. 1. Сначала построим треугольник ABM по двум углам ABM и AMB и стороне AM , противолежащей одному из них. Треугольник ABC строится по сторонам AB и BC и углу A , противолежащему стороне BC .

2. Сначала построим треугольник BCD по катету CD и гипотенузе BC . Затем, используя данную разность углов A и B , построим угол hk , равный углу A . После этого построим угол, равный разности прямого угла и

построенного угла hk . Угол, равный построенному, отложим от луча CD в сторону, противоположную вершине B . Сторона этого угла пересечет прямую BD в точке A . Треугольник ABC — искомый.

§ 26

1. 3. 80° . 4. $AC > AM$.

2. 2. 70° . 4. $MB > AK$.

3. 2. $4 < AD < 8$.

4. 2. $5 < EP < 10$. 3. 5.

5. 3. Треугольник BAD равнобедренный, AC — биссектриса угла BAD . Тогда $AC \perp BD$. Пусть O — точка пересечения отрезков AC и BD . Можно доказать, что $AO = OC$, $BO = OD$, $\angle OBA = \angle OBC$, $\angle ABO > 45^\circ$, так как $\angle ABC > 90^\circ$ и $TC > AT$. Значит, $\angle BAO < 45^\circ$, $\angle ABO > \angle BAO$. Следовательно, $AO > BO$ и $AC > BD$.

4. Если из точки T провести перпендикуляры TM и TK соответственно на прямые AD и AB , то получившиеся прямоугольные треугольники AMT и AKT равны по гипотенузе и острому углу. Отсюда следует, что $TM = TK$.

6. 3. Пусть TP и KM пересекаются в точке A . $TA = AP$, $MK \perp TP$, так как треугольник TMP равнобедренный. Так как $KT = TM$, то $AK = AM$, $\angle KTA = \angle ATM$, $\angle KTA < 45^\circ$, так как $KO > OM$ и $\angle OTK = 44^\circ$. Значит, $\angle TKA > 45^\circ$. Следовательно, $AT > KA$ и $TP > KM$.

4. Пусть OB и OC — перпендикуляры, проведенные к прямым TM и MP из точки O . Треугольники OBM и OCM равны по гипотенузе и острому углу, значит, $OB = OC$.

7. Рис. 50. 1. Так как $OB = OA$, то $\angle BOA = 180^\circ - 2 \angle ABO$, аналогично $\angle COD = 180^\circ - 2 \angle OCD$. Значит, $\angle AOB = \angle COD$.

2. $\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC$, $\angle BOD = \angle COD + \angle BOC$. Значит, $\angle AOC = \angle BOD$. Тогда треугольники AOC и BOD равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $AC = BD$.

3. Треугольники ABO и COD равны по двум сторонам и углу между ними. Значит, $AB = CD$. Тогда треугольники ABC и BDC равны по трем сторонам. Тогда $\angle DBC = \angle ACB$. Аналогично $\angle CAD = \angle BDA$. Но $\angle DBC = \angle ADB$, так как $BC \parallel AD$. Следовательно, $\angle DBC = \angle CAD$.

4. Проведем перпендикуляры OP и OK из точки O к прямым AD и BC ; $AP = PD$, $BK = KC$, так как треугольники AOD и BOD равнобедренные, значит, $PD > KC$. Отметим на отрезке PD точку E так, что $PE = KC$. Проведем $ET \parallel OP$ и $TH \parallel PD$. $PE = HT$, так как $ET \perp OP$, значит, треугольники OKC и $ОНТ$ равны по гипотенузе и катету, поэтому $ОН = ОК$. Так как $ОН > ОР$, то $ОК > ОР$.

8. 1. Треугольники $КОМ$ и $РОН$ (рис. 51) равны по трем сторонам, значит, $\angle КОМ = \angle РОН$.

2. $\angle РОК = \angle КОМ - \angle РОМ$, $\angle МОН = \angle РОН - \angle РОМ$, значит, $\angle РОК = \angle МОН$. Тогда треугольники $РОК$ и $МОН$ равны по двум сторонам

и углу между ними. Значит, $\angle KPO = \angle OMH$. Но $\angle POK + 2\angle KPO = 180^\circ$, так как треугольник PKO равнобедренный. Значит, $\angle POK + 2\angle OMH = 180^\circ$.

3. $PK = MH$, так как треугольники POK и MOH равны. Тогда треугольники KPM и HMP равны по трем сторонам. Значит, $\angle KMP = \angle HPM$. Аналогично $\angle MKN = \angle PHK$. Но так как по условию $\angle MPH = \angle MKN$, то $\angle KMP = \angle MKN$. А отсюда следует, что $PM \parallel KN$.

4. Опустим перпендикуляры OA и OB из точки O на прямые KH и PM соответственно. Тогда $OA < OB$, $AK = AH$, $PB = BM$, так как треугольники POM и KOH равнобедренные. Отложим на луче OA отрезок OC , равный OB (см. рис. 51). Проведем $CD \perp OA$, $DE \parallel AC$. Треугольники OBM и OCD равны по катету и гипотенузе, значит, $BM = CD$. С другой стороны, $AE = CD$, так как $AC \parallel ED$. Но $AE < AH$, следовательно, $BM < AH$ и $PM < KH$.

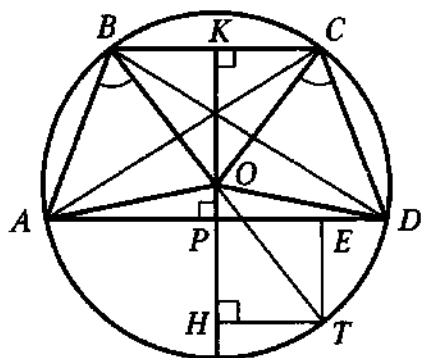


Рис. 50

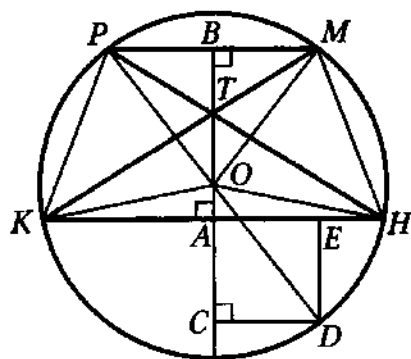


Рис. 51

7-й КЛАСС. ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К КОНТРОЛЬНЫМ ЗАДАНИЯМ

№ 1

1. 1. 135° . 2. $AB > CD$. 3. а) 50° , 40° ; б) углы MOB и COK не являются вертикальными, так как их градусные меры не равны. 4. Одну, две или три точки (рис. 264).

2. 1. 20° . 2. 102 мм. 3. а) 50° , 40° ; б) если бы точки A, K, B лежали на одной прямой, то углы AKH и MKB были бы вертикальными, но эти углы не равны. Значит, точки A, K, B не лежат на одной прямой. 4. См. рис. 53.

3. 1. Да. 2. $PK = HM$. 3. а) Да; б) $\angle EOB + \angle POB = \angle POE$. Значит, $\angle POE = 180^\circ$, т. е. угол POE является развернутым и точки P, O, E лежат на одной прямой. Следовательно, углы EOB и POA будут вертикальными. 4. Можно (рис. 54).

4. 1. 90° . 2. 125 мм. 3. а) Да; б) задача решается аналогично задаче 3 (36). 4. На шесть или семь частей (рис. 52).

№ 2

1. 4. Построить угол, равный разности прямого и данного, и разделить полученный угол пополам.

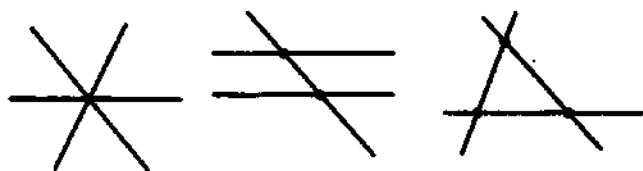


Рис. 52

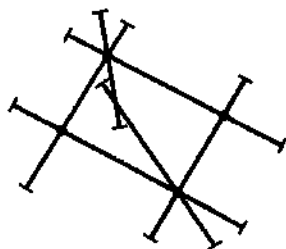


Рис. 53

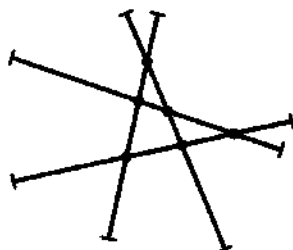


Рис. 54

2. 4. Разделить прямой угол на восемь равных частей и взять одну из них.
 3. 4. Отложить данный угол последовательно 3 раза и вычесть из построенного прямой угол.
 4. Построить угол, равный $0,25$ прямого, и найти разность между прямым и построенным.

№ 3

1. 1. 50° . 2. Не могут. 3. а) 51° .
 2. 1. 40° . 2. Да.
 3. 1. 120° . 2. Ни одной, так как $a \parallel c$. 3. а) 63° .
 4. 1. 90° . 2. Одну. 3. а) 135° .

№ 4

1. 1. $AC > BC$. 2. 30° . 3. 6) По неравенству треугольника $BC < DC + BD = 2BD = 4AB$. 4. Если все стороны треугольника имеют разные длины, то методом доказательства от противного можно доказать, что один из его углов меньше 60° . Значит, при любом разрезании данного треугольника один из образовавшихся треугольников будет иметь угол меньше 60° , а следовательно, не будет равносторонним. Ответ: нельзя.

2. 1. $\angle C = 120^\circ$, $\angle A = 40^\circ$, $\angle B = 20^\circ$. 3. 6) Находим $\angle DBC = 60^\circ$. Значит, $BC = DC = AD$, $AB < AC = 2BC$, откуда и следует утверждение, которое требуется доказать. 4. Рис. 55. Можно доказать, что при данном составлении равнобедренных прямоугольных треугольников ADP , BDP , BEP и PEC точки P , D и E будут лежать соответственно на отрезках AC , AB , BC , а отрезки AB и BC будут равными. Ответ: можно.

3. 1. $AB = BC$. 3. 6) Аналогично заданию а) можно доказать, что $\angle ABD = \angle C$. Тогда в треугольнике ABD $AD > BD$, а в треугольнике BCD $BD < DC$. Значит, $AD > DC$. 4. Рис. 56. Здесь $\angle BAC = 30^\circ$, $\angle ABD = 30^\circ$, $\angle ABC = 90^\circ$. Можно доказать, что треугольник DBC равносторонний, а треугольник ABD равнобедренный. Ответ: можно.

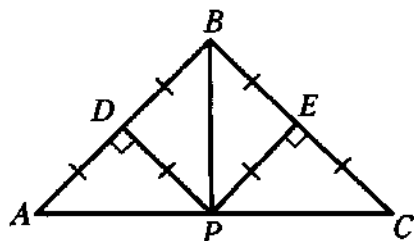


Рис. 55

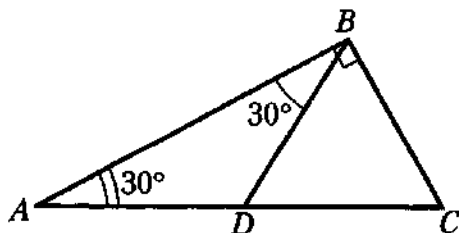


Рис. 56

4. 3. Из треугольника MHC получаем $\angle C < \angle MHC$, значит $\angle C < \angle BAC$. Тогда в треугольнике ABC $AB < BC$.

4. Треугольник можно разрезать на два треугольника только прямым разрезом, проходящим через вершину. Пусть отрезок AM ($M \in BC$) разделит разносторонний треугольник ABC на два равных треугольника AMB и AMC , тогда $\angle B = \angle C$. Значит, $AB = AC$, чего быть не может. Ответ: нельзя.

№ 5

1. д) Если предположить, что $AE = EC$, то отрезок ED будет высотой и медианой треугольника AEC . Тогда через точку D на прямой AC будут проведены две прямые BD и DE , перпендикулярные AC , чего быть не может.

2. д) Можно доказать, что точка пересечения биссектрис треугольника ABC равноудалена от его вершин.

3. д) Так как $\angle BCA = 30^\circ$, $\angle ABC = 90^\circ$, то $AB = 2AC$. Можно доказать, что $BO = AO = OC$. С другой стороны, треугольники BCO и MOA равны по двум сторонам и углу между ними. Значит, $BO = OM$. Таким образом, точка O равноудалена от точек A, B, C, M . Значит, через эти точки можно провести окружность с центром O .

4. д) Можно доказать, что треугольники BCO и MOD равны, причем $HO = OM$ и $\angle COH = \angle MOD = 30^\circ$. Тогда $\angle HOM = \angle AOM + \angle AOC + \angle COH = 180^\circ$, значит, точки H, O, M лежат на одной прямой. Следовательно, точка O является серединой отрезка MH .

8-й КЛАСС. ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ ДЛЯ УРОКА

§ 1

1. 2. 140° .

2. 2. 5.

3. 1. Периметры равны.

4. 1. Периметры равны.

5. 1. Периметры равны. 2. $\frac{2n-2}{n-2} = k$, откуда $2 + \frac{2}{n-2} = k$. Значит, $n-2=1$ или $n-2=2$. Учитывая нечетность k , получаем $k=3$.

6. 1. Периметры равны.

2. Задача решается аналогично задаче 5 (2). Ответ. $k=2$.

7. 1. Нет, не существует. Можно доказать, что число диагоналей n -угольника равно $\frac{n(n-3)}{2}$. Тогда $n(n-3) = 2 \times 5 \times 5$, чего быть не может.

2. Можно доказать, что сумма внешних углов выпуклого многоугольника, взятых по одному при каждой вершине, равна 360° . Тогда такой многоугольник может иметь не более двух внешних углов, больших 170° . Это означает, что острых углов с градусной мерой, меньшей 10° , может быть не более двух. Случай наличия двух таких углов реализуется для треугольника с углами 1° , 2° , 177° .

8. 1. Задача решается аналогично задаче 7 (1). Ответ. Существует, девятиугольник имеет 27 диагоналей. 2. $n=6$.

§ 2

1. 1. 28 см. 2. 30° , 150° . 3. 2. 60° , 120° ; $BM=AH$.

2. 1. 10 см. 2. 45° , 135° . 4. 2. 60° , 120° ; $AM=CK$.

5. 1. Докажите сначала, что $OK=OM$.

2. В четырехугольнике $MONC$ $\angle MON = 155^\circ$, $\angle ONC = 85^\circ$, $\angle OMC = 90^\circ$. Значит, $\angle C = 30^\circ$. Тогда $MD = 0,5CD$ и $MD = 0,5AB$. Углы параллелограмма равны 30° и 150° .

6. Задачи решаются аналогично задачам 5 (1, 2).

2. Углы параллелограмма равны 60° и 120° .

7. 1. Последовательно доказываем, что $\triangle BOE = \triangle KOD$, $\triangle BKO = \triangle OED$, $ED \parallel BK$, $ED = BK$, $\triangle BKE = \triangle BED$, $\angle BKE = \angle BDE$, $\angle KEB = \angle DBE$. Значит, $OB = OE$.

2. В параллелограммах $ADEN$ и $KDEB$ $AN = DE$ и $KB = DE$. Значит, $AN = KB$. Следовательно, $AK = HB$.

8. 1. Задача решается аналогично задаче 7 (1), $\angle KBE = 90^\circ$.

2. Докажите сначала, что $EK = BD = MP$.

§ 3

5. 1. Докажите, что $\triangle MBK = \triangle KCE$, $AMEC$ — параллелограмм и $MK = KE$.

2. Докажите, что четырехугольники $ABMK$ и $MKDC$ являются параллелограммами.

6. Задачи решаются аналогично задачам варианта 5 (1, 2).

7. 1. Докажем последовательно, что $\triangle BPK = \triangle MED$, $BC \parallel AD$, $BC = AD$, $ABCD$ — параллелограмм.

2. Отметим на отрезке OC точку E так, что $AO = OE$. Тогда четырехугольник $ABED$ будет параллелограммом. Используя теорему о внешнем угле треугольника, докажем, что $\angle BEB > \angle BCD$. Значит, $\angle BAD > \angle BCD$.

8. Задачи решаются аналогично задачам 7 (1, 2). В задаче 2 доказательство приведите методом от противного.

§ 4

1. 1. $60^\circ, 120^\circ, 50^\circ, 130^\circ$. 2. 20 см.

2. 1. $60^\circ, 120^\circ, 40^\circ, 140^\circ$. 2. 10 см.

3. 1. $40^\circ, 140^\circ$. 2. 1 : 2.

4. 1. $60^\circ, 120^\circ$. 2. 1 : 2.

5. 1. $AE = AD - ED = AD - 0,5(AD - BC) = 0,5(AD + BC)$.

2. Пусть дана трапеция $ABCD$, в которой $\angle A = 90^\circ$, AD — большее основание, диагонали пересекаются в точке O , $\angle ABD = 60^\circ$, $\angle AOD = 90^\circ$. Тогда $\angle ADO = \angle CBO = 30^\circ$, $AD = 2AO$, $BC = 2CO$. Значит, $AC = \frac{1}{2}(BC + AD)$.

6. 1. Проведем через точку O — точку пересечения диагоналей трапеции, перпендикуляры OK и OM к прямым BC и AD соответственно. Тогда $OK = 0,5BC$ и $OM = 0,5AD$, так как треугольники BOC и AOD равнобедренные и прямоугольные. Значит, $KM = 0,5(AD + BC)$.

2. Продлите большее основание до пересечения с лучом.

7. 1. Пусть в трапеции $ABCD$ AD — большее основание. Через вершину B проведем прямую, параллельную CD , пересекающую AD в точке E . Тогда $AE < AB + BE$. Значит, $AB + CD > AD - BC$.

2. Пусть в трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC O — точка, равноудаленная от всех сторон. Проведем перпендикуляры OK , OM , OP , OE к прямым BC , CD , AD , BA соответственно. Из равенства треугольников следует, что $KC = MC$. Аналогично $MD = PD$, $AP = AE$, $BE = BK$. Значит, $BC + AD = AB + CD$.

8. 1. Пусть в трапеции $ABCD$ AD — большее основание. На продолжении отрезка AD за вершину D отметим точку E так, чтобы прямые BD и CE были параллельны. Тогда $AC + CE > AE$. Значит, $AC + BD > AD + BC$.

2. На рисунке 57 $ABCD$ — трапеция. Точка O равноудалена от вершин трапеции. По теореме о сумме углов многоугольника $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 + \angle 7 + \angle 8 = 360^\circ$. Но $\angle 1 = \angle 7$, $\angle 2 = \angle 3$, $\angle 4 = \angle 5$, $\angle 6 = \angle 8$. Значит, $\angle 1 + \angle 2 + \angle 5 + \angle 6 = 180^\circ$, т. е. $\angle BCD + \angle BAD = 180^\circ$. Аналогично $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$.

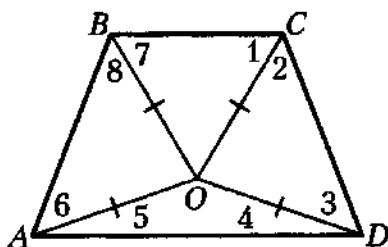


Рис. 57

§ 5

5. 1. Один из треугольников, на которые данная диагональ разделяет искомый параллелограмм, строится по двум сторонам и высоте, проведенной к одной из них. Затем построенный треугольник достраивается до параллелограмма.

2. Пусть требуется построить равнобедренную трапецию $ABCD$ с большим основанием AD по отрезку AC , углу BAD и перпендикуляру AK , проведенному к прямой BC . Сначала строим треугольник AKC по катету и гипотенузе, затем проводим прямую AD параллельно прямой KC и на отрезке KC отмечаем точку B так, что $\angle BAD$ равен данному. Далее треугольник ABC достраиваем до трапеции.

6. 1. Пусть требуется построить параллелограмм $ABCD$, в котором O — точка пересечения диагоналей. Треугольник AOB строится по двум сторонам и высоте, проведенной к одной из них. Затем этот треугольник достраивается до параллелограмма.

7. 1. Один из треугольников, на которые данная диагональ разделяет параллелограмм, строится по двум сторонам и углу, противолежащему одной из них. Затем этот треугольник достраивается до параллелограмма.

2. Пусть следует построить трапецию $ABCD$ с большим основанием AD , в которой O — точка пересечения диагоналей, по отрезкам AC , BD , CD и углу AOD . Рассмотрим треугольник CAE , где $E \in AD$, $CE \parallel BD$. В этом треугольнике $BD = CE$, $\angle ACE = \angle AOD$. Значит, треугольник CAE можно построить по двум сторонам и углу между ними. Точку D можно получить, проведя окружность с центром в вершине C и радиусом CD . Далее треугольник ACD достраивается до трапеции.

8. 1. Задача решается аналогично задаче 7 (1).

2. В задаче выполняется дополнительное построение, аналогичное построению в задаче 7 (1) из § 4.

§ 6

1. 1. 140° . 2. 1. 75° . 3. 1. 5 см. 2. 90° . 4. 1. 60° . 2. 90° .

5. 1. $2KE = KD$. Значит, $\angle ADB = 30^\circ$ и треугольник ABO равносторонний, O — точка пересечения диагоналей прямоугольника, $AP = 0,5AM$. Значит, $AP = 0,25AO$, $AP : PC = 1 : 7$.

2. Из условия задачи следует, что $MK = \frac{1}{2}AC$, $AP = \frac{1}{4}AC$. Отметим на отрезке AC точку E так, чтобы $EC = AP$. Тогда $PE = MK$ и $\triangle APM = \triangle EKS$. Значит, четырехугольник $PMKE$ — параллелограмм, так как его противоположные стороны попарно равны. Но $PK = ME$ из равенства треугольников AME и CPK . Следовательно, $PMKE$ — прямоугольник и $\angle PMK = 90^\circ$.

6. 1. $BO : PH = 1 : 4$. 2. 90° . Задачи решаются аналогично задачам 5 (1, 2).

7. 1. Пусть O — точка пересечения диагоналей данного прямоугольника. Тогда $\angle ACD = 75^\circ$, $\angle DEC = 90^\circ$, $\angle EOD = 30^\circ$, $ED = \frac{1}{2}OD = \frac{1}{4}BD$, $BE < ED + BD = 5ED$.

2. Пусть окружность пересекает прямую BD в точке P . Тогда четырехугольник $AECD$ является прямоугольником, $\angle AEC = 90^\circ$. С помощью свойства внешнего угла треугольника можно доказать, что $\angle ABC = \angle AEC + \angle BAE = 150^\circ$. Значит, $\angle BAD = 30^\circ$. Искомое расстояние равно 5 см.

8. 1. $\angle MKE = 15^\circ$. Значит, $ME = EK$ и $MT = TK$. Следовательно, $PT > 0,5KH > 0,49KH$.

2. Задача решается аналогично задаче 7 (2), $HB = 10$ см.

§ 7

1. 1. $15^\circ 30'$, $74^\circ 30'$, 90° .

2. 1. 90° , $73^\circ 30'$, 147° .

3. 1. 90° . 2. 3а.

4. 1. 90° . 2. 2а.

5. 1. Докажите, что диагональ AC составляет со стороной ромба угол в 30° , $\angle AOB = 120^\circ$.

2. Треугольники AKD и MCD равны. Значит, $\angle MDK + \angle AKD = 90^\circ$. Но $\angle AOD = \angle AKD + \angle MDK$ по свойству внешнего угла треугольника OKD . Значит, $\angle AOD = 90^\circ$, $\angle AMO = 60^\circ$.

6. Задачи решаются аналогично задачам 5 (1, 2). Ответ: 1. а. 2. $MP = AK$.

7. 1. На рисунке 58 изображены ромбы, данные в условии задачи, $CM = MD$.

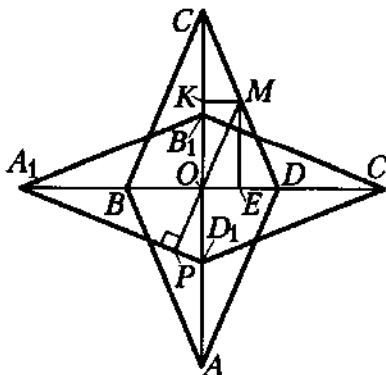


Рис. 58

Следует доказать, что угол MPD_1 прямой. Проведем $MK \perp OC$, $ME \perp OD$. Так как $\triangle CKM = \triangle MED$, то $ME = OK = CK$ и $\angle MCO = \angle МОС$. Значит, $\angle POD_1 = \angle OCM$. Тогда $\angle POD_1 + \angle PD_1O = 90^\circ$, $\angle PD_1O = \angle ODC$ и $OP \perp A_1D_1$.

2. Пусть ME , CO , PD — перпендикуляры к прямой AB . Тогда можно доказать, что $\triangle MAE = \triangle AOC$ и $\triangle BOC = \triangle BPD$, причем $ME = AO$, $PD = BO$.

8. 1. Пусть O_1 — точка пересечения диагоналей ромба $AB_1C_1D_1$. Тогда четырехугольник $AOEO_1$ является квадратом и прямая OO_1 содержит отрезок PO . Точки A и E являются концами другой диагонали квадрата. Значит, $PA = PE$.

2. Пусть прямые TC и AB пересекаются в точке O . Обозначим $\angle MTC = \alpha$. Тогда $\angle TCP = \alpha = \angle ACO$. Треугольники ACB и MCT равны по двум катетам. Значит, $\angle OBC = \alpha$; $\angle OCB = 90^\circ - \alpha$. Поэтому $\angle COB = 90^\circ$.

§ 8

5. 2. Сначала постройте треугольник ABE по $\angle ABE = 90^\circ$, $\angle BAE = \frac{90^\circ}{4}$ и стороне AE , а затем достройте этот треугольник до квадрата.

6. 2. Сначала постройте треугольник BMD по углу MBD , углу BMD , равному $180^\circ - \angle MBD - 45^\circ$ и стороне $BM = PQ$. А затем достройте этот треугольник до квадрата.

7. 1. Пусть требуется построить прямоугольник $ABCD$ по диагонали AC и периметру P . На продолжении стороны BC за вершину B отметим точку M так, чтобы выполнялось равенство $AB = MB$. Тогда треугольник AMC можно построить по стороне MC , равной $\frac{1}{2}P$, стороне AC и углу M , равному 45° . Затем треугольник AMC дорабатывается до прямоугольника.

2. Пусть требуется построить квадрат $ABCD$. На диагонали BD возьмем точку M так, чтобы $MD = AD$. Тогда в треугольнике BMA $BM = BD - AD$, $\angle ABD = \frac{90^\circ}{2}$, $\angle BMA = \frac{5}{4} \times 90^\circ$. Сначала построим треугольник BMA , а затем достроим его до квадрата.

8. 1. Пусть требуется построить ромб $ABCD$ с точкой пересечения диагоналей O , в котором AC — меньшая диагональ. На отрезке OB возьмем точку M так, чтобы $OM = OC$. Тогда $\angle BMC = \frac{3}{4} \times 90^\circ$, $BM = \frac{BD - AC}{2}$. Значит, сначала можно построить треугольник BMC , а затем достроить его до ромба.

2. Пусть требуется построить квадрат $ABCD$. Продлим отрезок AC за вершину A и отложим на продолжении отрезок $AE = AD$. Треугольник ECD можно построить по стороне EC , равной $AC + AD$, $\angle E = \frac{90^\circ}{4}$, $\angle ECD = \frac{90^\circ}{2}$. Затем достроим этот треугольник до квадрата.

§ 9

1. $1. (a + b + c)(l + f) - f^2 + \frac{bd}{2}$. Предполагается, что площадь выреза в виде прямоугольного треугольника вычисляется достраиванием этого треугольника до прямоугольника. 2. 6 см.

2. $1. f^2 + (a + b + c)l - \frac{bd}{2}$. Площадь выреза в виде прямоугольного треугольника вычисляется достраиванием до прямоугольника. 2. 16 см.

3. 2. 100 см². 4. 2. 60 см².

5. 1. Достройте каждый из треугольников ADE и BDE до прямоугольника.

2. Проведите прямые, параллельные диагоналям ромба и проходящие через его вершины.

6. Задачи решаются аналогично задачам 5 (1, 2).

7. 1. Пусть в треугольнике ABC BM — медиана. Если $BA = BC$, то решение задачи очевидно. Пусть $AB > BC$. Проведем через точку M прямую $MP \parallel AB$ (рис. 59) и перпендикуляры MT , CE , BP . Тогда $\triangle TBM = \triangle BPM$, $\triangle ATM = \triangle MCE$, $\triangle EKC = \triangle BKP$, откуда получаем, что площади треугольников ABM и BMC равны.

2. Из треугольника BCD найдем $\angle CBD = 45^\circ$. Так как $\angle ABC = 135^\circ$, то $\angle ABD = 90^\circ$. Значит, параллелограмм $ABPK$ является прямоугольником, $\angle ADB = 45^\circ$. Следовательно, $AB = BD$ и $AB : BP = 2 : 3$. Зная периметр прямоугольника $ABPK$, находим, что его площадь равна 54 см².

8. 1. Дополнительное построение показано на рисунке 60. Пользуясь полученным чертежом, можно доказать, что площадь треугольника AD_1C равна половине площади прямоугольника $APES$, а площадь треугольника ABC равна половине площади прямоугольника $ATKS$. Но площади прямоугольников $ATKS$ и $APES$ относятся как 1 : 2.

2. Задача решается аналогично задаче 7 (2). Ответ. 30 см.

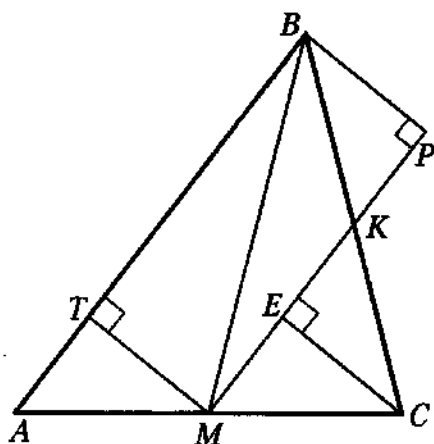


Рис. 59

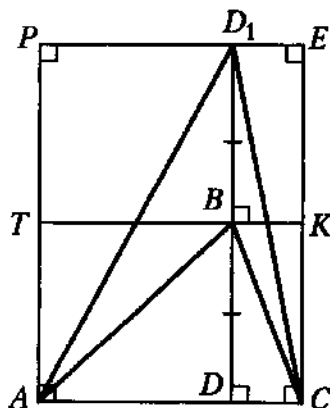


Рис. 60

§ 10

1. 1. 20 см^2 .2. 1. 77 см^2 .3. 1. $45^\circ, 135^\circ$.

2. Площадь прямоугольника больше площади параллелограмма.

4. 1. $30^\circ, 150^\circ$.

2. Площадь квадрата больше площади параллелограмма.

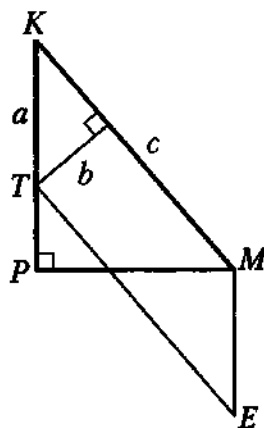
5. 1. Находим, что углы параллелограмма равны 45° и 135° . Отсюда его площадь равна 20 см^2 .2. $S_{\text{АЕМН}} : S_{\text{ВРМК}} = \text{АЕ} : \text{ВК}$, $S_{\text{ВРМК}} : S_{\text{ТМОС}} = \text{РВ} : \text{ОС}$. Перемножая записанные равенства и учитывая, что $\text{АЕ} = \text{ОС}$, получаем то, что требуется доказать.6. 1. $\angle \text{МДВ} = 2 \angle \text{МБД} = 15^\circ$. Значит, острый угол ромба равен 30° , а его высота 10 см . Находим, что сторона ромба равна 20 см . Ответ. 200 см^2 .2. $S_{\text{АМОТ}} : S_{\text{МВНО}} = \text{ОТ} : \text{ОН} = S_{\text{ТОРД}} : S_{\text{ОНСР}}$, откуда получаем то, что требуется доказать.7. 1. Пусть дан треугольник РМК , в котором $\angle \text{Р} = 90^\circ$, $\text{РМ} < \text{РК}$. Проведем дополнительное построение параллелограмма КТЕМ , как показано на рисунке 61. Тогда площадь этого параллелограмма, с одной стороны, равна bc , а с другой — $\text{МР} \cdot a$, откуда получаем, что $\text{РМ} = \frac{bc}{a}$.2. Площадь параллелограмма АВСД равна площади параллелограмма АМКД , так как эти параллелограммы имеют общее основание АД и равные высоты. Аналогично равны площади параллелограммов АМКД и ЕРКД . Тогда равны и площади параллелограммов АВСД и ЕРКД . Четырехугольник ЕМСД общий для этих параллелограммов. Отсюда можно доказать, что $S_{\text{АВМЕА}} = S_{\text{ДКРМС}}$.8. 1. Пусть дана прямоугольная трапеция МРКЕ , в которой $\angle \text{М} = 90^\circ$, $\text{МР} = b$, $\text{РК} = c$, $\text{КЕ} = a$. Проведем $\text{РТ} \parallel \text{КЕ}$, $\text{РО} \perp \text{КЕ}$, как показано на рисунке 62. Тогда площадь параллелограмма ТРКЕ , с одной стороны, равна $\text{РО} \cdot a$, а с другой — bc . Значит, $\text{РО} = \frac{bc}{a}$. 2. Задача решается аналогично задаче 7 (2).

Рис. 61

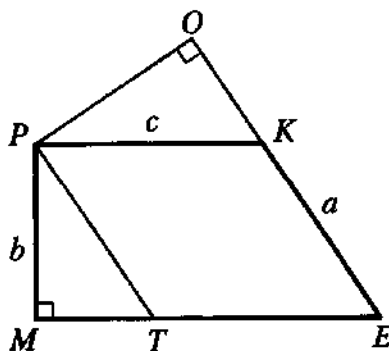


Рис. 62

§ 11

1. 1. 24 см². 2. 8 см².

2. 1. 25 см². 2. 6 см².

3. 1. 1 : 2. 2. 6 см².

4. 1. Площади равны. 2. 12 см².

5. 1. Докажите, что сумма высот этих треугольников, проведенных к противоположным сторонам параллелограмма, равна его высоте.

2. Пусть $MC = x$. Тогда, выражая площадь треугольника ACB различными способами, получаем уравнение $\frac{6x}{2} + \frac{14x}{2} = 42$, откуда находим $x = \frac{21}{5}$ см.

6. 1. Задача решается аналогично задаче 5 (1).

2. Площадь треугольника COD равна 16 см². Далее можно доказать, что площади треугольников AOB и COD равны.

7. 1. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O и $\angle AOB = 30^\circ$. Проведем перпендикуляры BK и DE к прямой AC . Тогда площадь четырехугольника равна $\frac{BK \times AC}{2} + \frac{DE \times AC}{2} = \frac{1}{2}AC(BK + DE) = \frac{1}{2}AC\left(\frac{1}{2}BO + \frac{1}{2}OD\right) = \frac{AC \times BD}{4} = 24$ см².

2. $S_{EMH} = \frac{1}{3}S_{EBC} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}S_{ABC} = \frac{S}{6}$.

8. 1. Пусть в треугольнике ABC O — точка пересечения биссектрис. Можно доказать, что точка O удалена от каждой из сторон треугольника на 1,5 см. Тогда $S_{ABC} = \frac{1,5AB}{2} + \frac{1,5BC}{2} + \frac{1,5AC}{2} = \frac{1,5}{2}(AB + BC + AC) = \frac{1,5}{2} \times 16 = 12$ см².

2. $S_{AMP} : S = (AM \times AP) : (AB \times AC) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{9}$. Значит, $S_{AMP} = \frac{2}{9}$. Аналогично $S_{PKS} = \frac{2}{9}S$, откуда искомая площадь равна $\frac{5}{9}S$.

§ 12

1. 1. 4 см. 2. 54 см².

2. 1. 5 см. 2. 72 см².

3. 1. 13,5 см². 2. 54 см².

4. 1. 24 см². 2. 18 см².

5. 1. Из точки O опустим перпендикуляры OP , OK , OM на стороны AD , CD , BC соответственно. Можно доказать, что $OP = OK = OM$. Из треугольника OKD находим $OK = 0,5a$. Тогда площадь трапеции будет равна $0,5a(b + c)$.

2. Можно доказать, что площади треугольников MPH и RHK равны. Тогда площадь трапеции равна $S_1 + S_2$.

6. 1. $AM = AN$, так как $AB \perp MN$ и $MB = BN$; $HA \perp MK$, так как $MN = NK$ и $AM = AK$. Значит, отрезок HA является высотой трапеции и равен $\frac{1}{2}a$. Площадь трапеции равна $\frac{1}{4}a(a+b)$.

2. Проведем диагональ AC трапеции $ABCD$. Тогда $S_{ABC} = S_1$, $S_{ACD} = S_2$. Площадь трапеции равна $S_1 + S_2$.

7. 1. Можно доказать, что точка O равноудалена от всех вершин трапеции. Тогда из задачи 1 варианта 8 § 4 следует, что $\angle A = 30^\circ$. Площадь трапеции будет равна $\frac{1}{4}a(b+c)$.

2. Проведем через точку O прямую, параллельную MK , пересекающую отрезки MN и PK в точках E и T соответственно. Можно доказать, что $AE \parallel PK$, $BT \parallel MN$. Таким образом, трапеция разбивается на 8 треугольников, равных треугольнику HOP . Следовательно, площадь трапеции равна 40 см^2 .

8. 1. Можно доказать, что точка O равноудалена от всех сторон трапеции. Тогда из задачи 2 варианта 7 § 4 вытекает, что $PK + MN = b + c$. Площадь трапеции будет равна $\frac{1}{2}a(b+c)$.

2. Можно доказать, что площади треугольников AOB и COD равны. Тогда $S_{AOB} : S_{BOC} = S_{AOD} : S_{DOC}$ откуда получаем $S_{AOB}^2 = S_{COD}^2 = S_{AOD} \times S_{BOC} = 100$.

Ответ. 45 см^2 .

§ 13

1. 1. 50 см^2 . 2. $90^\circ, 60^\circ, 30^\circ$.

2. 1. 162 см^2 . 2. $90^\circ, 45^\circ, 45^\circ$.

3. 1. 216 см^2 . 2. 105° .

4. 1. 99 см^2 . 2. 75° .

5. 1. Высота трапеции равна $\sqrt{26^2 - 24^2} = 10 \text{ см}$. Так как диагонали трапеции взаимно перпендикулярны, то полусумма ее оснований равна высоте (см. задачу 6 (1) из § 4.) Значит, площадь трапеции равна 100 см^2 .

2. Пусть в трапеции $ABCD$ $AB = 9 \text{ см}$, $BC = 15 \text{ см}$, $DC = 12 \text{ см}$, $AD = 30 \text{ см}$. Проведем прямую $BE \parallel CD$ ($E \in AD$). Тогда можно доказать, что $EB = CD = 12 \text{ см}$. $ED = BC$, $AE = 15 \text{ см}$. Тогда по теореме, обратной теореме Пифагора, устанавливаем, что $\angle ABE = 90^\circ$. Значит, искомый угол прямой.

6. 1. Задача решается с использованием задачи 5 (1) из § 4. Площадь трапеции равна 300 см^2 .

2. Пусть в трапеции $ABCD$ $AD = 10 \text{ см}$, $BC = 3 \text{ см}$, $AC = 5 \text{ см}$, $BD = 12 \text{ см}$. Через вершину C проведем прямую, пересекающую луч AD в точке E и параллельную BD . Тогда можно доказать, что $CE = BD$, $DE = BC$. По теореме, обратной теореме Пифагора, устанавливаем, что $\angle ACE = 90^\circ$. Значит, искомый угол также прямой.

7. 1. $BC^2 - CH^2 = AB^2 - AH^2$, $BC^2 = CH^2 + AB^2 - AH^2 = AC^2 - AH^2 + AB^2 - AH^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \times AH$.

2. Пусть в треугольнике MEP большая сторона равна c , $ME = a$, $EP = b$. Докажем методом от противного, что треугольник MEP тупоугольный. В самом деле, треугольник MEP не может быть прямоугольным, так как это противоречило бы обратной теореме Пифагора. Если предположить, что треугольник MEP остроугольный, то по утверждению задачи 1 данного варианта $MP^2 < ME^2 + EP^2$, что противоречит тому, что $c^2 > a^2 + b^2$. Значит, треугольник MEP тупоугольный.

8. Задачи решаются аналогично задачам 7 (1, 2).

§ 14

1. 1. $9,5 \text{ см}^2$. 2. 114 см^2 .

2. 1. 6 см^2 . 2. 126 см^2 .

3. 1. Следует доказать, что треугольники DEC , ABE , APE прямоугольные. Площадь многоугольника равна 42 см^2 . 2. $5\sqrt{10} \text{ см}^2$.

4. 1. Задача решается аналогично задаче 1 варианта 3. Ответ. 42 см^2 .

2. $4,8 \text{ см}$.

5. 1. Третий угол треугольника равен 30° . Пусть меньшая высота равна x . Можно доказать, что большая сторона равна $x(\sqrt{3} + 1)$. Составляем уравнение $\frac{x^2(\sqrt{3}+1)}{2} = \sqrt{3} + 1$, откуда $x = \sqrt{2}$.

2. Следует доказать, что острый угол ромба равен 60° . Ответ. $2\sqrt{3} \text{ см}^2$.

6. 1. Задача решается аналогично задаче 5 (1). Ответ. $5(\sqrt{3} - 1)$.

2. Пусть дан параллелограмм $ABCD$ с площадью, равной 78 см^2 . BE и BK — высоты, проведенные к сторонам AD и BC соответственно, $BE = 6 \text{ см}$, $BK = 7,8 \text{ см}$. Используя формулу площади параллелограмма, находим $AD = 13 \text{ см}$, $CD = 10 \text{ см}$. Из треугольника ABE $AE = 8 \text{ см}$, тогда $ED = 5 \text{ см}$, и из треугольника BED получаем $BD = \sqrt{61} \text{ см}$.

7. 1. На рисунке 63 изображена трапеция $MPKE$, о которой говорится в условии задачи. Так как O — точка пересечения медиан треугольника APK , то $PT = AT$ и $\triangle MTA = \triangle PTK$. Следовательно, $PK = a$. Далее площадь равнобедренной трапеции $MPKE$ легко найти. Ответ. $\frac{3}{4}a^2\sqrt{3}$.

2. Пусть в треугольнике ABC $AB = BC$, M и K — середины сторон AC и BC соответственно, $BM = MK = 12 \text{ см}$. Проведем $KP \perp BM$, $KE \perp AC$, $P \in BM$, $E \in MC$. Тогда P — середина BM , т. е. $BK = KM$. Следовательно, $\angle MBK = 60^\circ$. Площадь треугольника ABC равна $144\sqrt{3} \text{ см}^2$.

8. 1. На рисунке 64 изображена трапеция, о которой говорится в условии задачи. Так как O — точка пересечения высот треуголь-

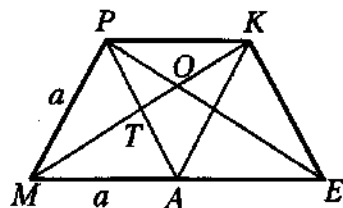


Рис. 63

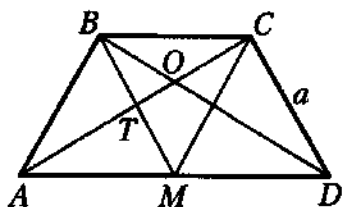


Рис. 64

$\angle BAK = 60^\circ$. Тогда $\angle AKB = 30^\circ$, $\angle KAD = 15^\circ$. Пусть $BA = x$. Получим $AK = KD = 2x$, $BK = x\sqrt{3}$, $BD = x(\sqrt{3} + 2)$, $AD^2 = AB^2 + BD^2$. Тогда $x^2 + x^2(\sqrt{3} + 2)^2 = 144$, откуда $x^2 = \frac{36}{2+\sqrt{3}}$. Площадь параллелограмма равна $AB \times BD = x^2(\sqrt{3} + 2)$, или 36 см^2 .

ника BMC , то $AC \perp BM$. Значит, $AT = TC$. Далее, $\triangle ATM = \triangle BTC$. Следовательно, $AM = a = MD$. Площадь равнобедренной трапеции $ABCD$ будет равна $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

2. Пусть в параллелограмме $ABCD$ $\angle ABD = 90^\circ$, $\angle ADB = 15^\circ$, $AD = 12 \text{ см}$. Отметим на диагонали BD точку K так, что

§ 15

1. 1. 6,25 см. 2. 10 см, $4\frac{2}{7}$ см, $5\frac{5}{7}$ см.

2. 1. 5 дм. 2. 12 см, $6\frac{2}{3}$ см, $5\frac{1}{3}$ см.

3. 1. 60 см. 2. 62,4 см.

4. 1. 30 см. 2. 90 мм.

5. 2. 84 мм. Докажите, что CE — биссектриса угла C . 6. 2. 36 дм. Докажите, что BP — биссектриса угла B .

7. 1. Пусть BD_1 — биссектриса угла ABC . Тогда $\frac{AD_1}{D_1C} = \frac{AB}{BC}$. По условию $\frac{AD}{DC} > \frac{AB}{BC}$. Отсюда $\frac{AD}{DC} > \frac{AD_1}{D_1C}$, $\frac{AD}{DC} + 1 > \frac{AD_1}{D_1C} + 1$, $\frac{AC}{DC} > \frac{AC}{D_1C}$. Тогда $DC < D_1C$ и $\angle ABD > \angle DBC$.

2. 16 см. Продолжим сторону BC за точку B на отрезок BD , равный AB . Пусть биссектриса внешнего угла при вершине B пересекает продолжение стороны AC в точке E . Легко доказать, что $AE = DE$ и что EB — биссектриса угла DEC . Тогда $\frac{BC}{DB} = \frac{EA+AC}{DE}$. Отсюда можно получить $AE = 16 \text{ см}$.

8. 1. Если предположить, что $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$, то тогда можно доказать, что BD — биссектриса угла ABC . Если же $\frac{AD}{DC} < \frac{AB}{BC}$, то $\angle ABD < \angle DBC$ (см. задачу 1 варианта 7 § 15). В том и другом случае мы получаем результат, который противоречит условию. Поэтому $\frac{AD}{DC} > \frac{AB}{BC}$.

2. $87\frac{3}{11}$ см (см. задачу 7 (2)).

§ 16

1. 1. 30. 2. 2,5 см.

2. 1. $\angle T = 20^\circ$, $\angle K = 40^\circ$, $\angle P = \angle M = 120^\circ$. 2. 50 см^2 .

3. 1. 15. 2. 80 см^2 , 180 см^2 .

4. 1. $5\frac{5}{7}$ см. 2. 65 дм, 52 дм.
 5. 1. 6 см. 2. 24 см^2 .
 6. 1. 46 см. 2. 32 см^2 .
 7. $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$. Нужно исключить случаи: 1. $\angle ABC \neq 90^\circ$ и $BK \perp AC$.
 2. $\angle BKC$ тупой (или острый). 3. $BK \perp AC$ и $\angle ABK = \angle KBC$.
 Во всех этих случаях треугольники ABK и KBC не могут быть подобны. Остается единственно возможный вариант, когда $\angle ABC = 90^\circ$ и $BK \perp AC$.
 Так как $\frac{S_{ABK}}{S_{BKC}} = \frac{1}{3}$, то $\frac{AK}{KC} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Из подобия треугольников ABK и KBC следует, что $\frac{AK}{KB} = \frac{KB}{KC}$. Так как $AK = \frac{KC}{\sqrt{3}}$, то $KC = BK\sqrt{3}$. Из треугольника KBC следует, что $BC^2 = BK^2 + 3BK^2$, т. е. $\frac{BK}{BC} = \frac{1}{2}$. Отсюда $\angle BCK = 30^\circ$.
 8. 40 см^2 (см. задачу 7 (7)).

§ 17

1. 2. $AB = 2,2$, $BC = 1,4$, $A_1C_1 = 4,4$.
 2. 2. $BC = 4,8$, $DF = 1,6$, $DE = 1,1$.
 3. 2. 1,2 см, 3,6 см.
 4. 2. 8 см, 12 см.
 5. 2. Необходимо продолжить AK до пересечения с продолжением BC в точке E и доказать, что $ABED$ — параллелограмм.
 6. 2. Необходимо продолжить AM до пересечения с продолжением BC в точке E и доказать, что $ABED$ — ромб.
 7. 1. Продолжим отрезок AC за точку A на отрезок AD , равный AB . Очевидно, что $\angle BDC = \angle ABC$. Тогда $\triangle BDC \sim \triangle ABC$ и $\frac{CD}{BC} = \frac{BC}{AC}$; $BC^2 = CD \times AC$, $a^2 = (b+c)b$, т. е. $a^2 = bc + b^2$.
 2. 48. $S_{ADE} = S_{CDE}$. Отсюда следует, что $DE \parallel AC$. Так как $S_{ADO} = 8$, а $S_{DOE} = 4$, то $\frac{AO}{OC} = \frac{2}{1}$, $\triangle DOE \sim \triangle AOC$. Коэффициент подобия $k = \frac{1}{2}$. Тогда $S_{AOC} = 16$ и $S_{ADEC} = 36$; $DE = \frac{1}{2}AC$ и $\triangle DBE \sim \triangle ABC$. Тогда $S_{ADEC} = \frac{3}{4}S_{ABC}$. Отсюда $S_{ABC} = 48$.
 8. 1. Через вершину A проведем прямую, параллельную BC и пересекающую продолжение CE в точке F ; $\triangle AEF \sim \triangle CEB$. Отсюда $\frac{AF}{BC} = \frac{AE}{EB} = \frac{EF}{CE} = \frac{1}{2}$, так как по условию $AE : EB = 1 : 2$; $AF = \frac{a}{2}$. Из прямоугольного треугольника CAF следует, что $CF = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 + a^2}$; $CE = \frac{2}{3}CF = \frac{\sqrt{4b^2 + a^2}}{3}$.
 2. 24 (см. задачу 7 (2)).

§ 18

1. 2. Прямые AB и DE параллельны.

2. 2. Прямые BC и DF параллельны.

5. 1. Необходимо доказать подобие треугольников ABC и ACD .

2. Так как $\angle CAD = \angle C_1A_1D_1$ и $\angle ACD = \angle A_1C_1D_1$, то $\triangle ADC \sim \triangle A_1D_1C_1$. Отсюда $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AD}{A_1D_1}$ (1). Так как $\angle ADB = \angle A_1D_1B_1$ и $\angle BAD = \angle B_1A_1D_1$, то $\triangle ABD \sim \triangle A_1B_1D_1$. Отсюда $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AD}{A_1D_1}$ (2). Из равенств (1) и (2) следует, что $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$. Кроме того, $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$, а поэтому $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

6. 1. Необходимо доказать подобие треугольников BDC и ABC .

2. Так как $\angle AOD = \angle A_1O_1D_1$ и $\angle ADO = \angle A_1D_1O_1$, то $\triangle AOD \sim \triangle A_1O_1D_1$. Отсюда $\frac{AO}{A_1O_1} = \frac{AD}{A_1D_1}$, и так как O и O_1 — середины AC и A_1C_1 , то $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AD}{A_1D_1}$ (1). Так как $\angle ABO = \angle A_1B_1O_1$ и $\angle ADO = \angle A_1D_1O_1$, то $\triangle ADB \sim \triangle A_1B_1D_1$ и $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AD}{A_1D_1}$ (2). Из равенств (1) и (2) следует, что $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1}$. Легко доказать, что $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$. Отсюда $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

7. 2. Продолжим сторону AC за точку A на отрезок AD , равный AB . По условию $a^2 = b(c + b)$, т. е. $BC^2 = AC \times DC$, или $\frac{BC}{AC} = \frac{DC}{BC}$; $\angle BCA$ у треугольников ABC и DBC общий, а потому $\triangle ABC \sim \triangle DBC$. Отсюда легко доказать, что $\angle A = 2\angle B$.

8. 1. $\triangle ADB \sim \triangle BEC$. Из этого следует, что $\frac{AD}{BC} = \frac{DB}{BE}$. Но $AB = BC$, поэтому $\frac{AD}{AB} = \frac{DB}{BE}$. Легко доказать, что $\angle DBE = \angle DAB$. Тогда $\triangle ADB \sim \triangle BDE$ и $\angle BDE = \angle ADB$.

2. 0,5. Необходимо доказать, что треугольники AMP и KCT подобны. Отсюда следует, что $KT \parallel MP$ и $MKTP$ — трапеция. Из подобия треугольников MEP и KET имеем $ME : ET = 1 : 2$.

§ 19

1. 1. 28 см, $\angle KOA = \angle BCA$. 2. 8 см.

2. 2. 27 см.

3. 2. 36.

4. 2. 108.

5. 2. 60 см².

6. 2. 0,8 см.

7. 1. Соединим отрезком прямой точки E и M . Пусть M_1 — середина CE . Тогда MM_1 — медиана треугольника EMC . Так как $MM_1 \parallel AE$, то $MM_1 \perp CE$. В таком случае $\triangle EMC$ равнобедренный и $\angle EMM_1 = \angle M_1MC$. Обозначим

точку пересечения MM_1 со стороной BC буквой F . Тогда $MFCD$ — ромб и $\angle M_1MC = \angle CMD$. Кроме того, $\angle AEM = \angle EMM_1$. Отсюда следует, что $\angle EMD = 3\angle AEM$. 2. 72.

8. 1. Пусть AE пересекает прямую BC в точке P , а DF — в точке T . Треугольник PBA равнобедренный ($PB = BA$) и $BE \perp AE$. Отсюда E — середина AP . Аналогично F — середина DT . Легко доказать, что $EF \parallel PT$. Пусть EF пересекает AB в точке M , а CD — в точке N . Имеем $EM = NF = \frac{1}{2}a$, $MN = BC = a$. Поэтому $EF = 2a$. 2. 12 см.

§ 20

1. 1. $\frac{1}{4}$. 2. 90 см².

2. 1. $\frac{4}{9}$. 2. 54 см².

3. 1. 200 см². 2. $4\frac{2}{13}$.

4. 1. 156 см². 2. $4\sqrt{13} + 8$.

5. 1. 30°, 60°. 2. 75 см². Нужно учесть, что $\frac{S_{ABE}}{S_{BED}} = \frac{9}{16}$ и $\frac{S_{BCD}}{S_{ABD}} = \frac{1}{2}$.

6. 1. 60°, 120°, 90°, 90°. 2. $64\sqrt{3}$ см².

7. 1. 150 см². Через вершину C провести прямую, параллельную BD , до пересечения с продолжением AD в точке M и рассмотреть прямоугольный треугольник ACM .

2. 30°. Необходимо доказать, что ABM — прямоугольный треугольник.

8. 1. $10\sqrt{6}$ см (см. указания к задаче 7 (1)).

2. 60°, 120°, 60°, 120°.

§ 21

5. 2. Найти точку M пересечения прямых A_1A и B_1B . Прямые MC и MD пересекают прямую l соответственно в точках C_1 и D_1 . Легко доказать, что отрезок C_1D_1 искомым.

6. Найти точку M пересечения прямых A_1D и B_1C . Прямые AM и BM пересекают прямую b соответственно в точках D_1 и C_1 . Легко доказать, что отрезок C_1D_1 искомым.

7. 1. Отрезок, равный периметру, разделить в отношении $2 : 3 : \sqrt{13}$ и построить треугольник по трем сторонам.

8. 1. Отрезок, равный периметру, разделить в отношении $4 : \sqrt{5} : \sqrt{5}$ и построить треугольник по трем сторонам.

§ 22

1. 1. $\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{3}$. 2. 60° .

2. 1. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{\sqrt{6}}{2}$. 2. 60° .

3. 1. $\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{3}{4}$. 2. $30^\circ, 60^\circ$.

4. 1. $\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{3}$. 2. $45^\circ, 135^\circ$.

5. 1. $60^\circ, 30^\circ, 90^\circ$. 2. $\frac{24}{5}, \frac{7}{25}, \frac{24}{7}$.

6. 1. $60^\circ, 30^\circ, 90^\circ$. 2. $\frac{24}{25}, \frac{7}{25}, \frac{24}{7}$.

7. 1. Пусть α — искомый угол. По условию $\sin \alpha = 2 \cos \alpha$. Отсюда $\operatorname{tg} \alpha = 2$. Поэтому необходимо построить прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$), у которого $\frac{BC}{AC} = \frac{2}{1}$. Тогда $\angle A$ будет искомым.

2. $\frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$. Рассмотрим равнобедренный прямоугольный треугольник ABD ($\angle ADB = 90^\circ$) и прямоугольный треугольник BDC ($\angle BDC = 90^\circ$) с углом DBC , равным 30° . Точки A, D, C лежат на одной прямой ($A - D - C$). Очевидно, что $\angle ABC = 75^\circ$. Пусть $AD = BD = 1$. Тогда

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \times 1 \times \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{1}{6}(3 + \sqrt{3}). \quad (1)$$

С другой стороны,

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6}}{3} \sin 75^\circ. \quad (2)$$

Из равенств (1) и (2) следует ответ $\frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$.

8. 1. См. решение задачи 7 (1).

2. $\frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$) с углом A , равным 30° . Пусть AD — биссектриса треугольника; $\angle DAC = 15^\circ$. Пусть $BC = 1$, тогда $AB = 2$ и $AC = \sqrt{3}$. Используя свойства биссектрисы треугольника, можно доказать, что $CD = 2\sqrt{3} - 3$. Из треугольника ACD имеем $AD = \sqrt{24 - 12\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \times \sqrt{2 - \sqrt{3}}$, $\sin 15^\circ = \frac{DC}{AD} = \frac{DC}{AD} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

§ 23

1. 1. $S = ab \sin \alpha$; 5,54. 2. $\frac{5\sqrt{6}}{3}$.

2. 1. $S = \frac{h^2}{\sin \alpha}$; 376,16. 2. $3\sqrt{6}$.

3. 1. $S = \frac{d^2}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$; 123,85. 2. $82^\circ 23', 7^\circ 37'$.

4. 1. $S = 3a^2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$; 82,07. 2. $63^\circ 41'$.

5. 1. $h = \sqrt{2S \sin \alpha \cos \alpha}$; 6,44. 2. $27^\circ 5'$.

6. 1. $h = \sqrt{S \operatorname{tg} \alpha}$; 10,16. 2. $28^\circ 13'$.

7. 1. $\frac{d \sin \alpha}{\sin \beta}$; 11,36. 2. $47^\circ 8'$.

8. 1. $6a^2 \sin \alpha \cos \alpha$; 886,24.

Через вершину B проведем прямую, параллельную CD , до пересечения с AD в точке F . Треугольник ABF прямоугольный, так как $\angle ABF = 90^\circ$. Исходя из условия E — середина AF , а потому $AF = 2a$; $AB = 2a \cos \alpha$. Высота трапеции $h = AB \sin \alpha = 2a \cos \alpha$. Тогда площадь трапеции $S = 6a^2 \sin \alpha \cos \alpha$.

2. $\frac{\sqrt{1-m^2}}{1+m}$. Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC с углом C при вершине, равным α , причем $\cos \alpha = m$, $BE \perp AC$. Обозначим $\angle EBA = x$. Пусть $BE = h$. Из треугольника CEB имеем $BC = AC = \frac{h}{\sin \alpha}$; $CE = \frac{h}{\operatorname{tg} \alpha}$. Из треугольника AEB $AE = h \operatorname{tg} x$. $AC = CE + EA$; $\frac{h}{\sin \alpha} = \frac{h}{\operatorname{tg} \alpha} + h \operatorname{tg} x$. Отсюда $\operatorname{tg} x = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1 - m}{\sqrt{1 - m^2}} = \frac{\sqrt{1 - m^2}}{1 + m}$.

§ 24

1. 1. $\frac{288}{49}$. 2. $\frac{4}{3}$.

2. 1. $\frac{121}{4}$. 2. $\frac{4}{3}$.

3. 1. $14 \frac{34}{121}$. 2. $\frac{4}{5}$.

4. 1. $47 \frac{1}{49} \text{ см}^2$. 2. $\frac{15}{17}$.

5. 1. $24(7 - 4\sqrt{3})$.

2. Из прямоугольного треугольника AOB следует, что $FB = \frac{BO^2}{AB}$ (1).

Из прямоугольного треугольника BOC следует, что $BD = \frac{BO^2}{BC}$ (2).

Из равенств (1) и (2) имеем $\frac{FB}{BD} = \frac{BC}{AB}$. Кроме того, в треугольниках DFB и ACB угол ABC общий. Отсюда следует, что $\triangle ABC \sim \triangle DFB$, а потому $\angle ACB = \angle DFB$.

6. 1. $6a^2(2 - \sqrt{3})^2$.

2. Из прямоугольного треугольника ADB следует, что $EB = \frac{BD^2}{AB}$ (1)

Из прямоугольного треугольника BDC следует, что $FB = \frac{BD^2}{BC}$ (2). Из ра-

венств (1) и (2) имеем $\frac{EB}{FB} = \frac{BC}{BA}$. В треугольниках EBF и ABC угол ABC общий. Отсюда следует, что $\triangle EBF \sim \triangle ABC$.

7. 1. $\frac{ab^2\sqrt{3}}{4(b-2a)}$.

2. Через точку M проведем прямую, параллельную AC и пересекающую стороны AB и BC соответственно в точках K и L . Так как BD — медиана, то легко доказать, что $KM = ML$. Из подобия треугольников KFM и AFC следует, что $\frac{FM}{FC} = \frac{KM}{AC}$. Из подобия треугольников MEL и AEC следует, что $\frac{EM}{AE} = \frac{ML}{AC}$, но $KM = ML$. Поэтому $\frac{FM}{FC} = \frac{EM}{AE}$, т. е. $\frac{FM}{MC} = \frac{EM}{MA}$. Тогда, так как $\angle FME = \angle AMC$, $\triangle FME \sim \triangle AMC$. Отсюда $\angle EFM = \angle MCA$. Поэтому $EF \parallel AC$.

8. 1. $\frac{3ah^2}{2(2h-a\sqrt{3})}$. 2. $\frac{ab}{m}$. Пусть в треугольнике ABC высоты BD и AE пересекаются в точке O ; $\triangle BDC \sim \triangle AEC$. Отсюда $\frac{BD}{AE} = \frac{DC}{EC}$ (1); $\triangle AEC \sim \triangle AOD$. Отсюда $\frac{EC}{OD} = \frac{AE}{AD}$ (2). Из равенств (1) и (2) следует, что $BD = \frac{AD \cdot DC}{OD} = \frac{ab}{m}$.

§ 25

1. 1. а) $R = 5$; б) $R < 5$; в) $R > 5$. 2. 12.

2. 1. а) $R = 5$; б) $R < 5$; в) $R > 5$. 2. 17.

3. 1. Прямая DE является касательной к окружности. 2. 35 см.

4. 1. Окружность касается прямой AB . 2. 13,44.

5. 1. Прямая BD касается этой окружности. 2. $2r \cos \frac{\alpha}{2}$.

6. 1. Прямая AB касается этой окружности. 2. $\frac{m}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}$.

7. 2. Пусть O — центр окружности. Необходимо доказать, что $\triangle COD$ прямоугольный. Радиус окружности OK , проведенный в точку касания CD с окружностью, является высотой треугольника COD . Поэтому $OK^2 = CK \cdot KD$, но $AC = CK$ и $DB = KD$, а потому $OK^2 = AC \cdot DB$.

8. 2. $\frac{3r\sqrt{3}}{2}$.

§ 26

1. $3\sqrt{3}$ см. 2. 100° .

2. 1. 30° . 2. 20° .

3. 1. 10 см. 2. 6 см.

4. 1. 3. 2. 288.

5. 2. 5 см.

6. 2. 220° , 80° , 60° .

7. 1. Пусть угол ABC вписан в окружность и BD — его биссектриса (D лежит на окружности). Хорда DE параллельна AB . Нужно доказать, что $DE = BC$. Так как $DE \parallel AB$ и BD — биссектриса угла ABC , то $\angle ABD = \angle BDE = \angle DBC$; $\angle DCB = \angle DEB$ как вписанный, опирающийся на одну и ту же дугу; $\triangle DCB = \triangle DEB$ по стороне и двум углам. Отсюда $DE = BC$.

2. $\angle 1$ измеряется половиной дуги KA (рис. 65), $\cup KA = \cup KF + \cup FA = \cup KF + 90^\circ$; $\angle 2$ измеряется полусуммой дуг KF и EA , но $\cup EA = 90^\circ$. Отсюда $\angle 1 = \angle 2$. Поэтому $\triangle KNM$ равнобедренный и $NK = NM$.

8. 1. Так $BC \parallel AD$, то $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 66); $\angle 3$ измеряется половиной дуги BD ; $\angle 4$ измеряется половиной этой же дуги, поэтому $\angle 3 = \angle 4$. Тогда $\triangle ABD \sim \triangle BCD$ по двум углам. Дальнейшее решение очевидно.

2. 16 см. Необходимо доказать, что $\triangle AED$ прямоугольный.

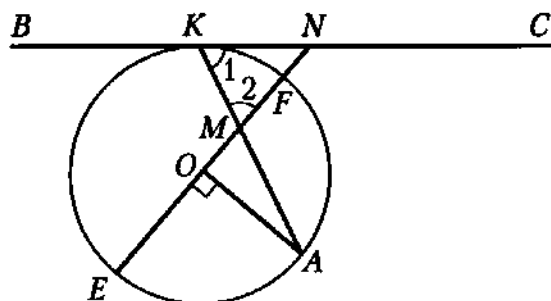


Рис. 65

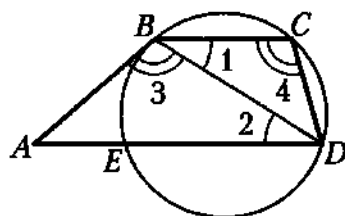


Рис. 66

§ 27

1. 1. 16 см. 2. $\sqrt{15}$.

2. 1. 20. 2. 6,5.

3. 1. 5.

4. 1. $4\sqrt{5}$.

5. 1. 8 см. Докажите, что точка E — середина хорды BC.

6. 1. 10 см.

7. 1. $\frac{1}{3}$. Имеем $BC = 2r$, $AB = r$, $CD = \frac{3}{4} \times 2r = \frac{3}{2}r$. Необходимо учесть, что $O_1P \cdot O_1Q = O_1A \cdot O_1D$. Так как $O_1Q = 2R - r$, $O_1P = r$, $O_1A = r + r = 2r$, $O_1D = r + \frac{3}{2}r = \frac{5}{2}r$, запишем $(2r - r) \times r = 5r^2$. Отсюда $\frac{r}{R} = \frac{1}{3}$.

2. Воспользуйтесь теоремой о касательной и секущей.

8. 1. 12; 1.

2. Необходимо построить окружность, проходящую через точки B и C и касающуюся AB в точке B. Эта окружность пересечет сторону AC в искомой точке D.

§ 28

1. 1. $2\sqrt{R^2 - r^2}$.

2. 1. $2r\sqrt{2}$.

3. 1. 8 см.

4. 1. 20.

5. 1. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. Пусть O и O_1 — центры соответственно большей и меньшей окружностей. Необходимо доказать, что $\angle AOC = 60^\circ$, а $\angle BO_1C = 120^\circ$. Кроме того, треугольник ACB прямоугольный.

2. Проведем диаметр AD ; $\triangle CDA$ прямоугольный; $\angle CDA = \angle CBA$ как опирающиеся на одну и ту же дугу AC . Из этого вытекает, что $\angle OAC = \angle BAN$.

6. 1. $\sqrt{63}$. Пусть O и O_1 — центры соответственно большей и меньшей окружностей; $OO_1 = 3$. Через точку O проведем прямую, параллельную AB . Обозначим точку касания AB с меньшей окружностью через K ; O_1K пересекает проведенную прямую в точке P . Из треугольника OO_1P следует, что $PO_1 = \frac{3}{2}$, так как по условию $\angle POO_1 = 30^\circ$; $OM \perp AB$, $OM = PK = PO_1 - KO_1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$. Из $\triangle AOM$: $AM = \sqrt{16 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{63}}{2}$, $AB = \sqrt{63}$.

2. Докажите, что $\triangle ABC \sim \triangle ABD$.

7. 1. $\frac{rd^2}{2\sqrt{d^2 - r^2}}$.

2. Пусть AC пересекает BD в точке O ; $\angle DAC = \angle BAC$ по условию, а $\angle BAC = \angle BDC$ как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу. Тогда $\triangle ADC \sim \triangle COD$ по двум углам ($\angle DCA$ общий). Отсюда следует, что $\frac{AD}{DO} = \frac{AC}{CD}$ и $AD \times BC = AC \times DO$ (1). Аналогично можно доказать, что $\triangle ABC \sim \triangle BOC$. Тогда $AB \times BC = AC \times BO$ (2). Складывая почленно равенства (1) и (2), можно получить $AC \times BD = AD \times DC + AB \times BC$.

8. 1. $\frac{a}{3}$.

2. Проведем общую касательную двух окружностей, и пусть AB пересекает эту касательную в точке C (рис. 67). Так как $CT = CM$ как отрезки касательных, проведенных из точки C к меньшей окружности, то $\angle CMT = \angle CTM$. Кроме того, $\angle CAM = \angle BMC$, $\angle AMT = \angle CTM - \angle CAM = \angle CTM - \angle BMC = \angle CMT - \angle BMC = \angle BMT$. Следовательно, MT — биссектриса $\angle AMB$.

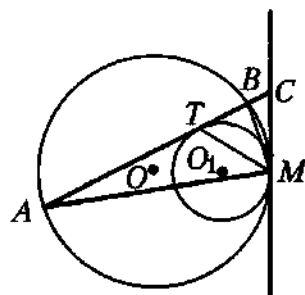


Рис. 67

§ 29

1. 2. 35.

2. 1. 12. 2. 45.

3. 1. $m \times \sin \frac{\alpha}{2}$. 2. 2,4.

4. 1. 6.

5. 1. $\frac{\alpha}{2}$. 2. 30° .

6. 1. 25. 2. $90^\circ + \alpha$.

7. 1. Строим вспомогательный прямоугольный треугольник с некоторым катетом, равным a , и построением находим отрезок, соединяющий точки пересечения биссектрис и медиан. Пусть этот отрезок имеет длину, равную b . Все равнобедренные прямоугольные треугольники подобны. Обозначим сторону искомого треугольника через x . Тогда $\frac{a}{x} = \frac{b}{m}$. Построением находим отрезок x . Дальнейшее построение очевидно. 2. $\frac{11}{12}$.

8. 1. Задача решается аналогично задаче 7 (1). 2. $\frac{1}{6}$.

§ 30

1. 1. 1 см. 2. 2,5 см.

2. 1. 6 см. 2. 16 см.

3. 1. 3 см. 2. 9,6 см.

4. 1. 2 см. 2. 2 см.

5. 1. $6\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)^2$.

2. 94,08 см². Если обозначить центр вписанной окружности через O , то нужно доказать, что $\triangle AOB$ прямоугольный. Высота этого треугольника равна радиусу вписанной в трапецию окружности. Высота трапеции равна диаметру этой окружности. Кроме того, $AD + BC = AB + CD$.

6. 1. 3 см. 2. 18.

7. 1. $3(3 - \sqrt{5})$.

2. 120°. Очевидно, что $AB = BE$ и $BM = BP$ (рис. 68). Отсюда $\frac{AB}{BM} = \frac{BE}{BP}$. Тогда $\triangle MBP \sim \triangle ABE$. Из подобия треугольников следует, что $\triangle BMP$ равнобедренный и $\angle BMP = \angle BPM$; так как по условию $BM = MP$, а $\angle BPM = \angle MPB$, то $\triangle MPB$ равносторонний, а потому и подобный ему треугольник ABE равносторонний и $\angle BAE = 60^\circ$, т. е. $\angle BAD = 120^\circ$.

8. 1. $3 - \sqrt{5}$ см.

2. $MB = PD = 2$ см. Очевидно, что радиус вписанной окружности равен $\sqrt{3}$ см и $AE = AF = 3$ см (рис. 69). Исходя из свойств касательных, проведенных из одной точки к окружности, имеем $AP + PK = AE$ и $AM + MK = AF$.

Складывая эти равенства, получим, что $P_{\text{амп}} = 6$ см, а так как $MP = 2$ см, то $AP + AM = 4$ см. Пусть MT — высота $\triangle AMP$. Обозначим AM через x . Тогда $MT = \frac{x\sqrt{3}}{2}$, $AT = \frac{x}{2}$, $PT = 4 - \frac{3x}{2}$. Из $\triangle MTP$ следует, что $\frac{3x^2}{4} + 16 - 12x + \frac{9x^2}{4} = 4$. Отсюда $x = 2$. Итак, $AM = AP = 2$ см. Тогда и $MB = PD = 2$ см.

§ 31

1. 1. 27. 2. 96.

2. 1. 13 см. 2. 36 см.

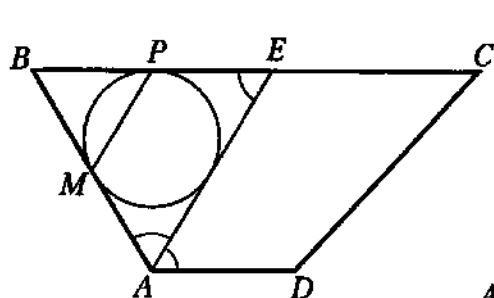


Рис. 68

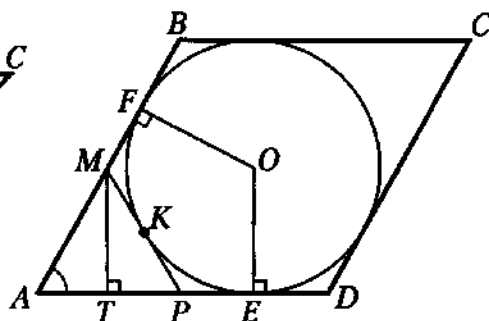


Рис. 69

3. 1. 6,25 см. 2. 40° , 50° , 50° .

4. 1. $4\sqrt{13}$ см. 2. 0,5 см.

5. 2. 5 дм.

6. 1. а. 2. $12\sqrt{3}$ см. Необходимо доказать, что AD — диаметр описанной окружности.

7. 1. На рисунке 70 точки A_1 , B_1 , C_1 симметричны точке пересечения высот H относительно сторон BC , AC , AB . Очевидно, что $\triangle AC_1B = \triangle AHB$. Отсюда $\angle AC_1B = \angle AHB$, но $\angle DHE = \angle AHB$. В четырехугольнике $EHDC$ углы HEC и HDC прямые, а потому $\angle DHE + \angle BCA = 180^\circ$. Следовательно, $\angle AC_1B + \angle BCA = 180^\circ$. Это значит, что точка C_1 лежит на окружности, описанной около треугольника ABC . Аналогичные рассуждения можно провести относительно точек A_1 и B_1 .

2. $\frac{bR}{a}$.

8. 1. На рисунке 71 H — точка пересечения высот AA_1 , BB_1 , CC_1 . Около четырехугольника AC_1HB_1 можно описать окружность; $\angle HC_1B_1 = \angle HAB_1$ как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу. Обозначим эти углы через α ; $\triangle A_1BC_1 \sim \triangle ABC$, $\angle BC_1A_1 = \angle BCA = 90^\circ - \alpha$. Тогда $\angle A_1C_1H = 90^\circ - 90^\circ + \alpha = \alpha$. Следовательно, $\angle A_1C_1H = \angle HC_1B_1$, т. е. C_1C — биссектриса $\angle A_1C_1B_1$. Аналогично можно доказать, что A_1A — биссектриса $\angle C_1A_1B_1$, а BB_1 — биссектриса $\angle C_1B_1A_1$.

2. $\frac{cR}{b}$.

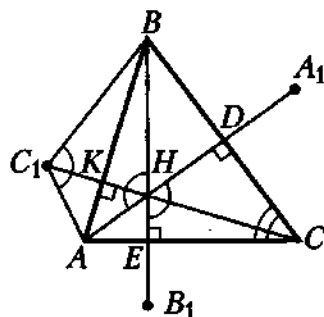


Рис. 70

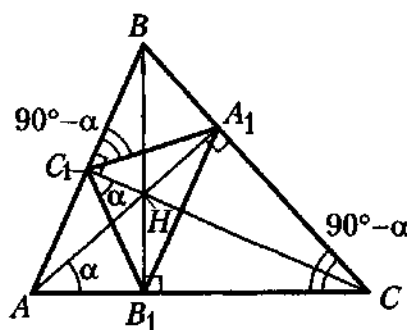


Рис. 71

§ 32

1. 1. $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\vec{a}$ и $\vec{c}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, $\vec{f}$ и $\vec{e}$. 2. $\vec{a}$ и $\vec{c}$, $\vec{f}$ и $\vec{e}$. 3. $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, $\vec{f}$ и $\vec{e}$; нельзя.
2. 1. $\vec{c}$ и $\vec{d}$, $\vec{c}$ и $\vec{e}$, $\vec{d}$ и $\vec{e}$, $\vec{a}$ и $\vec{b}$. 2. $\vec{c}$ и $\vec{d}$. 3. $\vec{c}$ и $\vec{e}$, $\vec{d}$ и $\vec{e}$, $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
3. 2. а) $\vec{c}$ и $\vec{d}$, $\vec{a}$ и $\vec{d}$, $\vec{a}$ и $\vec{c}$; б) $\vec{c}$ и $\vec{a}$; в) $\vec{d}$ и $\vec{a}$; $\vec{d}$ и $\vec{c}$; г) $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
4. 2. а) $\vec{m}$ и $\vec{n}$, $\vec{m}$ и $\vec{c}$, $\vec{n}$ и $\vec{c}$; б) $\vec{m}$ и $\vec{n}$; в) $\vec{m}$ и $\vec{c}$, $\vec{n}$ и $\vec{c}$; г) $\vec{d}$ и $\vec{c}$.
5. 1. а) $\overline{BE}$ и $\overline{EC}$, $\overline{AF}$ и $\overline{DF}$, $\overline{BE}$ и $\overline{AF}$, $\overline{BE}$ и $\overline{DF}$, $\overline{EC}$ и $\overline{AF}$, $\overline{EC}$ и $\overline{DF}$; б) $\overline{BE}$ и $\overline{EC}$, $\overline{BE}$ и $\overline{AF}$, $\overline{EC}$ и $\overline{AF}$; в) $\overline{BE}$ и $\overline{DF}$, $\overline{EC}$ и $\overline{DF}$, $\overline{AF}$ и $\overline{DF}$; г) $\overline{EC}$ и $\overline{AF}$; д) $\overline{EC}$ и $\overline{AF}$, $\overline{BE}$ и $\overline{DF}$. 2. 90° .
6. 1. а) $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$, $\overline{AB}$ и $\overline{CF}$, $\overline{DC}$ и $\overline{CF}$, $\overline{BE}$ и $\overline{CE}$, $\overline{BE}$ и $\overline{AD}$, $\overline{CE}$ и $\overline{AD}$; б) $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$, $\overline{AB}$ и $\overline{CF}$, $\overline{DC}$ и $\overline{CF}$, $\overline{BE}$ и $\overline{AD}$; в) $\overline{CE}$ и $\overline{AD}$, $\overline{CE}$ и $\overline{BE}$; г) $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$, $\overline{AB}$ и $\overline{CF}$, $\overline{CF}$ и $\overline{DC}$; д) $\overline{BE}$ и $\overline{CE}$. 2. 20 см.
7. 1. 21. Необходимо учесть $\vec{0}$.
8. 1. 21. Необходимо учесть $\vec{0}$.

§ 33

1. 2. $\vec{0}$. 5. 2. $\overline{ED}$. 6. 2. $\overline{EF}$.
8. $\overline{CB_1} = \overline{CA_1} + \overline{A_1B_1}$, $\overline{C_1B} = \overline{C_1A_1} + \overline{A_1B}$, $\overline{A_1B_1} = \overline{C_1A_1}$, $\overline{CA_1} = \overline{A_1B}$. Отсюда следует, что $\overline{CB_1} = \overline{C_1B}$.

§ 34

1. 2. $\overline{AB} - \overline{AC}$. 3. 6 см.
2. 2. $\overline{CA} - \overline{CB}$. 3. 5.
3. 2. $-\vec{c}$, $\vec{c} - \vec{a}$, $\vec{a} - \vec{c}$. 3. 6,5.
4. 2. $\vec{a} - \vec{d}$, $\vec{d} - \vec{a}$, $\vec{a}$. 3. 16.
5. 1. $\overline{AC} - \overline{DC} - \overline{BD}$. 2. $\overline{OD} + \overline{OB} - \overline{OC}$. 3. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.
6. 1. $-\overline{DA} + \overline{DC} + \overline{CB}$. 3. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.
7. 1. $\frac{4m}{3}$; $\overline{OA} + \overline{OB} - \overline{OC} = \overline{OB} + \overline{CA}$. Построение показано на рисунке 72.
8. 1. $\frac{4m}{3}$; $\overline{OA} - \overline{OB} - \overline{OC} = \overline{BA} - \overline{OC}$. От точки O откладываем вектор $\overline{OE} = \overline{BA}$ (рис. 73). Тогда $\overline{OE} - \overline{OC} = \overline{CE}$. Продолжим AA_1 , как показано на рисунке, на отрезок A_1P , равный OA_1 . Тогда $OBPC$ — параллелограмм и $PC \parallel OB \parallel AE$, $PC = OB = AE$. Отсюда следует, что $EAPC$ — параллелограмм и $|\overline{CE}| = \frac{4m}{3}$.
2. $\overline{A_1B_1} = \overline{OB_1} - \overline{OA_1} = -\overline{OB} - (-\overline{OA}) = \overline{OA} - \overline{OB} = \overline{BA}$. Отсюда следует, что $A_1B_1 = BA$ и $A_1B_1 \parallel BA$. Дальнейшее очевидно.

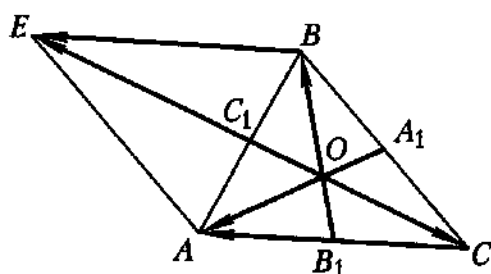


Рис. 72

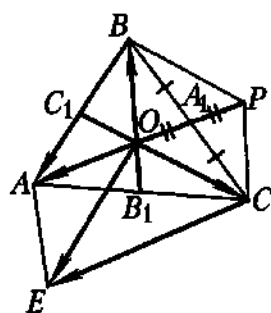


Рис. 73

§ 35

$$1. 2. \overrightarrow{OA} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}, \overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}.$$

$$2. 2. \overrightarrow{DP} = \frac{1}{2}\vec{m} + \frac{1}{2}\vec{p}, \overrightarrow{DM} = \vec{m} + \frac{1}{2}\vec{p}.$$

$$3. 2. \vec{p} + \frac{1}{5}\vec{k}, \frac{4}{5}\vec{k} - \vec{p}.$$

$$4. 2. \vec{p} + \frac{1}{6}\vec{a}, \frac{5}{6}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{p}.$$

$$5. -\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{p} + \frac{1}{2}\vec{p} = -\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{6}\vec{p}.$$

$$6. 2. \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{p}.$$

$$7. 1. \vec{0}; \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{BA_1} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB_1} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC_1} - \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} + k\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = k \times (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0}.$$

2. Пусть $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$ (рис. 74), $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{OD} = \vec{a} + \vec{c}$, $\overrightarrow{AF} = -k\overrightarrow{CD} = k\vec{c}$, $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE} = -\vec{a} = k\vec{c} + (\vec{a} + \vec{c}) = (k+1)\vec{c}$. Это значит, что $BE \parallel AF$.

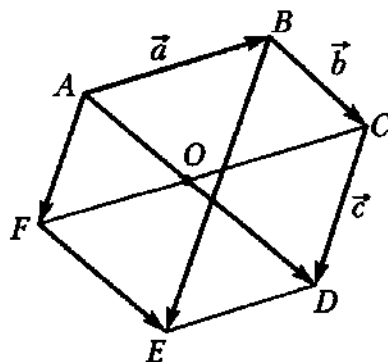


Рис. 74

8. 1. $\overrightarrow{PE} = \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{BP} = k\overrightarrow{BC} - (k-1)\overrightarrow{AB}$. Аналогично можно получить, что $\overrightarrow{MF} = k\overrightarrow{AD} - (k-1)\overrightarrow{DC}$. Так как $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, то $\overrightarrow{PE} = \overrightarrow{MF}$, а потому $PEFM$ — параллелограмм.

2. Пусть хорды AB и CD пересекаются в точке M (рис. 75); $OK \perp AB$, $OE \perp CD$, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OE}$,
 $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{OA} + 0,5\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + 0,5(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = 0,5\overrightarrow{OA} + 0,5\overrightarrow{OB}$.
 Аналогично $\overrightarrow{OE} = 0,5\overrightarrow{OC} + 0,5\overrightarrow{OD}$,
 $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OE} = 0,5(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$.

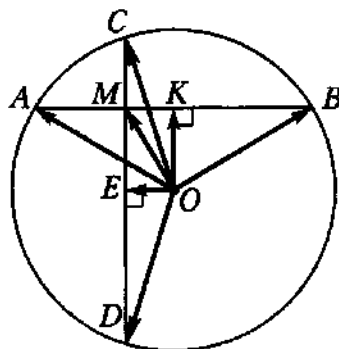


Рис. 75

§ 36

1. 1. $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{a} + \frac{1}{4}\overrightarrow{b}$. 2. $\frac{1}{3}$.

2. 1. $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{m} + \frac{1}{4}\overrightarrow{p}$. 2. $15^\circ, 165^\circ, 165^\circ$.

3. 2. $\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$.

5. 2. Докажите, что $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.

7. 1. Легко получить $\overrightarrow{OK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$.

Имеем $\overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OC}$. Отсюда $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OE}$. Это значит, что точки K, O, E лежат на одной прямой и O — середина отрезка KE .

2. Пусть медианы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке M и пусть

$$\frac{BM}{MB_1} = \frac{m}{n}; \quad \overrightarrow{AM} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB_1} + \frac{n}{m+n}\overrightarrow{AB} = \frac{m}{2(m+n)}\overrightarrow{AC} + \frac{n}{m+n}\overrightarrow{AB} \quad (1),$$

$$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AA_1} = \frac{k}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{k}{2}\overrightarrow{AB}. \quad (2)$$

Из выражений (1) и (2) следует, что $\frac{m}{2(m+n)} = \frac{k}{2}$ и $\frac{n}{m+n} = \frac{k}{2}$. Отсюда $\frac{m}{n} = \frac{2}{1}$, т. е. $\frac{BM}{MB_1} = \frac{2}{1}$. Если теперь предположить, что медианы BB_1 и CC_1

пересекаются в точке M_1 , то аналогично можно доказать, что $\frac{BM}{M_1B_1} = \frac{2}{1}$. Следовательно, точки M и M_1 совпадут. Этим и доказывается данное положение.

8. 1. $\vec{CC_1} = \vec{CB} + \vec{BB_1} + \vec{B_1C_1} = \vec{DA} + \vec{BB_1} + \vec{AD_1} = \vec{DA} + \vec{AD_1} + \vec{BB_1} = \vec{DD_1} + \vec{BB_1}$. Отсюда $|\vec{CC_1}| \leq |\vec{DD_1}| + |\vec{BB_1}|$, т. е. $CC_1 \leq BB_1 + DD_1$.

2. $\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB} = 2\vec{OA_1} - 2\vec{OB_1} = 2\vec{B_1A_1} (*)$, $\vec{AB} = \vec{CB} - \vec{CA} = x\vec{CA_1} - y\vec{CB_1}$; $\vec{BA_1} = \vec{CA_1} - \vec{CB_1}$. Из равенства $(*)$ следует, что $x\vec{CA_1} - y\vec{CB_1} = 2\vec{CA_1} - 2\vec{CB_1}$; $(x-2)\vec{CA_1} = (y-2)\vec{CB_1}$. Отсюда $x=2$ и $y=2$. Это значит, что A_1 и B_1 — середины сторон BC и AC , т. е. AA_1 и BB_1 — медианы.

§ 37

1. 12 см и 8 см. 2. 14 см, 6 см, 10 см.
1. 10 см и 20 см. 2. 22 см, 16 см.
1. 3 см. 2. 5 см, 10 см.
1. 5 см. 2. 13 см, 9 см.
1. 2 см.
1. 8 см.
1. 50 см. Необходимо доказать, что KL параллельна прямым BC и AD и находится на равном расстоянии от них. Пусть KL пересекает AB в точке P , а CD — в точке T . Тогда PT — средняя линия трапеции. Треугольники BKA и CLD прямоугольные, и $AB = 2 \times KP$, $CD = 2 \times LT$. Отсюда периметр трапеции равен 50 см. 2. 4 см и 16 см.

8. 1. 18 см и 6 см. 2. 2. Из прямоугольного треугольника DKO (рис. 76) находим $DK = R\sqrt{3}$ и $DO = 2R$, где R — радиус окружности. Из треугольника CPD имеем $DC = 2R$, $KC = 2R - R\sqrt{3}$. Необходимо учесть, что $CM = CK = 2R - R\sqrt{3}$. $AD = 3R$; $BC = R + 2R - R\sqrt{3} = 3R - R\sqrt{3}$. Так как средняя линия трапеции равна $6 - \sqrt{3}$, то $\frac{3R + 3R - R\sqrt{3}}{2} = 6 - \sqrt{3}$. Отсюда $R = 2$.

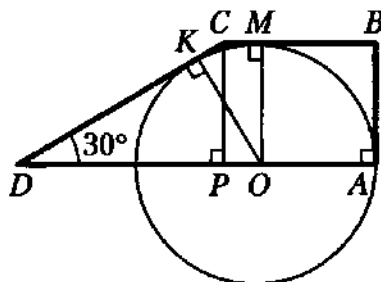


Рис. 76

§ 38

- 6) 4 см²; 12 см.
- 6) 6,1 см, 5,1 см, 4,3 см, 13,9 см².

3. 6) 20 см, 20 см².

4. 6) 94,4 см².

5. а) Легко доказать, что $MB = KD = 2$ см и $MB \parallel KD$. Значит, $MBKD$ — параллелограмм. Далее проведем высоту ромба DE к стороне AB . Тогда из треугольника DBE $DE^2 = (2\sqrt{5})^2 - BE^2$, а из треугольника DAE $DE^2 = 5^2 - (5 - BE)^2$. Если точка E не попадает на отрезок AB , то $DE^2 = 5^2 - (BE - 5)^2 = 25 - (5 - BE)^2$, т. е. $20 - BE^2 = 25 - (5 - BE)^2$, откуда $BE = 2$ см. Значит, точки E и M совпадают и, следовательно, $\angle BMD = 90^\circ$, т. е. $MBKD$ — прямоугольник, б) $DM = DE = 4$. Значит, периметр прямоугольника равен 12 см, а площадь 8 см².

6. 1. $48^\circ 35'$. 2. 12 см.

7. 1. 12,9 см². Можно доказать, что треугольники ABC и ADC подобны, причем $\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{AD}$, т. е. $AC^2 = BC \times AD$, откуда $AC = 4$. Высота CE трапеции находится из прямоугольного треугольника CAE .

2. Пусть угол ABC равен x , тогда $\angle MCH = 180^\circ - x$, $\angle MAH = x$, так как сумма углов четырехугольника $AMCH$ равна 360° , то $\angle MAH = \angle ABC$. Известно также, что две высоты параллелограмма обратно пропорциональны сторонам параллелограмма, на которые они опущены. Тогда $\frac{AM}{CD} = \frac{AH}{BC}$ или $\frac{AM}{AB} = \frac{AH}{BC}$. Следовательно, треугольники MAH и ABC подобны по двум сторонам и углу между ними. Их коэффициент подобия равен $MH : AC = 3 : 4$. Тогда искомое отношение равно $9 : 16$.

8. 1. 15,3 см². 2. 4 : 9. Задача решается аналогично задаче 7 (2).

§ 39

1. 1. 60° . 2. 6 см.

2. 1. 90° . 2. 3 дм, 4 дм.

3. 1. 90° . 2. $3\sqrt{3}$ см².

4. 1. 45° . 2. 54 см².

5. 1. 60° . 2. Внутри трапеции. Пусть $ABCD$ — данная трапеция, в которой $AD = 24$ см, $BC = 10$ см, высота BE равна 17 см. Окружность, описанная около трапеции, будет также описана около треугольника ABD . Можно доказать, что $AE = 7$ см, $ED = 17$ см. Тогда угол DBE равен 45° . Отложим на луче EA от точки E отрезок EK , равный 17 см. Тогда $\angle KBE = 45^\circ$, а $\angle ABE = 45^\circ$. Следовательно, $\angle ABD < 90^\circ$. Таким образом, очевидно, что треугольник ABD является остроугольным. Значит, центр окружности, описанной около него, лежит внутри этого треугольника.

6. 1. 60° .

2. Нет, не могут. Пусть $BD = x$, тогда из прямоугольных треугольников ABD и BCD находим $AB = 0,5x$, $AD = 0,5\sqrt{3}x$, $BC = x$, $CD = x\sqrt{2}$. Если предположить, что биссектрисы всех углов четырехугольника $ABCD$ пе-

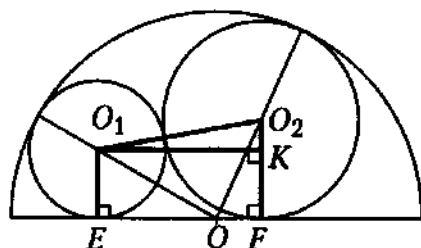


Рис. 77

пересекаются в одной точке, то существует точка, равноудаленная от всех сторон четырехугольника, т. е. в этот четырехугольник можно вписать окружность. Значит, должно выполняться условие $AB + CD = BC + AD$. Но $0,5x + x\sqrt{2} \neq x + 0,5\sqrt{3}x$. Значит, наше предположение неверно и биссектрисы в одной точке не пересекаются.

7. Примем радиус окружности с центром в точке O_1 за 1, а с центром в точке O_2 — за x (рис. 77). Тогда радиус полукруга равен 3, $OO_1 = 2$, $OO_2 = 3 - x$. Из $\triangle O_1EO$ имеем $OE = \sqrt{3}$, а из $\triangle O_2FO$ $OF = \sqrt{(3-x)^2 - x^2} = \sqrt{9-6x}$; $EF = OE + OF = \sqrt{3} + \sqrt{9-6x}$. Рассмотрим $\triangle O_1KO_2$ ($O_1K \perp O_2F$): $O_2O_1 = 1 + x$, $O_2K = x - 1$, $O_1K = EF = \sqrt{3} + \sqrt{9-6x}$.

Тогда, используя теорему Пифагора, имеем $(\sqrt{3} + \sqrt{9-6x})^2 = (x+1)^2 - (x-1)^2$.

Отсюда $3\sqrt{3} - 2x = 5x - 6$ и $25x^2 - 42x + 9 = 0$. Учитывая, что $x > \frac{6}{5}$, получаем $x = \frac{21+6\sqrt{6}}{25}$.

8. Пусть в некоторый треугольник MPN вписана окружность и пусть $PN = m$. Тогда расстояние от вершины до точек касания окружности со сторонами MP и MN равно $p - m$, где p — полупериметр $\triangle MPN$. В нашем случае, используя этот факт, имеем

$$BE = \frac{AB+BD+a}{2} - a,$$

$$BF = \frac{BC+BD+b}{2} - b,$$

$$EF = |BE - BF| = \left| \frac{AB+BD-a}{2} - \frac{BC+BD-b}{2} \right| = \frac{|b-a|}{2}.$$

8-й КЛАСС. ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К КОНТРОЛЬНЫМ ЗАДАНИЯМ

№ 1

1. 1. 120° , 60° . 3. а) Прямоугольник. 4. Сумма отмеченных углов равна сумме углов пятиугольника *АСЕКТ*, т. е. 540° .

2. 3. а) Ромб; б) 40° . 4. Сумма углов выпуклого шестиугольника равна 720° . Сумма четырех острых углов меньше 360° . Значит, сумма двух оставшихся углов больше 360° , чего быть не может.

3. 3. б) Пятиугольник. 4. Сумма отмеченных углов равна сумме углов шестиугольника *АСЕННО*.

4. 4. n -угольник может быть четырехугольником, в котором один из углов равен 1° . Докажем, что $n = 4$; n не может быть равно 3, так как сумма углов треугольника всего лишь 180° . При $n \geq 5$ сумма углов n -угольника не меньше 720° . Тогда n -й угол будет больше 361° , чего быть не может. Значит, $n = 4$.

№ 2

1. 1. 108 см^2 . 2. 75 см^2 . 3. а) $3\sqrt{3} \text{ см}^2$; б) $\frac{3\sqrt{3}}{4} \text{ см}^2$. 4. Если равны площади четырехугольников *ABDE* и *ACDE*, то равны и площади треугольников *ABD* и *ACD*. Значит, точки *B* и *C* равноудалены от прямой *AD*, откуда следует, что *BC* $\parallel$ *AD*.

2. 1. 56 см^2 . 2. 102 см^2 . 3. а) $16\sqrt{3} \text{ см}^2$; б) $4\sqrt{3} \text{ см}^2$. 4. Задача решается аналогично задаче 4 варианта 1.

3. 1. 32 см^2 . 2. 75 см^2 . 3. а) $\frac{120}{13} \text{ см}$; б) 15 см^2 . 4. Задача решается аналогично задаче 4 варианта 1.

4. 1. 150 см^2 . 2. $\frac{225}{2} \text{ см}^2$. 3. а) $\frac{246}{5} \text{ см}^2$; б) 3 см^2 .

№ 3

1. 1. б) 9:1. 2. б) 3:1. Можно доказать, что $\frac{AO}{OE} = \frac{DK}{CK}$, но $\frac{AB}{BE} = \frac{AO}{OE}$, так как луч *BO* — биссектриса угла *ABE*. Значит, $\frac{AB}{BE} = \frac{3}{2}$.

2. 1. а) 15 см; б) 1 : 9. 2. 13 : 4. 3. $\frac{3}{4}$. Задача решается аналогично задаче (1)3.

3. 1. б) 4:1. 2. б) $\frac{4}{5}$. 3. Треугольники *MBK* и *ABC* подобны по двум углам.

Значит, $\frac{BC}{AB} = \frac{MB}{BK}$, но $\frac{MB}{BK} = \frac{MO}{OK} = \frac{2}{3}$, так как BO — биссектриса треугольника MBK .

4. 1. а) 1:2; б) 1:9. 2. б) 1:5. 3. Задача решается аналогично задаче 3(3).

№ 4

1. 1. $\frac{2}{3}$, 15 мм. 3. а) 45° ; б) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ см. 4*. Пусть внешний прямоугольник имеет измерения a и b ($a > b$), а ширина рамки равна c . Тогда для подобия внешнего и внутреннего прямоугольников рамки должно выполняться одно из условий: $\frac{b-2c}{b} = \frac{a-2c}{a}$ или $\frac{b-2c}{a} = \frac{a-2c}{b}$. Можно доказать, что выполнение этих равенств невозможно.

2. 1. 20 дм, $\frac{4}{5}$. 3. а) 3 см; б) $3\sqrt{3}$ см. 4*. Пусть данный прямоугольник имеет измерения a и b . Тогда для подобия образовавшегося прямоугольника и данного должно выполняться одно из условий: $\frac{a}{2b} = \frac{a}{b}$ или $\frac{a}{2b} = \frac{b}{a}$. Последнее условие выполняется при $a = \sqrt{2}b$, что говорит о том, что образовавшийся и данный прямоугольники могут быть подобными.

3. 1. 2 дм, $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 3. а) 45° ; б) $4\sqrt{2}$. 4*. Пусть квадрат со стороной a разрезан на два прямоугольника со сторонами a , b и $a - b$, a . Для подобия этих прямоугольников должно выполняться одно из условий: $\frac{a}{b} = \frac{a}{a-b}$ или $\frac{a}{b} = \frac{a-b}{a}$. Можно доказать, что эти равенства невозможны.

4. 1. 15 см, $\frac{3}{5}$. 3. а) 12 см; б) $\frac{28}{\sqrt{3}}$ см. 4*. Пусть прямоугольник со сторонами a и b разрезан на прямоугольники со сторонами b , c и $a - c$, b . Для того чтобы образовавшиеся прямоугольники были подобны, должно выполняться одно из условий: $\frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$ или $\frac{b}{c} = \frac{a-c}{b}$. Последнее условие может выполняться, например, при $a = 2,5$, $b = 1$, $c = 2$, что говорит о том, что образовавшиеся прямоугольники могут быть подобными.

№ 5

1. 1. 1 см. 2. 30° , 12 см. 3. а) 5 см; б) 4,1 см. 4. Через точку O проведем лучи AO и BO , пересекающие окружность в точках M и N соответственно. Пусть прямые AN и BM пересекаются в точке O . Можно доказать, что $\angle ANB = \angle AMB = 90^\circ$. Тогда искомым перпендикуляр лежит на прямой CO .

2. 1. 2 см. 2. 2 см, 90° , 45° . 3. а) $4\sqrt{3}$ см; б) 15° или 75° . 4. Построим окружность с диаметром $BD = ET$ и окружность с центром в точке B и радиусом, равным отрезку PO . Пусть вторая окружность пересекает первую в точках A и C . Четырехугольник $ABCD$ будет искомым.

3. 1. $\sqrt{3}$ см. 2. 4 см, 135° . 3. а) $22\sqrt{2}$ см; б) $72\sqrt{2}$. 4. Задача решается аналогично задаче 1 (4).

4. 1. $4\sqrt{2}$ см, 4 см, 4 см. 2. 4 см, 15° . 3. а) 4 см; б) 30° , 150° . 4. Задача решается аналогично задаче 2 (4).

№ 6

1. 2. а) $\overline{MB}_1 = \frac{1}{2}\overline{MA}_1 + \frac{1}{2}\overline{MC}$; б) $\overline{CM} = \frac{1}{3}\overline{CA} + \frac{1}{3}\overline{CB}$; в) $\overline{MA}_1 = \frac{1}{3}\overline{AB} + 0 \cdot \overline{AC}$;
г) пусть точка T — середина отрезка BB_1 . Тогда $\overline{AT} = \frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{1}{4}\overline{AC}$. С другой стороны, $\overline{AA}_1 = \frac{2}{3}\overline{AB} + \frac{1}{3}\overline{AC}$. Следовательно, $\overline{AA}_1 = \frac{4}{3}\overline{AT}$. Значит, A , T , A_1 лежат на одной прямой.

2. 2. а) $\overline{AC} = \overline{AB} + \frac{1}{3}\overline{AD}$; б) $\overline{BO} = \frac{1}{3}\overline{AD} - \frac{1}{3}\overline{AO}$; в) $\overline{AO} = 1,5\overline{DM} - 1,5\overline{DE}$;
г) $\overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{DA} + \frac{1}{2}\overline{DB} = \frac{1}{2}\overline{DA} + \frac{1}{2}(\overline{DC} + \frac{1}{3}\overline{DA}) = \frac{2}{3}\overline{DA} + \frac{1}{2}\overline{DC}$.

Значит, $DE < \frac{2}{3}DA + \frac{1}{2}DC$, так как векторы $\overline{DA}$ и $\overline{DC}$ неколлинеарны.

3. 2. а) $\overline{AM} = \overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AD}$; б) $\overline{BO} = \frac{1}{3}\overline{BA} + \frac{1}{3}\overline{BC}$; в) $\overline{OD} = \frac{4}{3}\overline{AP} - \frac{4}{3}\overline{AM}$;
г) $\overline{OP} = \overline{AP} - \overline{AO} = \overline{AD} + \frac{1}{2}\overline{AB} - \frac{2}{3}\overline{AB} - \frac{1}{3}\overline{AD} = \frac{2}{3}\overline{AD} - \frac{1}{6}\overline{AB}$.

Значит, $OP < \frac{2}{3}AD + \frac{1}{6}AD$, так как векторы $\overline{AD}$ и $\overline{AB}$ неколлинеарны.

4. 2. а) $\overline{OE} = \frac{1}{2}\overline{OC} + \frac{1}{2}\overline{OD}$; б) $\overline{BO} = \frac{1}{3}\overline{AD} - \frac{1}{3}\overline{AB}$; в) $\overline{CO} = -\frac{1}{3}\overline{AB} - \frac{1}{6}\overline{AD}$;
г)* $\overline{OM} = \frac{1}{5}\overline{OA} + \frac{4}{5}\overline{OE}$. С другой стороны, $\overline{OD} = \overline{OA} + 4\overline{OE}$. Следовательно, $\overline{OD} = 5\overline{OM}$. Значит, точки O , D , M лежат на одной прямой.

№ 7

1. 1. а) $14\sqrt{3}$; б) 120° , 60° ; в) 7; г) нет; д) нет; е) да; ж) $\overline{CA} = \overline{CD} + \frac{4}{3}\overline{CB}$.
2. Примите данный отрезок за единицу и постройте прямоугольный треугольник с катетами 1 и 2.

2. 1. а) $4\sqrt{3}$; б) $3\sqrt{3}$; в) 4:1; г) $\overline{MB} = \frac{1}{2}\overline{AC} + \overline{HB}$; д) можно; е) $\frac{\sqrt{13}}{13}$;
ж) $2\sqrt{3} - 3$.

2. Пусть дан отрезок PO . Отложим на некоторой прямой последовательно два отрезка $AB = 3PO$ и $BC = 4PO$. Построим полуокружность с диаметром AC . Через точку B проведем прямую, перпендикулярную AC , которая пересечет полуокружность в точке D . Отрезок BD будет искомым.

3. 1. а) 30° , 120° , 60° ; б) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $2\sqrt{3}$; в) $\frac{16\sqrt{3}}{3}$; г) 90° , 60° , 90° , 120° ;

ж) $\overline{OM} = \frac{3}{4}\overline{OD} + \frac{1}{4}\overline{OC}$. 2. Задача решается аналогично задаче 2 (2).

4. 1. а) 1 : 9; б) 4; в) 3,5; г) нет; д) $\overline{AB} = \frac{4}{3}\overline{TB} - \overline{CA}$; е) $\frac{\sqrt{26}}{26}$; ж) 90° , 135° , 135° .

2. Постройте прямоугольный треугольник по катету, равному данному отрезку и прилежащему углу в 30° , тогда другой катет будет искомым отрезком.

9-й КЛАСС. ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ ДЛЯ УРОКА

§ 1

1. 1. 1) $k = \frac{2}{5}$; 2) Такого числа нет. 2. $\overline{AE} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$.

2. 1. 1) $k = -\frac{20}{7}$; 2) Такого числа нет. 2. $\overline{MP} = \frac{1}{2}\vec{m} + \vec{n}$.

3. 1. 1) $k = 3$; 2) $k = -\frac{1}{3}$. 2. $\overline{DM} = \frac{2}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$.

4. 1. 1) $k = -\frac{2}{3}$; 2) $k = 2$. 2. $\overline{KB} = \frac{3}{7}\vec{n} - \frac{3}{7}\vec{m}$.

5. 1. $\overline{AE} = \overline{AB} + \overline{BE} = \overline{AB} + \frac{3}{8}\overline{BC} =$
 $= \overline{AB} + \frac{3}{8}(\overline{AC} - \overline{AB}) = \overline{AB} + \frac{3}{8}\overline{AC} - \frac{3}{8}\overline{AB} = \frac{5}{8}\overline{AB} + \frac{3}{8}\overline{AC}.$

Ответ: $\overline{AE} = \frac{5}{8}\vec{a} + \frac{3}{8}\vec{b}$.

2. $\overline{DE} = \overline{BE} - \overline{BD} = \frac{3}{5}\overline{BC} - \frac{3}{5}\overline{BA} = \frac{3}{5}\overline{AC}$. Так как $\overline{DE} = \frac{3}{5}\overline{AC}$, то $DE \parallel AC$.

6. 1. $\overline{OM} = \frac{10}{7}\vec{m} - \frac{3}{7}\vec{n}$. 2. Задачи решаются аналогично задачам 5 (1, 2).

7. 1. Пусть $\frac{BO}{OD} = \frac{m}{n}$, $\overline{AO} = \frac{n}{m+n}\overline{AB} + \frac{m}{m+n}\overline{AD} = \frac{n}{m+n}\overline{AB} +$
 $+\frac{2m}{5(m+n)}\overline{AC}$ (1), $\overline{AO} = k\overline{AE} = \frac{5k}{9}\overline{AB} + \frac{4k}{9}\overline{AC}$ (2). Из равенств (1) и (2) сле-

дует, что $\frac{n}{m+n} = \frac{5k}{9}$ и $\frac{2m}{5(m+n)} = \frac{4k}{9}$. Отсюда $\frac{m}{n} = \frac{2}{1}$. Ответ: $\frac{BO}{OD} = \frac{2}{1}$.

2. Пусть продолжения сторон AB и CD пересекаются в точке O . Тогда $\overline{OA} = k_1\overline{OB}$ и $\overline{OD} = k_1\overline{OC}$; $\overline{OM} = k_2\overline{OB}$ и $\overline{ON} = k_2\overline{OC}$. Отсюда $\overline{OB} = \frac{1}{k_2}\overline{OM}$ и $\overline{ON} = \frac{1}{k_2}\overline{OD}$. Тогда $\overline{OA} = \frac{k_1}{k_2}\overline{OM}$ и $\overline{ON} = \frac{k_1}{k_2}\overline{OC}$;
 $\overline{NA} = \overline{OA} - \overline{ON} = \frac{k_1}{k_2}(\overline{OM} - \overline{OC}) = \frac{k_1}{k_2}\overline{CM}$, значит $AN \parallel MC$.

8. 1. $\frac{EB}{BT} = \frac{8}{21}$. Задача решается аналогично задаче 7 (1).

2. $\overline{AN} = \frac{1}{6}\overline{AB} + \frac{1}{6}\overline{AD}$, $\overline{AM} = \frac{1}{5}\overline{AD}$, $\overline{BN} = \overline{AN} - \overline{AB} = \frac{1}{6}\overline{AD} - \frac{5}{6}\overline{AB}$,
 $\overline{NM} = \overline{AM} - \overline{AN} = \frac{1}{30}\overline{AD} - \frac{1}{6}\overline{AB}$. Тогда $\overline{BN} = 5(\frac{1}{30}\overline{AD} - \frac{1}{6}\overline{AB}) = 5\overline{NM}$.

Имеем: $\overline{BN} = 5\overline{NM}$. Это означает, что точки B , N и M лежат на одной прямой.

§ 2

1. 1. 1) $\vec{a}$ {5; -4}; 2) $\vec{b}$ {0; -3}. 2. $\vec{OB} = 2\vec{i} - 2\vec{j}$. 3. 1) $\vec{a} + \vec{b}$ имеет координаты {-1; 4}; 2) Да, будут.

2. 1. 1) $\vec{m}$ {-3; 7}; 2) $\vec{p}$ {-4; 0}. 2. $\vec{OT} = -5\vec{i} - 5\vec{j}$. 3. 1) {-4; 2}; 2) Да, будут.

3. 2. $\vec{AB} = 8\vec{i}$, $\vec{OB} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{OA} = -4\vec{i} + 3\vec{j}$. 3. 1) $\vec{m}$ {-7; -1}; 2) Сонаправлены.

4. 2. $\vec{MP} = -30\vec{j}$, $\vec{OM} = -8\vec{i} + 15\vec{j}$, $\vec{OP} = -8\vec{i} - 15\vec{j}$. 3. 1) $\vec{a}$ {17; -8}; 2) Противоположно направлены.

5. 1. {3; -1}. 2. $\vec{OM} = \frac{3}{4}\vec{ai} + \frac{a\sqrt{3}}{4}\vec{j}$, $\vec{BN} = -\frac{3}{4}\vec{ai} + \frac{a\sqrt{3}}{4}\vec{j}$. 3. $m = -\frac{2}{5}$.

6. 1. {8; -10}. 2. $\vec{AE} = \frac{3m}{4}\vec{i} - \frac{m\sqrt{3}}{4}\vec{j}$, $\vec{BF} = -\frac{3m}{4}\vec{i} - \frac{m\sqrt{3}}{4}\vec{j}$. 3. $m = 0$.

7. 1. Очевидно, что $\vec{p}$ {3; 4}, $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$. Так как $\vec{a}$ {3; -1} и $\vec{b}$ {1; -2}, то $\vec{p}$ {3x + y; -x - 2y}. Отсюда следует, что

$$\begin{cases} 3x + y = 3, \\ -x - 2y = 4. \end{cases}$$

Тогда $x = 2$, $y = -3$. Ответ: $\vec{p} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$.

2. $\triangle AMB$ — прямоугольный. Пусть $MK \perp AB$. Тогда легко найти что $AK = \frac{25}{13}$ и $MK = \frac{60}{13}$. Отсюда, $\vec{AM} = \frac{25}{13}\vec{i} + \frac{60}{13}\vec{j}$.

3. {5; -8}.

8. 1. $\vec{a} = -\frac{5}{3}\vec{m} + \frac{1}{3}\vec{p}$. Задача решается аналогично задаче 7 (1).

2. Находим высоту AF треугольника ABC . $AF = \frac{24}{5}$; $FC = \sqrt{36 - \frac{576}{25}} = \frac{18}{5}$.

Так как $\triangle AKO$ подобен $\triangle AFC$, то $\frac{AO}{AF} = \frac{KO}{FC}$ и $KO = \frac{9}{4}$, $\vec{KA} = \vec{OA} - \vec{OK} = -3\vec{i} - \frac{9}{4}\vec{j}$. Ответ: $\vec{KA} = 3\vec{i} - \frac{9}{4}\vec{j}$.

3. {-7; -1}.

§ 3

1. 1. 1) (0; 0), (0; 3), (3; 3), (5; 0); 2) $\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right)$; 3) 1. 2. $\sqrt{17}$.

2. 1. 1) (0; 0), (0; 4), (-8; 4), (-2; 0); 2) (-4; 2); (-1; 2); 3) 3. 2. $\sqrt{29}$.

3. 1. 1) A (-4; 3), B (4; 4); 2) $\sqrt{65}$. 3) 3,5.

2. $\left(\frac{5+\sqrt{31}}{3}; 0\right)$ или $\left(\frac{5-\sqrt{31}}{3}; 0\right)$.

4. 1. 1) $A(-8; 8); B(8; -6); 2) 2\sqrt{113}; 3) 1.$

2. $\left(0; \frac{-6-2\sqrt{30}}{3}\right)$ или $\left(0; \frac{-6+2\sqrt{30}}{3}\right).$

5. 2. $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right), R = \frac{\sqrt{10}}{2}.$

6. 2. $R = \frac{\sqrt{6}}{3}.$

У к а з а н и е. Необходимо доказать, что треугольник ABC равносторонний.

7. 1. $C(2,5; 4).$ 2. Нет, не лежат. 3. $\notin \left\{\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right\}.$

8. 1. $P(-1; -31).$ 2. Да, лежат. 3. $\notin \left\{-\frac{5}{13}; \frac{12}{13}\right\}.$

§ 4

1. $\sqrt{109}.$

2. $\sqrt{53}.$

3. $\sqrt{19}.$

4. $\sqrt{185}.$

5. Поместим треугольник ABC в прямоугольную систему координат так, чтобы вершина C совпала с началом координат, а вершины A и B располагались на положительных полуосях Oy и Ox соответственно. Используя свойства биссектрисы угла треугольника, находим $\frac{CM}{MB} = \frac{3}{5}$. Тогда $CM = \frac{3}{2}$ и $M\left(\frac{3}{2}; 0\right)$. Пусть E — середина AB . Тогда $E\left(2; \frac{3}{2}\right)$ и $ME = \frac{\sqrt{10}}{2}$. Ответ: $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

6. $\frac{3}{2}\sqrt{10}$. У к а з а н и е. Необходимо поместить трапецию в прямоугольную систему координат так, чтобы вершина A совпадала с началом координат, а вершины B и D располагались на положительных полуосях Oy и Ox соответственно. Из подобия треугольников BOC и AOD находим $C\left(\frac{4}{3}; 4\right)$. Дальнейшее решение очевидно.

7. Поместим треугольник ABC в прямоугольную систему координат. Пусть $A(0; 0)$, $C(a; 0)$ и $B(b; h)$. Рассмотрим медиану BE и точку M на ней, такую, что $\frac{BM}{ME} = \frac{2}{1}$. Зная координаты точек $B(b; h)$ и $E\left(\frac{a}{2}; 0\right)$ находим координаты точки M : $M\left(\frac{a+b}{3}; \frac{h}{3}\right)$. Рассмотрим теперь медиану AF и точку M_1 на ней такую, что $\frac{AM_1}{M_1F} = \frac{2}{1}$. Зная координаты точек $A(0; 0)$ и $F\left(\frac{a+b}{2}; \frac{h}{2}\right)$, находим координаты точки M_1 : $M_1\left(\frac{a+b}{3}; \frac{h}{3}\right)$. Отсюда следует, что точки M и M_1 совпадают. Аналогично поступаем и с третьей медианой. Этим доказывается, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и делят ее в отношении 2 : 1.

8. Поместим прямоугольник $ABCD$ в прямоугольную систему координат. Пусть $A(0; 0)$, $B(0; b)$, $C(a; b)$ и $D(a; 0)$. Рассмотрим на плоскости произвольную точку $M(x; y)$. Имеем:

$$MB^2 + MD^2 = x^2 + (y - b)^2 + (x - a)^2 + y^2 = 2x^2 + 2y^2 - 2ax - 2by, \quad (1)$$

$$MA^2 + MC^2 = x^2 + y^2 + (x - a)^2 + (y - b)^2 = 2x^2 + 2y^2 - 2ax - 2by. \quad (2)$$

Из равенств (1) и (2) следует, что равенство $MB^2 + MD^2 = MA^2 + MC^2$ не зависит от положения точки M .

§ 5

1. 1. 1) $C(2; -4)$, $R = 2\sqrt{5}$; 2) Да, проходит.

2. 2) $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$.

2. 1. 1) $C(-1; 2)$, $R = 2\sqrt{10}$; 2) Да, пересекает.

2. $(x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 9$.

3. 2. $(x + 3)^2 + (y - \sqrt{3})^2 = 3$.

4. 1. Да, является. 2. $(x - 2)^2 + (y + 2\sqrt{3})^2 = 4$.

5. 1. Окружности пересекаются. Указание. Необходимо доказать, что расстояние между центрами этих окружностей меньше суммы их радиусов и больше модуля их разности.

2. Легко увидеть, что треугольник ABC — равнобедренный, причем $AB = BC = 5$ и $AC = 8$. Неравная высота треугольника равна 3. По этим данным находим радиус вписанной в этот треугольник окружности: $r = \frac{4}{3}$.

Находим координаты центра этой окружности $O_1(0; \frac{1}{3})$. Отсюда уравнение искомой окружности имеет вид: $x^2 + (y - \frac{1}{3})^2 = \frac{16}{9}$.

6. 1. Окружности касаются. Необходимо доказать, что расстояние между центрами этих окружностей равно сумме их радиусов.

2. $(x - \frac{1}{8})^2 + y^2 = \frac{625}{64}$. Задача решается аналогично задаче 6 (2), при этом радиус описанной вокруг треугольника окружности равен $3\frac{1}{8}$.

7. 1. Поместим квадрат $ABCD$ в прямоугольную систему координат так, чтобы центр квадрата совпадал с началом координат. Пусть $A(-a; a)$, $B(-a; -a)$, $C(a; a)$ и $D(a; -a)$. Уравнение окружности, вписанной в квадрат, имеет вид: $x^2 + y^2 = a^2$. Выберем на окружности произвольную точку M с координатами x и y . Тогда $MA = \sqrt{(x + a)^2 + (y + a)^2}$, $MB = \sqrt{(x + a)^2 + (y - a)^2}$, $MC = \sqrt{(x - a)^2 + (y + a)^2}$, $MD = \sqrt{(x - a)^2 + (y - a)^2}$. Учитывая, что $x^2 + y^2 = a^2$, имеем $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 12a^2$, где $12a^2$ — величина постоянная.

2. $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 4$.

8. 1. Задача решается аналогично задаче 7 (1).

2. $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 9$.

§ 6

1. 1. $x = 9$. 2. $y + x - 1 = 0$.

2. 1. $y = 10$. 2. $3y - x - 14 = 0$.

3. 1. $5y + x - 12 = 0$. 2. 9 кв. ед.

4. 1. $3y - x = 0$. 2. 4 кв. ед.

5. 1. Пусть через точку $C(3; 4)$ проведена прямая AB , перпендикулярная к OC , причем точка A принадлежит положительной полуоси Oy , а B — положительной полуоси Ox . $\triangle OCB$ — прямоугольный ($\angle OCB = 90^\circ$). Проведем $CD \perp OB$. Очевидно, что $OD = 3$, а $CD = 4$. Тогда легко найти длину OB : $OB = \frac{25}{3}$ и $B(\frac{25}{3}; 0)$. Зная координаты точек C и B , можно написать уравнение прямой.

Ответ: $3x + 4y - 25 = 0$.

2. $5\frac{1}{3}$ кв. ед.

6. 1. $2y - x - 2 = 0$. Задача решается аналогично задаче 5 (1).

2. 10 кв. ед.

7. 1. Прямая $y - kx - 5 = 0$ пересекает оси координат в точках $A(0; 5)$ и $B(-\frac{5}{k}; 0)$, $OA = 5$, $OB = \frac{5}{|k|}$. Проведем $OM \perp AB$. OM — расстояние от начала координат до прямой. $OM = \frac{OA \cdot OB}{AB} = \frac{25}{|k| \sqrt{25 + \frac{25}{k^2}}} = \frac{5}{\sqrt{k^2 + 1}}$.

По условию $\frac{5}{\sqrt{k^2 + 1}} = 3$. Отсюда $k = \pm \frac{4}{3}$.

2. $3y + x - 5 = 0$. $C(2; 1)$.

8. 1. $m = \pm \frac{2}{3\sqrt{5}}$. У к а з а н и е. Необходимо учесть, что медиана прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы. Задача решается аналогично задаче 7 (1).

2. $7y + x + 4 = 0$.

§ 7

1. 1. Прямая и окружность не имеют общих точек.

2. Две окружности с центром в начале координат и с радиусами, равными 7 и 1.

2. 1. Окружность и прямая имеют одну общую точку.

2. Прямая $x = 4$.

3. 1. Прямая и окружность не имеют общих точек.

2. Окружность $x^2 + (y + \frac{2}{3})^2 = \frac{16}{9}$.

4. 1. Окружность и прямая имеют одну общую точку.

2. Прямая $8y - 6x + 3 = 0$.

5. 1. $\frac{6\sqrt{5}}{5}$. Указание. Необходимо найти расстояние от центра окружности $(0; 0)$ до прямой $2y + x - 4 = 0$. Зная радиус окружности и расстояние от ее центра до хорды, легко найти длину хорды.

2. Окружность с центром в середине отрезка AB и радиусом, равным 1.

6. 1. $x^2 + y^2 = \frac{169}{25}$. Указание. Необходимо найти расстояние от центра окружности $(0; 0)$ до прямой $4y + 3x - 12 = 0$. Зная расстояние от центра окружности до хорды и длину хорды, находим радиус окружности.

2. Пусть $A(-2; 0)$ и $B(2; 0)$. Искомым множеством является прямая $x = \frac{1}{2}$.

7. 1. Для решения задачи нужно найти расстояние от точки $C(5; 4)$ до прямой $x + 2y - 3 = 0$. На рисунке 78 $BE = 2$, $CE = 4$, $OB = 3$, $OA = \frac{3}{2}$. В таком случае $\triangle CBE$ подобен $\triangle AOB$. Поэтому, $\angle ABO + \angle CBE = 90^\circ$. Отсюда $CB \perp AB$ и CB — расстояние от точки C до прямой

$y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$; $CB = \sqrt{16 + 4} = 2\sqrt{5}$. Так как длина хорды равна 8, то $R = \sqrt{20 + 16} = 6$. Таким образом, уравнение искомой окружности имеет вид: $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 36$.

2. Поместим прямоугольный треугольник ABC в прямоугольную систему координат так, чтобы вершина прямого угла C находилась в начале координат, а вершины A и B на положительных полуосях Oy и Ox соответственно. $A(0; a)$ и $B(b; 0)$. Рассмотрим произвольную точку $M(x; y)$, $MA^2 = x^2 + (y - a)^2$, $MC^2 = x^2 + y^2$, $MB^2 = (x - b)^2 + y^2$. По условию $MA^2 + MB^2 = 2MC^2$, а поэтому $x^2 + (y - a)^2 + (x - b)^2 = 2x^2 + 2y^2$.

Отсюда $2ay + 2bx = a^2 + b^2$ — уравнение прямой. Ответ: прямая.

8. 1. $\frac{4\sqrt{55}}{5}$. В задаче используются идеи, рассмотренные при решении задачи 7 (1).

2. Задача решается аналогично задаче 7 (2). Если положить $A(0; a)$ и $B(b; 0)$, то получим: $(x - \frac{b}{2})^2 + (y + \frac{a}{2})^2 = \frac{3a^2 - b^2}{4}$. А это есть уравнение окружности ($b < a\sqrt{3}$). Ответ: окружность.

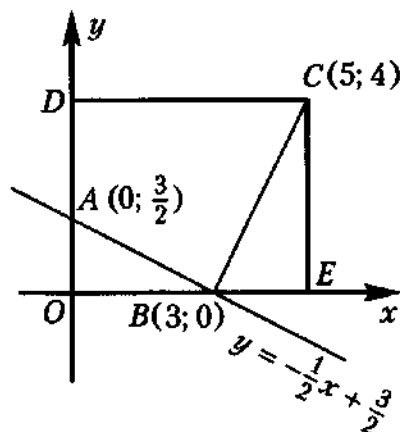


Рис. 78

§ 8

1. 1. 1 см^2 . 2. 4 см .

2. 1. 4. 2. $\frac{27\sqrt{3}}{4} \text{ см}^2$.

3. 1. $\frac{18}{7}\sin 2\alpha$. 2. $20\sqrt{3} \text{ см}^2$.

4. 1. $4\sin\alpha$. 2. $15\sqrt{2} \text{ см}^2$.

5. 1. $36\sqrt{3} \text{ см}^2$. 2. 75° ; 105° ; 105° ; 75° .

6. 1. 30° или 150° . 2. $\frac{1}{2}m^2\sin^2\alpha \cdot \sin 2\alpha$.

7. 1. $\frac{S_{AOB}}{S_{BOC}} = \frac{AO}{OC}$; $\frac{S_{AOD}}{S_{COD}} = \frac{AO}{OC}$. Отсюда:

$$\frac{S_{AOB}}{S_{BOC}} = \frac{S_{AOD}}{S_{COD}}; \quad \frac{S_{AOB}}{20} = \frac{60}{40}, \quad S_{AOB} = 30.$$

С другой стороны, $S_{AOB} = \frac{1}{2}OA \cdot AB \sin \angle BAO$. Тогда $\sin \angle BAO = \frac{60}{10 \cdot 12} = \frac{1}{2}$. В таком случае, $\angle BAO = 30^\circ$ или $\angle BAO = 150^\circ$, но второй случай невозможен, так как $\angle AOB > 31^\circ$. Ответ: 30° .

2. Пусть $BD = x$. Так как $S_{ABC} = S_{ABD} + S_{DBC}$, то

$$\frac{1}{2}absin\alpha = \frac{1}{2}xa\sin\beta + \frac{1}{2}xb\sin(\alpha - \beta).$$

Отсюда: $x = \frac{ab\sin\alpha}{a\sin\beta + b\sin(\alpha - \beta)}$.

8. 1. 135° . 2. $\frac{mn\sin\beta}{n\sin(\alpha + \beta) - m\sin\alpha}$. Задача решается аналогично задаче 7 (2).

§ 9

1. 1. 12. 2. $\frac{b\sin\alpha}{\sin\frac{3\alpha}{2}}$.

2. 1. $\sqrt{2}$. 2. $\frac{h\sin\beta}{\sin\alpha\sin(\alpha + \beta)}$.

3. 1. $\frac{d^2\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}$. 2. 10 см .

4. 1. $\frac{m^2\sin^2\alpha \cdot \sin 2\beta}{2\sin^2(\alpha + \beta)}$. 2. 6.

5. 1. $\frac{\sin\gamma\sin(\alpha + \beta)}{\sin\beta\sin(\alpha + \beta)}$. Необходимо найти отношение $\frac{BD}{DC}$, применив теорему синусов для треугольников ABD и ACD .

2. $\sin A = \frac{3}{5}$. $BC = 2R\sin A$. В таком случае $R = \frac{BC}{2\sin A} = \frac{9.5}{2 \cdot 3} = 7.5$.

Ответ: 7,5.

6. 1. $\frac{h \sin \beta \cdot \sin \left(\alpha + \frac{\beta}{2} \right)}{2 \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin \alpha}$. 2. Задача решается аналогично задаче 5 (2).

7. 1. Из $\triangle ABM$ имеем: $\frac{AM}{\sin \angle ABM} = \frac{AB}{\sin 20^\circ}$, а из $\triangle ACM$ — $\frac{AM}{\sin \angle ACM} = \frac{AC}{\sin 30^\circ}$. Учитывая, что $AB = AC$, получим: $\frac{\sin \angle ACM}{\sin \angle ABM} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 20^\circ} (*)$. Пусть $\angle MAB = x$. Тогда $\angle ABM = 180^\circ - (x + 20^\circ)$, $\angle CAM = 60^\circ - x$ и $\angle ACM = 90^\circ + x$. Из равенства (*) следует, что $\frac{\cos x}{\sin(x + 20^\circ)} = \frac{1}{2 \sin 20^\circ}$. Далее $\sin(x + 20^\circ) = 2 \sin 20^\circ \cdot \cos x$; $\sin(x - 20^\circ) = 0$ и $x = 20^\circ$. Ответ: 20° .

2. $\frac{(m^2 - n^2) \sin \beta \sin \alpha}{2 \sin(\alpha + \beta)}$. Пусть $ABCD$ — трапеция и ее основания AD и BC соответственно равны m и n , $\angle BAD = \alpha$, $\angle CDA = \beta$. Необходимо через вершину B провести прямую, параллельную CD до пересечения с AD в точке E . После этого рассмотреть треугольник ABE , где $\angle A = \alpha$, $\angle BEA = \beta$ и $AE = m - n$.

8. 1. 30° . Задача решается аналогично задаче 7 (1).

2. $\frac{a \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{\sin(\alpha + \beta)}$. Необходимо рассмотреть треугольник AKC и учесть, что $\angle AKC = \angle B = \alpha$.

§ 10

1. 1. 14 см. 2. Тупоугольный.
2. 1. $\sqrt{29}$ см. 2. Остроугольный.
3. 1. 7. 2. 60° .
4. 1. $2\sqrt{7}$. 2. 120° .

5. 1. $\frac{10\sqrt{183}}{61}$.

2. 1) По теореме косинусов $225 = 169 + 196 - 2 \cdot 13 \cdot 14 \cdot \cos \alpha$. Отсюда $\cos \alpha = \frac{35}{91}$ и $\sin \alpha = \frac{84}{91}$. Так как $15 = 2R \sin \alpha$, то $R = \frac{15 \cdot 91}{2 \cdot 84} = \frac{455}{56}$.

2) Можно воспользоваться формулой $R = \frac{abc}{4S}$, а площадь треугольника найти по формуле Герона. Ответ: $\frac{65}{8}$.

6. 1. $\sqrt{21}$.

2. 15. Можно по теореме косинусов найти, например, косинус угла, лежащего против стороны, длина которой равна 25. $\cos \alpha = \frac{12}{13}$, тогда $h = 39 \sin \alpha = 39 \cdot \frac{5}{13} = 15$. Проще же найти площадь по формуле Герона и тогда воспользоваться тем, что $h_a = \frac{2S}{a}$.

7. 1. Соединим концы хорды AB с центром окружности. Из треугольника имеем: $BM^2 = R^2 + OM^2 - 2R \cdot OM \cdot \cos \angle BOM$, а из треугольника MOA : $MA^2 = R^2 + OM^2 - 2R \cdot OM \cdot \cos \angle AOM$. Так как $AB \parallel CD$, то $\angle AOM = 180^\circ - \angle BOM$ и $\cos \angle AOM = -\cos \angle BOM$. Тогда, сложив полученные равенства, имеем: $MA^2 + MB^2 = 2R^2 + 2OM^2$, т. е. эта сумма не зависит от положения хорды AB .

2. По теореме косинусов $c^2 = a^2 + b^2 - 2bc \cos C$, $a = 2R \sin A$, $b = 2R \sin B$, $c = 2R \sin C$. Тогда

$$\sin^2 C = \sin^2 A + \sin^2 B - 2\sin A \sin B \cos C,$$

но

$$\sin^2 C = 1 - \cos^2 C \text{ и } \sin^2 A = 1 - \cos^2 A.$$

Отсюда $\cos^2 A = \cos^2 C + \sin^2 B - 2\sin A \cdot \sin B \cdot \cos C$.

8. 1. Пусть $ME \perp AB$ и $MD \perp AC$, $ME = a$, $MD = b$. Так как в четырехугольнике $AEMD$ сумма противоположных углов равна 180° , то около него можно описать окружность, диаметр которой равен AM , $\angle EMD = 180^\circ - \alpha$. Из треугольника EMD имеем:

$$ED = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha}.$$

С другой стороны, $ED = 2R \sin \alpha = AM \sin \alpha$. Тогда $AM = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha}}{\sin \alpha}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha}}{\sin \alpha}$.

2. Задача решается аналогично задаче 7 (2).

§ 11

1. 1. $a \approx 0,17$, $c \approx 0,31$, $\angle C \approx 78^\circ$. 2. $\approx 41^\circ 25'$.

2. 1. $a \approx 13,8$, $\angle C \approx 41^\circ 47'$, $\angle B \approx 88^\circ 13'$. 2. $\approx 1,6$.

3. 1. $a \approx 9,2$, $\angle B \approx 30^\circ 21'$, $\angle C \approx 124^\circ 9'$. 2. $\approx 61,5$.

4. 1. $\angle A \approx 64^\circ 44'$, $\angle B \approx 73^\circ 24'$, $\angle C \approx 41^\circ 52'$. 2. $\approx 475,8$.

5. 1. $a \approx 11,3$, $b \approx 9,7$, $c \approx 11,6$, $\angle C \approx 66^\circ$. 2. $\approx 5,6$.

6. 1. $a \approx 2,32$, $b \approx 1,47$, $c \approx 1,33$, $\angle C \approx 32^\circ$. 2. $\approx 1,6$.

7. 1. $P_1 \approx 145,6$ или $P_2 \approx 74,2$.

2. $\approx 93^\circ 9'$. Из треугольника ABC находим угол BAC , а из треугольника ACD — $\angle CAD$. В таком случае $\angle BAD$ известен. Тогда из треугольника ABD можно найти BD , а затем и $\angle ABD$. После этого из треугольника ABO легко найти и $\angle AOB$.

8. 1. $S_1 \approx 627,4$ или $S_2 \approx 119,9$.

2. $\approx 11,8$. Из треугольника ABC находим AC , а затем и $\angle ACB$. После этого находим $\angle ACD$ и тогда из треугольника ACD находим AD .

§ 12

1. 1. 1) 0; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 1. 2. $\approx 81^\circ 52'$.

2. 1. 1) $-\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{4}$; 3) $-\frac{1}{2}$. 2. $\approx 98^\circ 8'$.

3. 1. 1) 32; 2) -9; 3) 0. 2. $\approx 120^\circ 58'$.

4. 1. 1) 128; 2) -72; 3) 0. 2. $\approx 146^\circ 19'$.

5. 1. 1) 9; 2) -24; 3) -12. 2. $\approx 36^\circ 52'$.

6. 1. 1) 75; 2) -156; 3) 75. 2. $\approx 56^\circ 19'$.

7. 1. Обозначим $\angle CDA = \alpha$. Тогда

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AB} &= 0 + 3 \cdot CD \cos \alpha + 5CD \cdot (-\cos \alpha) + 0 = \\ &= CD \cos \alpha \cdot (3 - 5) = -2CD \cos \alpha. \end{aligned}$$

Но $CD \cos \alpha = AD - BC = 2$. Ответ: -4.

2. $\frac{2\sqrt{34}}{17}$.

8. 1. $-m^2$. Задача решается аналогично задаче 7 (1).

2. $\frac{8\sqrt{5}}{5}$. Необходимо найти угол между диагоналями AC и BD и площадь трапеции по формуле $\frac{1}{2}d_1d_2\sin\alpha$, где α — угол между диагоналями. Дальнейшее решение очевидно.

§ 13

1. 1. $2\sqrt{10}$.

2. 1. $2\sqrt{19}$.

3. 1. $\approx 19^\circ 6'$. 2. $\frac{\sqrt{34}}{2}$.

4. 1. $\approx 23^\circ 25'$. 2. $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

5. 1. $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CF} =$
 $= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{CA}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})) =$
 $= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}) = 0.$

2. $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$ и $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$. Из условия следует, что $\overrightarrow{CD}^2 > \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}^2$. Тогда: $\frac{1}{4}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})^2 > \frac{1}{4}(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA})^2$, $2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} > -2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} > 0$. Следовательно, $\angle C$ — острый.

6. 1. Из условия следует, что $\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{BC}^2 = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2$, $\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{BC}^2 =$
 $= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC})^2$, $\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{BC}^2 = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}^2$, $2\overrightarrow{AC}^2 + 2\overrightarrow{BC}^2 =$
 $= \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}^2$, $\overrightarrow{AC}^2 + 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}^2 = 0.$

Отсюда $(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC})^2 = 0$ и значит $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$.

2. $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA})$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB}^2 + \overrightarrow{CA}^2)$. Так как $BC > AC$, то $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} > 0$ и угол между векторами $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{AB}$ острый. Следовательно, $\angle BDC$ — тупой.

7. 1. Предположим, что $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$. Тогда $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MC}^2 = \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MD}^2$. Составим разность $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MC}^2 - \overrightarrow{MB}^2 - \overrightarrow{MD}^2$. Имеем:

$$\begin{aligned} & (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD})(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MD})(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) = \\ & = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD}) \cdot \overrightarrow{DA} + (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB}) \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA} \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) = \\ & = \overrightarrow{DA} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD}) = 2\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BA} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда обратными преобразованиями получим искомое равенство. При доказательстве было использовано то, что $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{DA} \perp \overrightarrow{BA}$.

2. Рассмотрим прямоугольную трапецию $ABCD$ (AD и BC — основания), $\angle BAD = 90^\circ$. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$, так как по условию $AC \perp BD$, $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = 0$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, $0 + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}^2 - 0 = 0$.

Отсюда следует, что $BC \cdot AD = AB^2$ и $AB = \sqrt{BC \cdot AD}$. При решении учли, что $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ сонаправлен $\overrightarrow{AD}$.

8. 1. Предположим, что $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 + 2AB \cdot DC$. Тогда:

$$\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{BD}^2 = \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} (\overrightarrow{AB} \uparrow \uparrow \overrightarrow{DC}).$$

Составим разность: $\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{BD}^2 - \overrightarrow{AD}^2 - \overrightarrow{BC}^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}$.

Имеем:

$$\begin{aligned} & (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = \\ & = \overrightarrow{DC}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{CD}(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = \\ & = \overrightarrow{DC}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC}) - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DC}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}) - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = \\ & = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда обратными преобразованиями мы получим искомое равенство.

$$2. \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}, \quad \overrightarrow{BE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC},$$

$$\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}\right)\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}\right) = 0,$$

$$\frac{1}{8}\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} - \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}^2 + \frac{3}{8}\overrightarrow{BC}^2 - \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = 0, \quad \frac{3}{8}\overrightarrow{BC}^2 - \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}^2 - \frac{5}{8}\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = 0.$$

Пусть $BC = x$, тогда $\frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{4} \cdot 4 - \frac{5}{8}x \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 0, 3x^2 - 5x - 8 = 0$. Отсюда $x = 2\frac{2}{3}$. Ответ: $BC = 2\frac{2}{3}$.

§ 14

1. 1. 162° . 2. $\frac{a}{\sqrt{3}}$, $\frac{2a}{\sqrt{3}}$.
2. 1. 10. 2. $b\sqrt{3}$; $2b$.
3. 1. $n = 3$.
4. 1. $n = 6$.
5. 1. 72 см^2 . Необходимо доказать, что $S_{ABC} = \frac{1}{2} S_{ABCDEF}$.
2. $\sqrt{5} - 1$. Необходимо доказать, что $\triangle ODE$ — равнобедренный и рассмотреть подобие треугольников AOE и ADE .
6. 1. 24 см^2 .
2. $\sqrt{5} + 1$. Задачи решаются аналогично задачам 5 (1, 2).
7. 1. Правильные треугольники, четырехугольники и шестиугольники.
2. На рисунке 79 $CQ = PD = DN = AM = AK = BL = BF = CE$. По условию длина этих отрезков равна половине диагонали квадрата. Пусть сторона квадрата равна a . Тогда $CP = DQ = a - \frac{a\sqrt{2}}{2}$ и $PQ = a - 2\left(a - \frac{a\sqrt{2}}{2}\right) = a\sqrt{2} - a$. Очевидно, что $MN = KL = EF = PQ$. Из треугольника FCP следует, что $FP = a\sqrt{2} - a$. Тогда можно утверждать, что стороны многоугольника $FPQMNLKE$ равны между собой. Кроме того, углы этого многоугольника равны 135° . Следовательно, данный восьмиугольник является правильным.
8. 1. Да, стороны должны быть равными.
2. На рисунке 80 пары параллельных прямых a и a_1 , b и b_1 пересекают прямоугольник $A_1B_1C_1D_1$ так, что образовался правильный шестиугольник $ABCDEF$, причем F и C — середины сторон A_1B_1 и C_1D_1 . Пусть сторона шестиугольника равна x . В прямоугольном треугольнике AB_1F $\angle B_1AF = 60^\circ$. Тогда $B_1A = \frac{x}{2}$ и $B_1F = \frac{x\sqrt{3}}{2}$. Отсюда следует, что $B_1C_1 = 2x$ и $A_1B_1 = x\sqrt{3}$. Следовательно, стороны прямоугольника относятся между собой, как $\sqrt{3} : 2$.

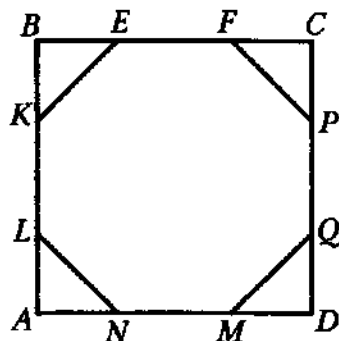


Рис. 79

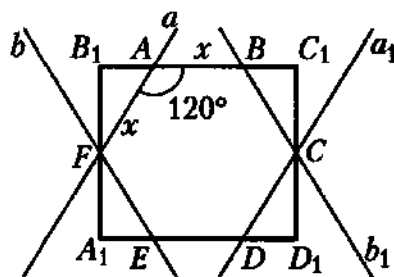


Рис. 80

§ 15

1. 1. 18 см, $9\sqrt{3}$ см². 2. $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

2. 1. 24 см, $24\sqrt{3}$ см². 2. $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

3. 1. $\frac{\sqrt{6Q}}{2}$, $\frac{3Q\sqrt{3}}{8}$. 2. $\frac{3}{4}$.

4. 1. $\frac{2}{3}\sqrt{Q\sqrt{3}}$, $\frac{4}{9}Q\sqrt{3}$. 2. $\frac{1}{4}$.

5. 1. $R\sqrt{2-\sqrt{3}}$, $3R^2$. 2. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

6. 1. $R\sqrt{2-\sqrt{2}}$, $2R^2\sqrt{2}$. 2. $\frac{a}{6}(3-\sqrt{3})$.

7. 1. Площадь четырехугольника $A_1A_6A_7A_8$ равна $\frac{1}{2}A_1A \cdot A_6A_8$, $A_1A_7 = 2R$, $A_6A_8 = R$, $S = \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot R = R^2$. Но легко доказать, что $R = a$. Значит, $S = a^2$.

2. Опишем вокруг трапеции окружность. Углы при большем основании равны 75° . Так как диагонали взаимно перпендикулярны, то $\angle CAD = \angle BDA = 45^\circ$. Тогда $\angle BAC = 30^\circ$ и $\angle BOC = 60^\circ$. В таком случае, радиус окружности равен a . С другой стороны, угол между диагоналями равен полусумме дуг BC и AD . Поэтому $\angle AOD = 120^\circ$ и $AD = a\sqrt{3}$. Дальнейшее решение очевидно. Ответ: $\frac{a^2(2+\sqrt{3})}{2}$.

8. 1. $a^2\sqrt{2}$. 2. Задача решается аналогично задаче 7 (1).

2. Трапеция $ABCD$, где AD и BC — основания, вписана в окружность радиуса R , $\angle AOB = \angle COD = 60^\circ$, $\angle BOC = 90^\circ$ и $\angle AOD = 150^\circ$; $\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC = 150^\circ$. В таком случае $AD = AC$. $\angle CAD = 30^\circ$ и $CD = R$, так как $\angle COD = 60^\circ$. Пусть $AC = AD = x$. По теореме косинусов имеем:

$$R^2 = 2x^2 - 2x^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x^2 = R^2(2 + \sqrt{3}).$$

Угол между диагоналями AC и BD равен 120° . Тогда $S_{ABCD} = \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$, т. е. $S_{ABCD} = \frac{R^2}{4}(3 + 2\sqrt{3})$.

§ 16

1. 1. $16\sqrt{2}$ см. 2. $\approx 40,3$ дм.

2. 1. $18\sqrt{3}$ см. 2. $\approx 6,23$ см.

3. 1. $\frac{\pi R}{6} \cdot (4 + 3\sqrt{3})$. 2. 32 см.

4. 1. $\frac{\pi R}{2}(\sqrt{2} + 1)$. 2. 2 см.

5. 2. $\frac{3l}{4}$.

6. 2. 1.

7. 1. $\frac{c(2-\sqrt{3})}{\sqrt{3}}$. 2. $12(\sqrt{3} + \pi)$ дм. Необходимо доказать, что $\angle AO_1D = \angle BO_2C = 120^\circ$.

8. 1. $c(\sqrt{2} - 1)$. 2. $\frac{100}{3}(2\pi + 3\sqrt{3})$ см. Задача решается аналогично задаче 7 (2).

§ 17

1. 1. 2. 2. $\approx 161,9$ см².

2. 1. 3. 2. $\approx 197^\circ 18'$.

3. 1. $(6 - \pi)$ см². 2. $\frac{R^2}{12}(4\pi - 3\sqrt{3})$.

4. 1. $\frac{108-16\pi}{9}$. 2. $\frac{R^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3})$.

5. 1. $\frac{\pi a^2}{4}$.

2. $\frac{2}{3}Q$. Необходимо доказать, что площадь фигуры равна площади сектора с дугой BC .

6. 1. 4. 2. $2Q$. Задача решается аналогично задаче 5 (2).

7. 1. $\frac{r^2}{6}(24\sqrt{3} - 11\pi)$. Необходимо доказать, что $\angle AO_1C = 120^\circ$, а $\angle BO_2C = 60^\circ$. Площадь искомой фигуры равна площади трапеции ABO_2O_1 без площадей двух секторов AO_1C и BO_2C .

2. $\frac{a^2c^2}{4\pi b^2}$. Треугольники ADC и CBD подобны и радиусы вписанных окружностей относятся между собой как $b : a$.

3. Необходимо построить окружности с радиусами, равными $\frac{R}{\sqrt{3}}$ и $\frac{R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

8. 1. $\frac{R^2}{54}(5\pi - 6\sqrt{3})$. 2. Необходимо доказать, что радиус вписанной окружности $r = \frac{R}{3}$ и затем найти площадь фигуры, состоящей из четырехугольника OCO_1D и сектора $CEDO_1$, дуга которого равна 240° . Дальнейшее решение очевидно.

2. $\frac{n^2c^2}{4\pi m^2}$. Задача решается аналогично задаче 7 (2).

3. Необходимо построить прямоугольный треугольник с катетами R_1 и R_2 , а затем на гипотенузе построенного треугольника, как на катете, построить еще один прямоугольный треугольник с катетом R_3 . Гипотенуза последнего треугольника и будет являться радиусом искомого круга.

§ 18

5. 1. Решение показано на рисунке 81. 2. 2 см или 10 см.

6. 1. Решение показано на рисунке 82. 2. $\frac{2}{3}$ или $\frac{3}{2}$.

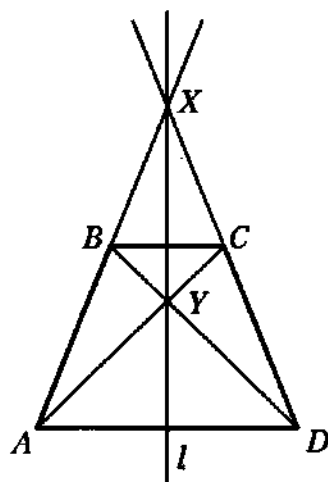


Рис. 81

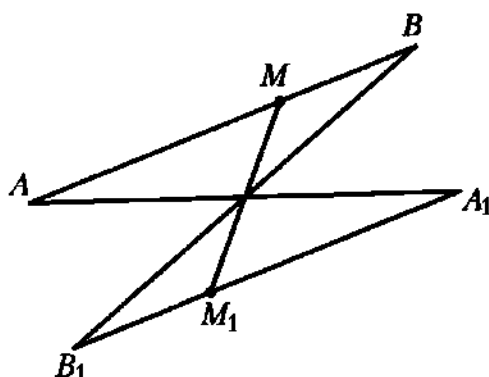


Рис. 82

7. 1. Необходимо построить окружность, симметричную относительно прямой l , например, с центром O . Дальнейшее решение смотри на рисунке 83. При данном расположении окружностей и прямой имеются две пары симметричных точек X и X_1 , Y и Y_1 .

8. 1. Необходимо построить прямую b_1 , симметричную прямой b относительно центра O . Дальнейшее решение смотри на рисунке 84. При данном расположении прямых a и b и центра O имеется одна пара центрально-симметричных точек X и X_1 .

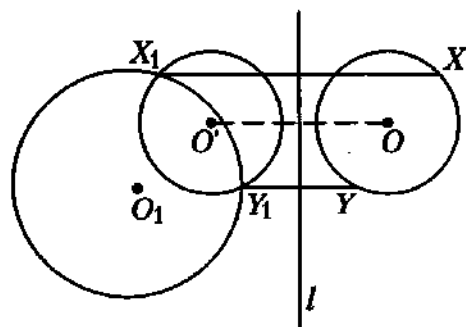


Рис. 83

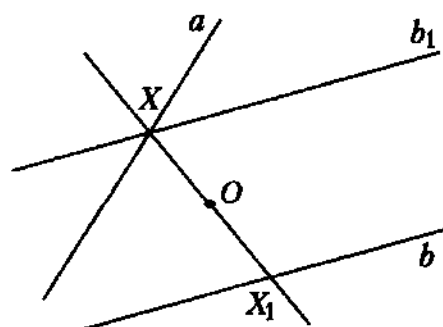


Рис. 84

§ 19

3. 2. 15 см.

4. 2. 8 см.

5. 1. Пусть $A \rightarrow A_1$ и $D \rightarrow D_1$. Так как при движении сохраняются расстояния, то следует провести окружности с центрами в точках A_1 и D_1 и радиусами, равными AX и DX . Точка пересечения этих окружностей, расположенная ниже прямой A_1D_1 , и будет искомой точкой X_1 .

2. Предположим, что трапеция $ABCD$ построена. Осуществим параллельный перенос диагонали BD на вектор $\overrightarrow{BC}$. Пусть $BD \rightarrow CD_1$. Треугольник ACD_1 — прямоугольный ($\angle ACD_1 = 90^\circ$) с известными катетами AC и CD_1 . Отсюда вытекает построение: строим прямоугольный треугольник ACD_1 по двум катетам, равным данным отрезкам. Затем через точку A строим прямую, перпендикулярную AD_1 , и через точку C прямую, параллельную AD_1 . Точка их пересечения и есть вершина B . После этого отрезок CD_1 параллельно переносим на вектор $\overrightarrow{CB}$, при этом $D_1 \rightarrow D$. Трапеция $ABCD$ — искомая.

6. Задача решается аналогично задачам 5 (1, 2).

7. 1. Опустим перпендикуляры O_1F и O_2F (рис. 85) на прямую m . Осуществим параллельный перенос окружности с центром O_2 на вектор $\overrightarrow{EF}$. Полученная окружность пересекает окружность с центром в точке O_1 в точках A и B . Через эти точки проведем прямую l . Эта прямая пересекает окружность с центром в точке O_2 в точках A_1 и B_1 . Легко доказать, что $AB = A_1B_1$.

2. Пусть AE и CF медианы треугольника ABC , причем $AE = CF$. Осуществим параллельный перенос медианы CF на вектор $\overrightarrow{FE}$, при этом $FC \rightarrow EC_1$. Мы получим равнобедренный треугольник AEC_1 . Отсюда следует, что $\angle EAC_1 = \angle EC_1A$. Так как $\angle FCA = \angle EC_1A$, то $\angle EAC = \angle FCA$. Дальнейшее доказательство очевидно.

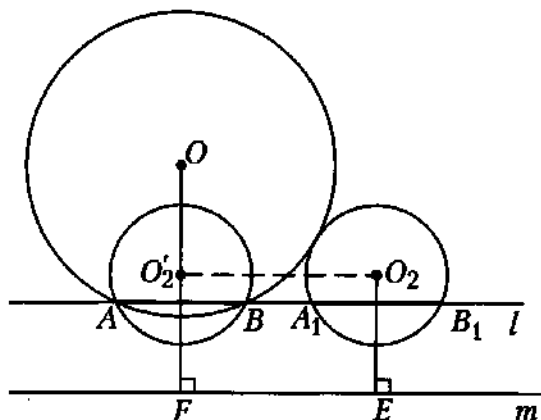


Рис. 85

8. 1. Задача решается аналогично задаче 7 (1).

2. Рассмотрим трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC . P — середина BC , а K — середина AD . Осуществим параллельный перенос AB на вектор $\overrightarrow{BP}$, а CD — на вектор $\overrightarrow{KP}$. Тогда $BA \rightarrow PA_1$, а $CD \rightarrow PD_1$, треугольник A_1PD_1 — прямоугольный ($\angle A_1PD_1 = 90^\circ$) и PK медиана этого треугольника (докажите!), $PK = \frac{1}{2}A_1D_1$. Дальнейшее доказательство очевидно.

§ 20

1. 1. $AB = A_1B_1$.

2. 1. $\cup AB = \cup A_1B_1$.

5. 1. Следует осуществить поворот окружности с центром в точке O_1 относительно центра O на 60° против часовой стрелки.

2. Пусть прямая l пересекает стороны AB и AC соответственно в точках E и F , а прямая m — стороны BC и AC в точках P и K . При повороте вокруг центра O на 120° $AB \rightarrow AC$, $AC \rightarrow BC$ и $l \rightarrow m$. Очевидно, что $E \rightarrow K$ и $F \rightarrow P$. Тогда $EF \rightarrow KP$ и $EF = KP$.

6. Задачи решаются аналогично задачам 5 (1, 2).

7. Необходимо осуществить поворот прямой a относительно центра P на 60° . Построение показано на рисунке 86.

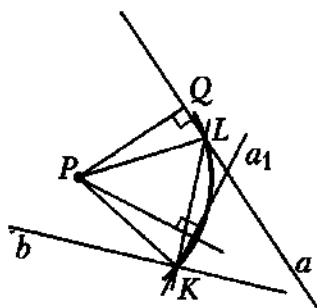


Рис. 86

2. При повороте на 90° относительно центра A $P \rightarrow B$ и $C \rightarrow M$. Следовательно, $PC \rightarrow BM$ и $PC = BM$ и $PC \perp PM$.

8. 1. Задачи решаются аналогично задачам 7 (1, 2).

9-й КЛАСС. ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К РАБОТАМ НА ПОВТОРЕНИЕ

№ 1

1. 1. 3) $4\frac{8}{13}$; 4) $9\frac{3}{13}$; 5) $\frac{S_{ADE}}{S_{DCF}} = \frac{7}{13}$.
2. 1. 3) $5\frac{5}{17}$; 4) 4,8; 5) $\frac{3600}{289}$.
3. 1. 3) $4\frac{2}{17}$, $26\frac{8}{17}$, 30; 4) 3, 15; 5) $\frac{S_{AKC}}{S_{CKB}} = \frac{64}{225}$.
4. 1. 2) 14; 3) 24; 5) $36\sqrt{3}$.
5. 1. 3) 1,6; 4) $6\sqrt{3}$; 5) $\frac{7\sqrt{3}}{15}$.
6. 1. 3) 4, $\approx 2,2$, $\approx 4,8$; 4) $\frac{P_{AKC}}{P_{ABC}} \approx 0,8$; 5) $\approx 5,9$.

№ 2

1. 2) 20; 3) $\sqrt{41}$; 4) $\approx 28^\circ 13'$. Воспользоваться тем, что $S_{APCK} = \frac{1}{2} AC \cdot PK \cdot \sin \angle AOK$.
2. 1) 50; 2) 8; 4) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$.
3. 2) $\frac{12}{5}$; 3) $36^\circ 52'$; 4) 32. Необходимо найти $\cos \angle ODF = \frac{4}{5}$.
4. 1) 20, 200; 3) $10\sqrt{2}$. Необходимо учесть, что если BP — высота трапеции, то длина отрезка PD равна ее средней линии. $S_{ABCD} = PB^2$, так как из условия следует, что $\triangle BPD$ — равнобедренный. 4) $8\sqrt{2}$, $12\sqrt{2}$. Необходимо доказать, что $TQ = \frac{AD-BC}{2}$.
5. 2) 9,6; 3) $\approx 73^\circ 44'$; 4) $\approx 44,2$. Для нахождения площади прямоугольника можно найти $\sin \angle MOF = \sin \angle BAD = 0,96$.
6. 1) 2; 2) 4π ; 3) $\sqrt{41}$, $\sqrt{137}$; 4) $\approx 58^\circ 39'$.

№ 3

1. 1) $10\sqrt{2}$; 3) $\approx 28^\circ 58'$, $\approx 241^\circ 02'$.
2. 1) 7; 2) $2\sqrt{6}$; 3) $\approx 78^\circ 28'$; 4) $\approx 13,7$.
3. 2) 6; 3) $3\sqrt{5}$; 4) $\approx 19^\circ 28'$.
4. 2) 4; 3) $\frac{10}{\sqrt{3}}$; 4) $\approx 92^\circ 23'$.

5. 1) $4:5:3$; 2) 4; 3) $8\sqrt{3}$; 4) $4(\sqrt{3}+1)$.

6. 1) $2\sqrt{3}$, $2\sqrt{6}$; 2) 120° , $\frac{4\pi}{3}$; 3) $\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$; 4) $2\sqrt{2}$.

№ 4

1. 1) $D(-2; -1)$; 2) $\overrightarrow{EB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$; 3) $\approx 81^\circ 2'$; 4) $y = -\frac{7}{2}x + \frac{3}{2}$;
 $x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{53}{4}$.

2. 1) Треугольник прямоугольный; 2) $\overrightarrow{AM} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$; 3) $\approx 35^\circ 45'$;
 4) $y = -\frac{5}{11}x + \frac{80}{11}$; $(x-1)^2 + (y-9)^2 = 50$.

3. 1) $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$; 2) $H\left(\frac{2}{3}; 2\right)$; 3) $\overrightarrow{AH} = \frac{5}{3}\vec{i} + 2\vec{j}$; 4) $\approx 88^\circ 6'$, ≈ 15 .

4. 1) $\approx 18,6$; 2) 4, $(x-4)^2 + y^2 = 16$; 3) $\approx 55^\circ 18'$; 4) $\overrightarrow{OB} = -\frac{5}{8}\overrightarrow{OA} - \frac{5}{8}\overrightarrow{OC}$.

5. 2) 200; 3) $43^\circ 36'$, $\approx 136^\circ 24'$; 4) $(x-3)^2 + (y-2)^2 = \frac{200}{29}$.

6. 1) $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BA}$; 2) $K\left(\frac{1}{3}; 2\right)$; 3) $\vec{a}\left\{-\frac{15}{\sqrt{61}}; \frac{18}{\sqrt{61}}\right\}$; 4) $\approx 129^\circ 48'$.

9-й КЛАСС. ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К КОНТРОЛЬНЫМ ЗАДАНИЯМ

№ 1

1. 1. 1) $\overrightarrow{AB} = \vec{i} + 6\vec{j}$; 3) $x = 1$. 2. 2) 3. 3. Одну общую точку.

4*. $\vec{a} + \vec{b}$ имеет координаты $\{-3; -1\}$, а вектор $\vec{c} \{6; 2\}$. Тогда

$$\vec{c} = -2\vec{a} - 2\vec{b}.$$

2. 1. 1) $A(-3; 7)$; 2) $(-2; 5,5)$; 3) $y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$.

2. $a = 6$ или $a = -4$.

3. $(x - 11)^2 + y^2 = 36$.

4*. Так как $\vec{a} \uparrow \vec{b}$, то $\vec{a} = k\vec{b}$, где $k > 0$. Пусть $\vec{a}\{x; y\}$. Тогда $x = -k, y = 2k, \sqrt{k^2 + 4k^2} = \sqrt{9 + 16}$. Так как $k > 0$, то $k = \sqrt{5}$.

Ответ. $\vec{a}\{-\sqrt{5}; 2\sqrt{5}\}$.

3. 1. 1) $\overrightarrow{EM} = 3\vec{i} + 7\vec{j}$; 3) $y = -3$. 2. 1) $(3; -1)$.

3. Две общие точки.

4*. $\vec{l} = 2\vec{m} - 2\vec{n}$.

4. 1. 1) $F(4; -5)$; 2) $(1; -2)$; 3) $y = -x - 1$.

2. $m = 7$ или $m = 1$.

3. $x^2 + (y + 6)^2 = 16$.

4. $\vec{m}\left\{\frac{2\sqrt{10}}{5}; -\frac{4\sqrt{10}}{5}\right\}$.

№ 2

1. 1. $AB \approx 25,5$, $AC \approx 24$, $\angle B = 65^\circ$, $R = 13,2$.

2. $HF \approx 6,3$, $S \approx 7,4$.

3*. $S = \frac{a^2 \sin^2 3\alpha}{2 \sin \alpha}$.

2. 1. $AC \approx 7,4$; $\angle A \approx 39^\circ 25'$, $\angle C \approx 30^\circ 35'$.

2. $S \approx 75,4$; $R = 5$.

3*. $PK = \sqrt{2S \sin \beta (\sin \alpha \sin(\alpha + \beta))^{-1}}$.

3. 1. $BC \approx 5,5$, $AB \approx 12,2$, $\angle B = 110^\circ$, $R = 8$.

2. $\angle CBD \approx 41^\circ 25'$; $S \approx 19,8$.

3*. $S = \frac{a^2 \sin^2 \frac{3\alpha}{2} \cdot \sin 2\alpha}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}$.

4. 1. $PM \approx 3,7$; $\angle M = 20^\circ 20'$; $\angle P \approx 119^\circ 40'$.
 2. $S \approx 26,3$; $R \approx 15,1$.
 3*. $R = \sqrt{S(2\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta))^{-1}}$.

№ 3

1. 1) -8 ; 2) -24 ; 3) 24 .

2. 1) $\approx 5^\circ 54'$; 2) -90 .

3*. $\vec{a} \{3; 1\}$.

2. 1) 9 ; 2) -27 ; 3) -27 .

2. 1) 45° ; 2) -40 .

$$3*. \overline{BC} \cdot \overline{AD} + \overline{CA} \cdot \overline{BE} + \overline{AB} \cdot \overline{CF} = \overline{BC} \frac{\overline{AB} + \overline{AC}}{2} + \overline{CA} \frac{\overline{BA} + \overline{BC}}{2} + \overline{AB} \frac{\overline{CA} + \overline{CB}}{2} = \\ = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AB} + \overline{BC} \cdot \overline{AC} + \overline{CA} \cdot \overline{BA}}{2} - \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BC} + \overline{AB} \cdot \overline{BC} + \overline{CA} \cdot \overline{BA}}{2} = 0.$$

3. 1. 1) 12 ; 2) -4 ; 3) 0 .

2. 1) $\approx 15^\circ 57'$; 2) -36 . 3*. $\vec{m} \{-2; -4\}$.

4. 1. 1) 54 ; 2) -18 ; 3) 0 .

2. $\approx 60^\circ 15'$; 2) 0 .

$$3. \overline{MA} \cdot \overline{MC} = (\overline{MD} + \overline{DA}) \cdot (\overline{MB} + \overline{BC}) = \\ = \overline{MD} \cdot \overline{MB} + \overline{DA} \cdot \overline{MB} + \overline{MD} \cdot \overline{BC} + \overline{DA} \cdot \overline{BC} = \overline{MD} \cdot \overline{MB} + \overline{DA} \cdot \overline{MC} + \overline{MD} \cdot \overline{BC} = \\ = \overline{MD} \cdot \overline{MB} + \overline{DA} \cdot \overline{MC} - \overline{DA} \cdot \overline{MD} = \overline{MD} \cdot \overline{MB} + \overline{DA} \cdot \overline{DC} = \\ = \overline{MD} \cdot \overline{MB} + 0 = \overline{MD} \cdot \overline{MB}.$$

№ 4

1. 1. π ; $6\sqrt{3}$. 2. $\frac{5\pi}{2}$, $\frac{25\pi}{4}$.

3. $\frac{R^2}{2}(\pi + \sqrt{3})$. Площадь фигуры складываем из площади прямоугольного треугольника BAC с катетами R и $R\sqrt{3}$ и площади полукруга.

4*. Пусть длины перпендикуляров, опущенных из точки M на стороны многоугольника, равны $l_1, l_2, \dots, l_n$. Рассмотрим треугольники с вершиной в точке M и с основаниями, которыми служат стороны многоугольника. Тогда площадь многоугольника равна $\frac{1}{2}a_n(l_1 + l_2 + \dots + l_n)$, где a_n — сторона многоугольника. С другой стороны, площадь многоугольника равна $\frac{\pi a_n^2}{2} \cdot r_n$, где r_n — радиус вписанной окружности. Тогда $l_1 + l_2 + \dots + l_n = r_n \cdot n$.

2. 1. 48π , $48\sqrt{3}$. 2. 2π , 6π . 3. $\frac{R^2}{2}(\pi - 2)$. Площадь фигуры можно получить как разность площади полукруга и площади прямоугольного треугольника, катеты которого равны $R\sqrt{2}$.

3. 1. 8π , 32 . 2. $\frac{8\pi\sqrt{3}}{3}$, 16π . 3. $\frac{R^2}{2}(\pi - \sqrt{3})$.

4*. Рассмотрим четырехугольник, образованный двумя соседними сторонами правильного $2n$ -угольника AB и BC и радиусами OA и OC , где O — центр многоугольника. В таком случае, AC — сторона правильного n -угольника. Так как $AC \perp OB$, то $S_{OABC} = \frac{1}{2} AC \cdot OB = \frac{a_n R}{2}$. Наш $2n$ -угольник состоит из n таких четырехугольников. Поэтому $S_{2n} = \frac{na_n R}{2}$.

4. 1. 4π ; $\frac{4\pi}{\sqrt{3}}$. 2. 6, 6π . 3. $\frac{R^2}{2}(\pi + 2)$.

№ 5

1. 1. 2) 90° . 2. Величины углов равны и стороны сонаправлены.

3. Нужно доказать, что прямая, содержащая середины параллельных хорд, является осью симметрии окружности.

4*. Центром поворота является точка пересечения серединных перпендикуляров AC и BD .

2. 1. 2) 60° . 4*. Строим треугольник $A_1B_1C_1$, равный данному треугольнику ABC так, чтобы его основание A_1C_1 лежало на прямой a . Затем через вершину B_1 проводим прямую, параллельную a , до пересечения с прямой b в точке B_2 . После этого осуществляем перенос треугольника $A_1B_1C_1$ на вектор $\overrightarrow{B_1B_2}$.

3. 1. 2) 90° .

2. Величины углов должны быть равны, а стороны противоположно направлены.

4*. Необходимо построить образ этой прямой при повороте на 60° вокруг данной точки H по часовой стрелке (против часовой стрелки) и затем найти точки пересечения образа этой прямой с окружностью. Дальнейшее решение очевидно.

4. 1. 2) 60° .

4*. Пусть a пересекает c в точке X , а b пересекает d в точке Y . Тогда $\overrightarrow{XY}$ — искомый вектор.

№ 6

1. 1) 4 см, 5 см, 6 см²; 2) π см²; 3) 3 : 4; 4) $0,64\overline{CA} + 0,36\overline{CB}$; 5) 9.

2. 1) $3\sqrt{3}$ см, $6\sqrt{3}$ см, $36\sqrt{3}$ см²;

2) Треугольник правильный $4\pi\sqrt{3}$ см. 3) $2\sqrt{63}$; 4) $-\overline{CD} + 0,5\overline{CB}$; 5) 0.

3. 1) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ см, $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ см²; 2) 9 : 25;

3) $\frac{14\sqrt{3}}{3}$ см; 4) $\frac{1}{3}\overline{BD} + \frac{4}{3}\overline{BA}$; 5) $\frac{4}{3}$.

4. 1) 12 см², $\frac{24}{25}$; 2) 3,6 см; 3) $6,25\pi$ см; 4) $\overline{AC} + 0,72\overline{CB}$; 5) 0.

10-й КЛАСС. ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ ДЛЯ УРОКА

§ 1

1. 2. Да, пересекаются.

3. 1. Точки A , M и B должны лежать на одной прямой.

2. 1) Прямая EF пересекает BC в точке X , а B_1C_1 — в точке Y . Тогда X — точка пересечения EF с плоскостью ABC , а Y — с плоскостью $A_1B_1C_1$.

2) Линией пересечения плоскостей ADF и EFD является прямая FD .

3) Линией пересечения плоскостей EFD и ABC является прямая XD .

5. 1. При условии, что $BO = OC$.

2. Пусть AB_1 и A_1B пересекаются в точке X , а BC_1 и B_1C — в точке Y . Тогда можно доказать, что XY — линия пересечения плоскостей AB_1C и $A_1B_1C_1$.

6. 1. При условии, что $AE : EC = 2 : 3$.

2. Пусть ME пересекается с PT в точке X . Тогда можно доказать, что XK — линия пересечения плоскостей PTK и MCE .

7. 1. Пусть BK пересекает AC в точке P , а PD пересекает EF в точке L . Искомой точкой X является точка пересечения DK и LM . Это требует доказательства.

2. Если $\angle C = 90^\circ$, то центр описанной окружности O принадлежит AB . Через эту прямую можно провести плоскость, в которой только C не лежит. Поэтому точка C не обязательно лежит в плоскости ABC .

8. 1. Пусть DM пересекает BC в точке L , а AL пересекает BE в точке P . Искомой точкой Y является точка пересечения AM и DP . Это требует доказательства.

2. Не обязательно.

§ 2

1. 1. 1) Прямая BC .

2) Любая прямая, лежащая в плоскости β и проходящая через точку C , но не совпадающая с BC .

3) Таких прямых нет.

2. 1. 1) Таких прямых нет.

2) Любая прямая, лежащая в плоскости β и проходящая через точку C , но не параллельная EF .

3) Прямая, проходящая через точку C и параллельная прямой EF .

4. 2. Нет, не лежит.

5. 1. Прямые EF и a , EF и b — скрещивающиеся, т. к. в противном случае прямые AA_1 и BB_1 лежали бы в одной плоскости, что невозможно.

6. 1. Задача решается аналогично задаче 5 (1).

7. 1. Прямые c и a лежат в одной плоскости и не пересекаются. Если предположить, что c и a пересекаются в точке X , то тогда легко установить, что точка X принадлежит трем плоскостям α , β и γ , а значит, что она лежит и на линиях пересечения этих плоскостей, взятых попарно. Но тогда прямые a и b будут иметь общую точку X , что противоречит условию. Аналогично доказывается, что $c \parallel b$.

2. Рассмотрим отрезки A_1F и C_1E . $EF \parallel AC$, т.к. EF — средняя линия треугольника ABC . Легко доказать, что $AC \parallel A_1C_1$. Отсюда следует, что $EF \parallel A_1C_1$. В таком случае EFC_1A_1 — трапеция, основания которой EF и A_1C_1 , причем $EF : A_1C_1 = 1 : 2$. Пусть диагонали этой трапеции A_1F и C_1E пересекаются в точке K . Из подобия треугольников A_1KC_1 и EKF следует, что $A_1K : KF = C_1K : KE = 1 : 2$. Рассмотрим теперь отрезки A_1F и B_1M . Аналогично можно доказать, что они пересекаются в некоторой точке K_1 , причем $A_1K_1 : K_1F = B_1K_1 : K_1M = 1 : 2$. В таком случае точки K и K_1 совпадают. Этим и доказывается данное утверждение.

8. 1. Через прямую a и точку M проходит плоскость α . Если эта плоскость пересекает прямую b в некоторой точке X , то прямая XM , если она не параллельна a , является искомой.

2. Легко доказать, что CC_1B_1B , AA_1C_1C и AA_1B_1B — параллелограммы и точки F , E и M — точки пересечения их диагоналей; EF — средняя линия треугольника AC_1B и $EF = \frac{1}{2}AB$. Аналогично, $MF = \frac{1}{2}AC$ и $EM = \frac{1}{2}BC$. Отсюда следует подобие треугольников EMF и ABC по трем сторонам.

§ 3

2. 1. $BF : FC = 2 : 3$.

3. 1. Прямая b либо параллельна плоскости α , либо лежит в этой плоскости.

2. 2) 50° .

4. 2. 2) 80° .

5. 1. Необходимо доказать, что четырехугольник $PKHM$ является параллелограммом.

2. 2) $OO_1 \parallel AA_1$.

3) 60° .

6. 1. Задача решается аналогично задаче 5 (1).

2. 2) $KK_1 \parallel BC$.

3) 70° .

7. 1. Пусть ME и MF медианы треугольников AMD и DMC . Рассмотрим треугольники EMF и HMH_1 , $\frac{MH}{ME} = \frac{MH_1}{MF} = \frac{2}{3}$. Кроме того, у этих треугольников $\angle EMF$ — общий. Отсюда следует, что $\triangle EMF$ подобен $\triangle HMH_1$.

В таком случае $HH_1 \parallel EF$, т. к. EF — средняя линия треугольника ADC , то $EF \parallel AC$. Поэтому $HH_1 \parallel AC$ и HH_1 параллельна плоскости AMC .

2. MF и EF — линия пересечения плоскости MFE с плоскостями CDB и ABC . Линия пересечения с плоскостью ADC проходит через точку M и параллельна AC . Пусть ее точка пересечения с AD есть точка P . Тогда PE — линия пересечения с плоскостью ADB , $PMFE$ — параллелограмм, $\angle EFM$ — угол между скрещивающимися прямыми AC и DB , $EF = 5$; $MF = 10$, $S = EF \cdot MF \sin \angle EFM$, $25\sqrt{3} = 50 \sin \angle EFM$; $\sin \angle EFM = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\angle EFM = 60^\circ$ (угол между скрещивающимися прямыми острый или прямой).

8. 1. Да, параллельны.

2. 200. Задача решается аналогично задаче 7 (2).

§ 4

3. 2. Если прямые AB и CD скрещивающиеся, то AD и BC тоже скрещивающиеся прямые. Если же $AB \parallel CD$, то AD и BC пересекаются или параллельны.

4. 2. AC и BD скрещивающиеся, пересекающиеся или параллельные. См. ответ к задаче 3 (2).

5. 1. 10 см; 12,5 см.

2. О положении плоскостей судить нельзя.

6. 1. 10 см; 15 см.

2. Прямые должны пересекаться или скрещиваться.

7. 1. Через точку M проводим прямую, параллельную BB_1 до пересечения с AC в точке E . Через точку E проводим прямую, параллельную KB до пересечения с прямой AB в точке P . Через точку P проводим прямую, параллельную BB_1 . Легко доказать, что эта прямая является линией пересечения указанной плоскости с плоскостью ABB_1 .

2. В плоскости, проходящей через точку M и параллельно плоскости α .

8. 1. Задача решается аналогично задаче 7 (1).

§ 5

1. 2. $2\sqrt{3}$ см².

2. 2. $4\sqrt{3}$ см².

3. 2. $4\sqrt{33}$ см².

4. 1. 90° .

2. 48 см².

5. 2. Каждые два из указанных отрезков являются диагоналями параллелограмма, причем стороны этого параллелограмма являются средними линиями соответствующих граней тетраэдра. Для доказательства следует воспользоваться теоремой о сумме квадратов диагоналей параллелограмма.

6. 2. Рассмотрите любые два отрезка указанных прямых и докажите, что, пересекаясь, они делятся в настоящем отношении (1 : 3).

7. 1. Для решения задачи нужно доказать, что $ABCD$ — параллелограмм. Пусть указанные отрезки пересекаются в точке O . AA_1C_1C — параллелограмм, т.к. $AA_1 \parallel CC_1$ и $AA_1 = CC_1$. Тогда $A_1O = OC$ и $AO = OC_1$. BB_1D_1D — параллелограмм, т.к. $BB_1 \parallel DD_1$ и $BB_1 = DD_1$. Тогда $B_1O = OD$ и $BO = OD_1$. В четырехугольнике A_1B_1CD $A_1O = OC$ и $B_1O = OD$. В таком случае A_1B_1CD — параллелограмм и $A_1B_1 \parallel CD$, но $A_1B_1 \parallel AB$, а потому $AB \parallel CD$. Аналогично можно доказать $BC \parallel AD$ и тогда $ABCD$ — параллелограмм. В таком случае $ABCD A_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед.

2. Необходимо сделать развертку боковой поверхности тетраэдра (рис. 87). Наименьший путь равен длине отрезка AA' . $\angle ADA' = 30^\circ \cdot 3 = 90^\circ$. Тогда $AA' = 3\sqrt{2}$ см.

8. 1. Плоскости BDA_1 и AA_1C_1 пересекаются по прямой A_1O , где O — точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$. AC_1 пересекает A_1O в точке M . Это и есть точка пересечения AC_1 и плоскости BDA_1 . Обозначим точку пересечения AC_1 и A_1C через P . Тогда AP и A_1O — медианы треугольника AA_1C . В таком случае $A_1M : MO = 2 : 1$, а это и означает, что M — точка пересечения медиан сечения BDA_1 .

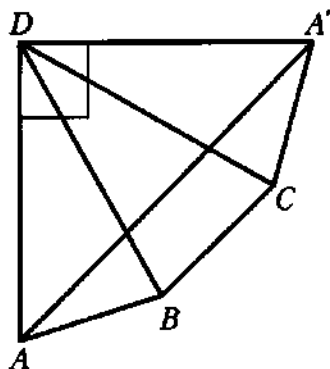


Рис. 87

2. 12 см. Задача решается аналогично задаче 7 (2).

§ 6

1. 2. $(10 + 12\sqrt{2})$ см.

2. 1. 15.

3. 1. $\frac{a^2\sqrt{11}}{64}$.

4. 1. $\frac{a^2\sqrt{2}}{16}$.

5. 1. Построение сечения показано на рис. 88. Необходимо доказать, что в сечении получился правильный шестиугольник со стороной, равной $4\sqrt{2}$ см. Его площадь равна $48\sqrt{3}$ см².

2. Построение сечения показано на рис. 89. Секущая плоскость пересекает плоскость BDC по прямой CX , параллельной DE . Доказательство построения очевидно.

6. 1. Построение сечения показано на рис. 90. Необходимо доказать, что в сечении получился правильный шестиугольник со стороной, равной $2\sqrt{2}$ см. Его площадь равна $12\sqrt{3}$ см².

2. Задача решается аналогично задаче 5 (2).

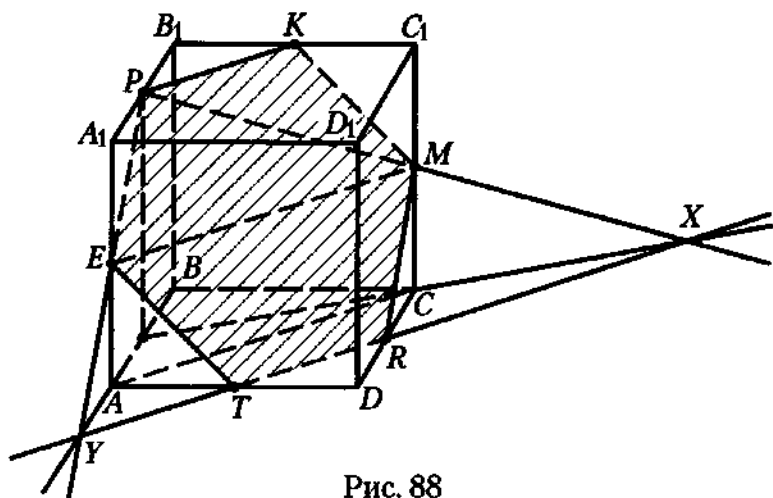


Рис. 88

7. 1. Построение сечения показано на рис. 91. В сечении получилась трапеция $KPTL$, у которой основание $KL = \frac{3a}{4}$ и $PT = \frac{a}{2}$. Высота трапеции $FM = \frac{b}{2}$. Тогда площадь трапеции равна $\frac{5ab}{16}$.

2. Построение сечения показано на рис. 92. При построении использовалось свойство параллельных плоскостей.

8. 1. Сечением является параллелограмм, стороны которого равны 8 и 3, а угол — 60° . Тогда площадь сечения равна $12\sqrt{3}$.

2. Задача решается аналогично задаче 7 (2).

§ 7

1. 1. 2.

2. 1. 2.

2. Линия пересечения параллельна прямым AD и BE .

3. 1. 24.

2. $b \parallel c$.

4. 1. 2.

2. $b \parallel c$.

5. 1. 13.

2. Точка пересечения прямой b с плоскостью α есть точка пересечения прямой AM с прямой b . Точкой пересечения прямой a с плоскостью β является точка пересечения a с прямой, проходящей через точку B и параллельной прямой AM .

6. 1. 8 см.

2. Задача решается аналогично задаче 5 (2).

7. 1. Рассмотрим случай, когда вершина параллелограмма расположена по одну сторону от плоскости α . Пусть AC и BD пересекаются в точке O ,

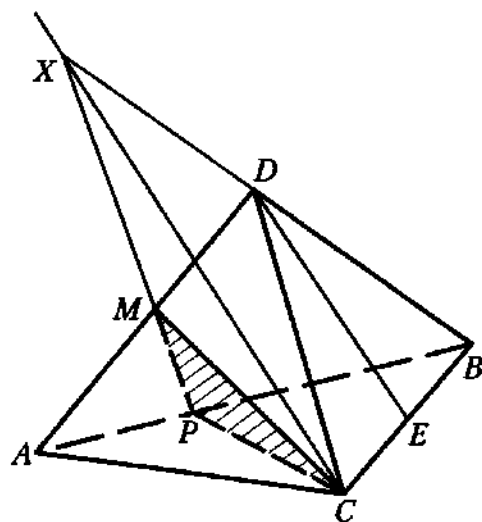


Рис. 89

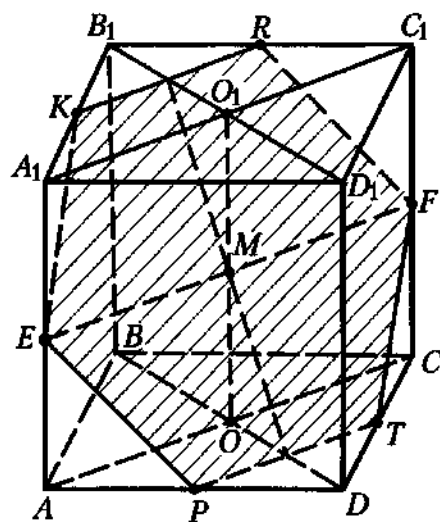


Рис. 90

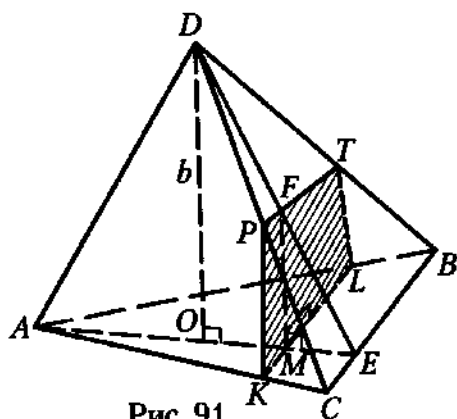


Рис. 91

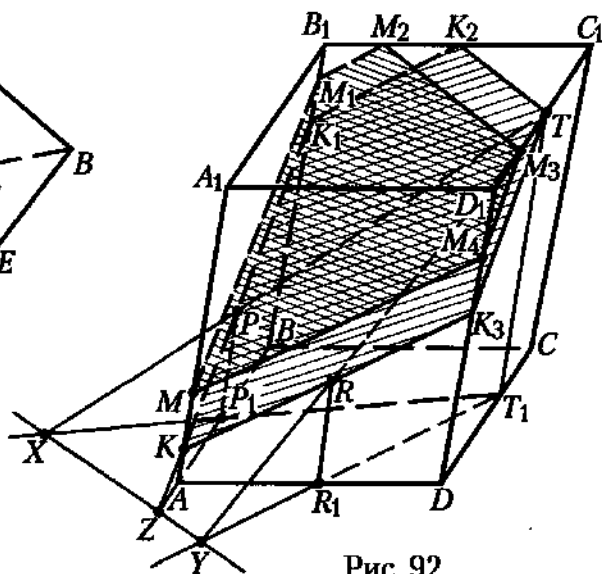


Рис. 92

а A_1C_1 и B_1D_1 — в точке O_1 . Легко доказать, что OO_1 параллельна прямым AA_1 , BB_1 , CC_1 и DD_1 . В таком случае OO_1 — средняя линия в трапециях ACC_1A_1 и BDD_1B_1 . $OO_1 = \frac{1}{2}(AA_1 + CC_1)$ и $OO_1 = \frac{1}{2}(BB_1 + DD_1)$. Отсюда $AA_1 + CC_1 = BB_1 + DD_1$. Исходя из условий задачи $13 + 19 = 36 + DD_1$, чего быть не может. Это означает, что точка D находится по другую сторону от плоскости по отношению к точкам A , B и C . В таком случае в плоскости BB_1D_1D мы имеем пересекающиеся отрезки BD и B_1D_1 , $BB_1 \perp B_1D_1$ и $DD_1 \perp B_1D_1$, $BB_1 = 36$. Расстояние OO_1 между серединами BD и B_1D_1 равно 16. Тогда легко получить, что $DD_1 = 4$.

2. Рассмотрим две точки A и B и искомую прямую m . Множеством точек, одинаково удаленных от точек A и B , является плоскость α , перпендикулярная AB и проходящая через середину AB . Если $m \parallel \alpha$, то таких точек нет, если α пересекает прямую m , то искомой является эта точка пересечения, если m лежит в плоскости α , то условию удовлетворяет каждая точка прямой m .

8. 1. Легко доказать, что $AB \parallel \alpha$ и $AB = A_1B_1 = 19$. Через точку C проведена плоскость β , параллельная плоскости α . Эта плоскость пересекает BB_1 в точке B_2 , а AA_1 — в точке A_2 . $CB_2 = 11$ см; $CA_2 = 12$ см и $A_2B_2 = 19$ см. Треугольники CB_2B и CA_2A — прямоугольные. Пусть $BB_2 = AA_2 = x$. $CB^2 = x^2 + 121$; $CA^2 = x^2 + 144$; $AB^2 = CA^2 + CB^2$; $x^2 + 121 + x^2 + 144 = 361$. Отсюда $x^2 = 48$. $CA = \sqrt{48 + 121} = 13$; $CB = \sqrt{48 + 144} = 8\sqrt{3}$. $S_{ACB} = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{3} \cdot 13 = 52\sqrt{3}$ см².

2. Множеством точек, равноудаленных от двух данных точек A и B является плоскость β , перпендикулярная к AB и проходящая через середину AB . Если плоскость β пересекает данную плоскость α , то искомым множеством является линия пересечения плоскостей α и β . Если $\beta \parallel \alpha$, то таких точек нет. Если же α и β совпадут, то данному условию удовлетворяет любая точка плоскости α .

§ 8

1. 2. 84.
2. 2. 24.
3. 2. 7.
4. 2. 3 см.

5. 1. Из равенства треугольников DBC и DBA вытекает, что $DA = DC$. Пусть E — середина AC , тогда DE и BE медианы треугольников ABC и ADC . Так как эти треугольники равнобедренные, то $AC \perp EB$ и $AC \perp ED$, т. е. AC — перпендикуляр к плоскости DEB , а значит, $AC \perp DB$.

2. Пусть F — середина DB . Так как все грани тетраэдра правильные треугольники, то $CF \perp DB$ и $AF \perp DB$. Строим $EM \parallel CF$ и $MK \parallel AF$, $M \in DB$. Тогда треугольник KME — искомое сечение. Его площадь равна $\frac{a^2\sqrt{2}}{16}$.

6. 1. Задача решается аналогично задаче 5 (1).

2. Строим FE параллельно AC и соединяем точки E и B ; FEB — искомое сечение. Легко доказать, что $FE \perp CD$ и $EB \perp CD$, т.е. плоскость FEB перпендикулярна CD .

7. 1. Треугольники AA_1D_1 и AA_1B_1 равны, а потому $AB_1 = AD_1$. Пусть O — середина отрезка B_1D_1 . Тогда $B_1D_1 \perp AO$ и $B_1D_1 \perp A_1C_1$, т.е. B_1D_1 — перпендикуляр к плоскости ACC_1 , а потому $B_1D_1 \perp A_1C$, т.к. A_1C лежит в этой плоскости.

2. Через точку M проводим прямую, параллельную AC , через точку пересечения этой прямой с ребром AA_1 , проводим прямую, параллельную AB . Дальнейшее построение очевидно.

8. Задачи решаются аналогично задачам 7(1) и 7(2).

§ 9

1. $6\sqrt{5}$ см.

2. 4 см.

3. 15.

4. 54.

5. 12 см. Необходимо воспользоваться теоремой о сумме квадратов диагоналей параллелограмма.

6. Пусть AA_1 , BB_1 , XX_1 и DD_1 — перпендикуляры к плоскости α . Плоскости, определенные параллельными прямыми AA_1 , XX_1 и BB_1 , DD_1 , пересекаются по прямой OO_1 . Очевидно, что $OO_1 \perp \alpha$ и $OO_1 = 15$ см. Пусть $AA_1 = x$. Так как средняя линия трапеции удалена от плоскости α на расстояние, равное 13, то $BB_1 = 26 - x$. Рассмотрим трапецию BDD_1B_1 . Так как основания трапеции относятся как 1:2, то очевидно, что и $BO : OD = 1 : 2$. Итак, в трапеции BDD_1B_1 $BB_1 = 26 - x$, $DD_1 = x$, $OO_1 \parallel BB_1$, причем $BO : OD = 1 : 2$. Отсюда легко найти, что $x = 7$. Тогда расстояния от оснований до плоскости α равны 7 см и 19 см.

7. В треугольнике MBD необходимо опустить перпендикуляр OK на прямую MD , где O — точка пересечения диагоналей квадрата. Легко доказать, что OK — искомое расстояние. Из подобия треугольников MBD и OKD находим, что $OK = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

8. Из точки C опустим перпендикуляр CC_1 на плоскость α ; $CC_1 = 20$. Из треугольника CC_1D находим, что $DC_1 = 15$. Легко доказать, что искомое расстояние будет равно высоте треугольника BC_1D , опущенной на сторону DC_1 .

Ответ: 11,2.

§ 10

1. 1. 8.

2. $55^\circ 33'$; $23^\circ 35'$.

2. 1. a .

2. $29^\circ 56'$; $19^\circ 28'$.

3. 1. a .

2. $51^\circ 45'$.

4. 1. $\frac{m}{2}$.

2. $28^\circ 42'$.

5. 1. Точка M лежит в плоскости трапеции.

2. $32^\circ 57'$. Пусть $MM_1 \perp ABC$. M_1 лежит на биссектрисе угла BAD . Опустим из точки M_1 перпендикуляр M_1E на сторону AD и соединим точки M и E . Легко доказать, что $ME \perp AD$. Пусть $AM = a$. Тогда из треугольника AME находим AE , а затем из треугольника $AEM_1 - AM_1$. Зная AM_1 , находим косинус искомого угла.

6. 1. 4.

2. $57^\circ 12'$. Задача решается аналогично задаче 5(2).

7. 1. Пусть $KK_1 \perp ABC$ ($K_1 \in CD$). Очевидно, что $AK_1 \parallel FK$. Легко доказать, что в квадрате отрезки BE и AK_1 взаимно перпендикулярны. Тогда, используя теорему о трех перпендикулярах, можно доказать, что $B_1E \perp AK_1$, а так как $FK \parallel AK_1$, то и $B_1E \perp FK$.

2. $48^\circ 35'$. Вершина D проектируется в центр O правильного треугольника ABC . Опустим перпендикуляр AM на плоскость CDB . Необходимо доказать, что точка M лежит на высоте DF грани CDB . $\angle ACM$ — искомый. Для нахождения синуса этого угла достаточно найти высоту AM треугольника ADF .

8. 2. $50^\circ 46'$. Обе задачи решаются аналогично задачам 7(1), 7(2).

§ 11

1. 1. 90° .

2. 60° .

2. 2. 45° .

3. 1. 4,5 см.

2. 45° .

4. 1. 62,5 см.

2. 45° .

5. 1. 24 см.

2. $118^\circ 4'$.

6. 1. 3.

2. $87^\circ 48'$.

7. 1. Необходимо построить линейный угол, одна из сторон которого проходила бы через данную точку X . Стороны этого угла параллельны высотам, опущенным на общую сторону треугольников.

2. 120° . Необходимо из точки O пересечения диагоналей квадрата опустить перпендикуляр OK на ребро MD и точку K соединить отрезками

с вершинами A и C . Тогда $\angle AKC$ — линейный угол искомого двугранного угла. Из треугольника BMD находим, что $OK = \frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$.

Дальнейшее решение очевидно.

8. 1. Задача решается аналогично задаче 7(1).

2. 120° . Ребром двугранного угла является прямая B_1D . Линейным углом двугранного угла является угол, образованный высотами A_1K и C_1K равных треугольников B_1A_1D и B_1C_1D , опущенными на общее основание B_1D . Легко подсчитать, что этот угол равен 120° .

§ 12

1. 2. 2) 2.

2. 2. 2) 6.

3. 1. 2.

2. 1) 4.

4. 1. 6.

2. 1) 2.

5. 1. $\frac{\sqrt{337}}{5}$.

2. $\frac{4\sqrt{1045}}{17}$ (рис. 93).

На этом рисунке $AE \perp A_1D$, $EF \parallel CD$ и $QP \parallel AE$, QP — общий перпендикуляр скрещивающихся прямых AB и B_1D .

6. 1. 5.

2. $\frac{5\sqrt{34}}{3}$ см. Задача решается аналогично задаче 5 (2).

7. 1. Пусть $AC = CB = x$. Тогда $AB = x\sqrt{2}$ (рис. 94). Из прямоугольных треугольников AEC и CEB имеем $AE = BE = \sqrt{x^2 - 4}$. Из треугольника EFB : $EF = \sqrt{x^2 - 4} - 15 = \sqrt{x^2 - 19}$, $AF = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{x^2 - 19}$. Из треугольника AFB получаем уравнение

$$2x^2 = x^2 - 4 + x^2 - 19 + 2\sqrt{(x^2 - 4)(x^2 - 19)} + 15.$$

Отсюда $x^4 - 23x^2 + 60 = 0$ и $x^2 = 20$. Тогда $S_{ACB} = 10$. Ответ: 10 см^2 .

2. На рис. 95 показано искомое сечение $ML \parallel EF$; $EF = \frac{5}{2}$; $ML = 5$. Строим $PK \perp EF$ и точки O и K соединяем отрезком. Тогда $OK \perp EF$. PK равняется половине высоты треугольника ADC , т. е. $PK = \frac{6}{5}$. Из треугольника OPK имеем:

$$OK = \sqrt{\frac{36}{25} + 49} = \sqrt{\frac{1261}{5}}. S_{MLFE} = \frac{1}{2}(EF + MD)OK = \frac{3}{4}\sqrt{1261}.$$

Тогда $S_{\text{сечения}} = 2S_{MLFE} = \frac{3}{2}\sqrt{1261}$.

Ответ: $\frac{3}{2}\sqrt{1261} \text{ см}^2$.

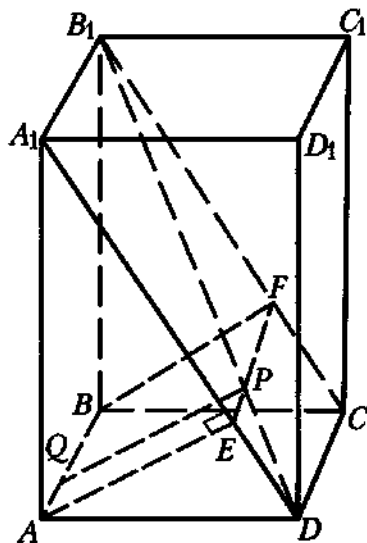


Рис. 93

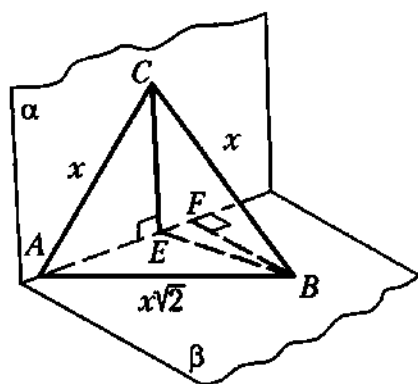


Рис. 94

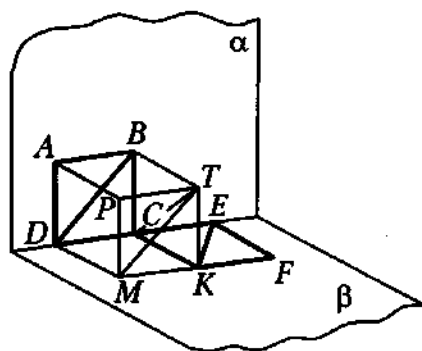


Рис. 96

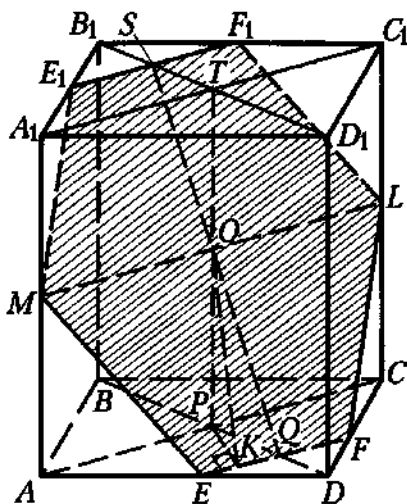


Рис. 95

8. 1. Построим квадрат $DCMK$, как это показано на рис. 96. Тогда $CM \parallel EK$. На квадрате $DCMK$ построим куб. Очевидно, что $MT \parallel DB$. Треугольник MTC — равносторонний и $\angle CMT = 60^\circ$, а это и есть угол между данными скрещивающимися прямыми. Ответ: 60° .

2. Построение сечения показано на рис. 97. $MN \parallel B_1D$ и $KL \parallel AC$. Строим $BP \perp EF$. Тогда и $MP \perp EF$. $S_{\text{сечения}} = S_{KML} + S_{EKLF}$. Пусть $MP = h$. $S_{KML} = \frac{1}{2}AC \cdot QM$; ($KL = AC$); $S_{EKLF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot AC \cdot QP$. Из подобия треугольников MBP и QTP следует, что $MQ = \frac{2}{3}h$

и $QP = \frac{h}{3}$. Тогда $S_{\text{сечения}} = \frac{1}{2}AC \cdot \frac{2}{3}h + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot AC \cdot \frac{h}{3} = \frac{7 \cdot AC \cdot h}{12}$. Легко получить, что $BP = \frac{18}{5}$, $MB = \frac{3}{4}$, $BB_1 = \frac{21}{2}$. Это следует из подобия треугольников B_1BD и MBN . Тогда из треугольника MBP следует, что $MP = h = \sqrt{\frac{441}{4} + \frac{324}{25}} = \frac{111}{10}$. $S_{\text{сечения}} = \frac{7 \times 5 \times 111}{12 \times 10} = \frac{259}{8}$. Ответ: $\frac{259}{8}$.

§ 13

1. 60° .
2. $8\sqrt{2} \text{ см}^2$.

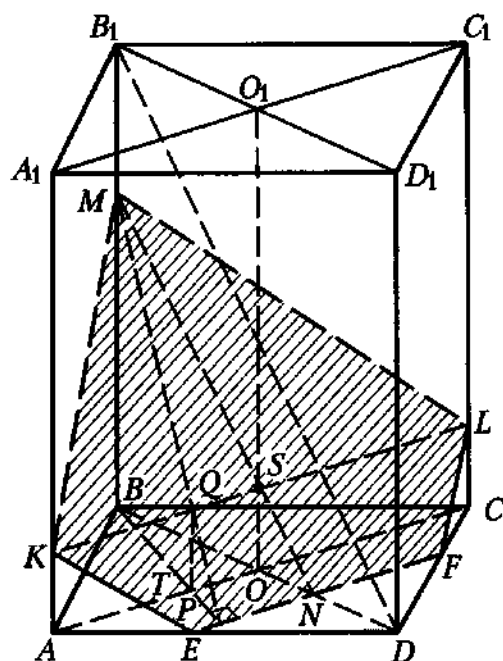


Рис. 97

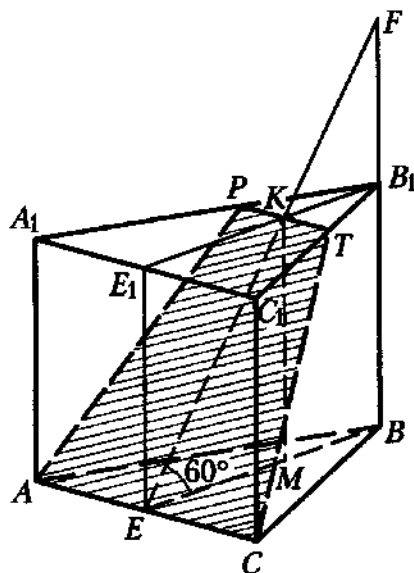


Рис. 98

2. 1. 45° .

2. $2\sqrt{3}$ см².

3. 1. $3\sqrt{7}$ см².

2. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, $\frac{a^2\sqrt{6}}{2}$.

4. 1. $\frac{3a^2\sqrt{2}}{4}$.

2. $\frac{m\sqrt{6}}{2}$; $m^2\sqrt{2}$.

5. 1. Построение сечения показано на рис. 98; $BE = \frac{2\sqrt{3} \times \sqrt{3}}{2} = 3$;

$FB = 3\sqrt{3}$. Тогда $FB_1 = \sqrt{3}$. Из подобия треугольников FB_1K и FBE следует,

что $\frac{KB_1}{EB} = \frac{1}{3}$ и $KB_1 = 1$. Из подобия треугольников PB_1T и $A_1B_1C_1$ следует,

что $\frac{PT}{A_1C_1} = \frac{1}{3}$ и $PT = \sqrt{3}$. Из треугольника KME ($\angle KME = 90^\circ$) имеем, что

$$KE = \frac{2\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = 4; S_{\text{сечения}} = \frac{1}{2}(PT + AC) \cdot KE = \frac{16\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: $\frac{16\sqrt{3}}{3}$.

2. $2Q$.

6. 1. $30\sqrt{2}$ см². Задача решается аналогично задаче 5 (1).

2. $Q\sqrt{3}$.

7. 1. Необходимо построить призму до прямого параллелепипеда $ABCD_1B_1C_1D_1$, основанием которого будет ромб $ADBC$. В таком случае

угол между AC_1 и B_1C равен величине угла D_1AC_1 . Этот угол можно найти, используя теорему косинусов, из треугольника D_1AC_1 , где $AD_1 = AC_1 = a\sqrt{2}$ и $D_1C_1 = a\sqrt{3}$ (ребро призмы принято за a).

Ответ: $\arccos \frac{1}{4} \approx 75^\circ 31'$.

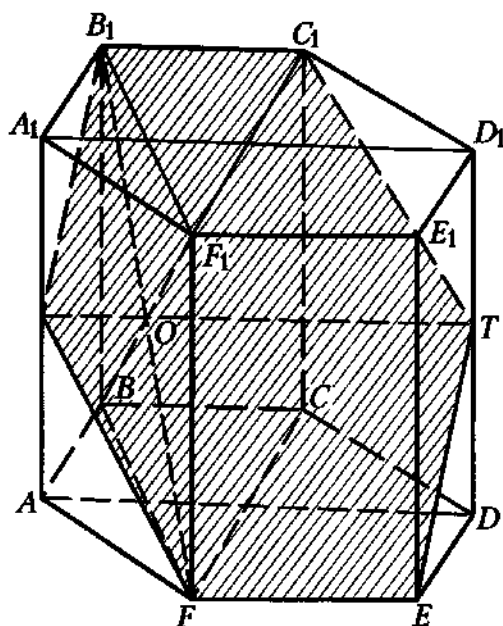


Рис. 99

2. Искомое сечение изображено на рис. 99. Сечение строим перпендикулярно диагонали F_1B . Следует отметить, что т. к. B_1F_1FB — квадрат, то меньшая диагональ F_1B перпендикулярна B_1F . Кроме того, легко доказать, что $F_1B \perp BC$, а т. к. $PT \parallel BC$, то $BF_1 \perp PT$. Таким образом, диагональ F_1B перпендикулярна двум пересекающимся прямым PT и B_1F , которые и задают плоскость сечения. Плоскость сечения составляет с основанием угол 45° . Тогда $S_{\text{сечения}} = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos 45^\circ} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}} =$

$$= \frac{3a^2\sqrt{6}}{2}.$$

Ответ: $\frac{3a^2\sqrt{6}}{2}$.

8. 1. $\arccos \frac{2\sqrt{2}}{5} \approx 55^\circ 33'$. Задача решается аналогично задаче 7 (1).

2. Искомое сечение изображено на рис. 100. Следует отметить, что FF_1C_1C — квадрат, а потому $F_1C \perp C_1F$. Кроме того, $F_1C \perp AE$, а т. к. $PQ \parallel AE$, то $F_1C \perp PQ$. Таким образом, диагональ F_1C — перпендикуляр двум пересекающимся прямым C_1F и PQ , которые задают плоскость сечения. При построении учитывалось, что плоскость сечения пересекает плоскость BB_1D_1 по прямой MT , параллельной PQ . Плоскость сечения составляет с плоскостью основания угол 45° . $S_{\text{сечения}} = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos 45^\circ} = \frac{3a^2\sqrt{6}}{2}$.

Ответ: $\frac{3a^2\sqrt{6}}{2}$.

§ 14

1. $12\sqrt{39}$.
2. $50(\sqrt{2} + 1)$.
3. $\frac{21}{13}(7\sqrt{3} + 1)$.

4. $\frac{2310\sqrt{3}}{13}$.

5. $36(7 + 6\sqrt{11})$.

6. $30(3\sqrt{161} + 28)$.

7. Пусть диагонали основания пересекаются в точке O . Тогда $AO = 3$; $\angle BB_1D = 60^\circ$. В плоскости BB_1D опускаем из точки O перпендикуляр OK на B_1D . Можно доказать, что длина OK есть расстояние между AC и B_1D , которое равно 2. Дальнейшее решение очевидно.

Ответ: $\frac{16}{3}(10\sqrt{3} + 9)\text{см}^2$.

8. Расстояние между AD и D_1C равно расстоянию между AD и плоскостью сечения BA_1D_1C . Из точки A опускаем перпендикуляр AM на прямую BC (M не принадлежит стороне BC) и точку M соединяем с

точкой A_1 . В треугольнике A_1AM опускаем высоту AK на A_1M . Можно доказать, что длина AK и есть расстояние между AD и D_1C , которое равно $\frac{12}{5}$. Из треугольника A_1AM находим, что $AM = 3$. Дальнейшее решение очевидно.

Ответ: $44\sqrt{3}\text{см}^2$.

§ 15

1. $2. 350\text{см}^2$.

2. $2. 75\text{см}^2$.

3. $1. ab$.

2. $120^\circ; 60^\circ$.

4. $1. ab\sqrt{2}$.

2. $60^\circ; 120^\circ$.

5. $1. \frac{1}{2}Q(2 + \sqrt{13})$.

2. Строим перпендикулярное сечение параллелепипеда $A_2B_2C_2D_2$. Тогда A_2B_2 равно 17, а $A_2D_2 = 10$. Длина высоты A_2K треугольника $B_2A_2D_2$ и есть расстояние между AA_1 и B_1D , которое равно 8. Из треугольника $B_2A_2D_2$ находим, что B_2D_2 равно 21 или 9. Зная площадь диагонального сечения BB_1D_1D , находим возможную длину бокового ребра, которая равна 10 или $\frac{70}{3}$. В таком случае площадь боковой поверхности равна 540 или 1260. Ответ: 540 или 1260.

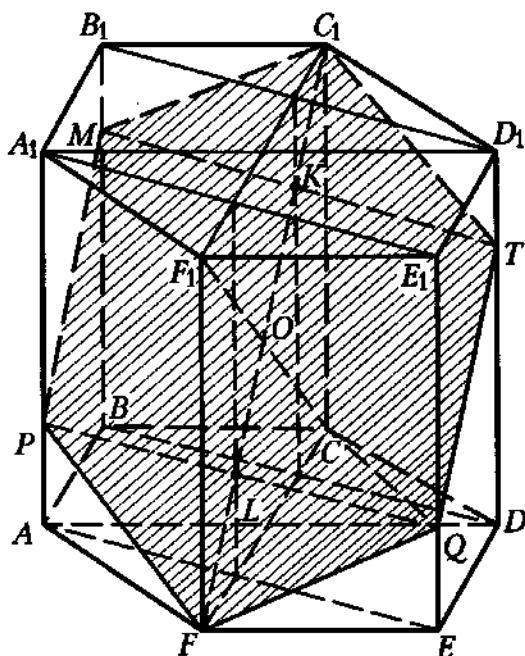


Рис. 100

6. 1. $Q\sqrt{7}$.2. $4(3 + \sqrt{2} + \sqrt{3})$. Задача решается аналогично задаче 5(2).

7. 1. Высота A_1K параллелепипеда проектируется на диагональ основания AC . Из точки K опускаем перпендикуляр на AD и точки A_1 и M соединяем. Легко доказать, что A_1M — высота боковой грани AA_1D_1D . Из треугольника AA_1K находим, что $AK = 8$. Используя подобие треугольников AKM и AOD (O — точка пересечения AC и BD), находим, что $KM = \frac{24}{5}$. Из треугольника A_1KM находим, что $A_1M = \frac{26}{5}$. Тогда $S_{\text{бок.}} = 520$.

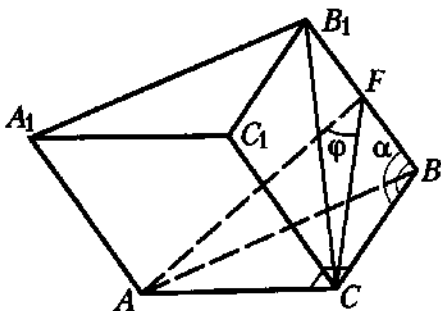


Рис. 101

Ответ: 520.

2. Применяя теорему о трех перпендикулярах, можно доказать, что $AC \perp B_1B$ (рис. 101). Перпендикулярным сечением призмы является прямоугольный треугольник ACF ($\angle ACF = 90^\circ$). $CF = a \cdot \sin \alpha$; $AC = a \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \varphi$; $AF = \frac{a \sin \alpha}{\cos \varphi}$. Периметр перпендикулярного сечения $P = a \sin \alpha \left(1 + \operatorname{tg} \varphi + \frac{1}{\cos \varphi}\right) = a \sin \alpha \left(\frac{1 + \cos \varphi + \sin \varphi}{\cos \varphi}\right)$. Из $\triangle B_1CB$ находим, что

$$BB_1 = \frac{a}{\cos \alpha} \cdot S_{\text{бок.}} = \frac{a^2 \operatorname{tg} \alpha (1 + \cos \varphi + \sin \varphi)}{\cos \varphi} = a^2 \operatorname{tg} \alpha (\sec \varphi + \operatorname{tg} \varphi + 1).$$

Ответ: $a^2 \operatorname{tg} \alpha (\sec \varphi + \operatorname{tg} \varphi + 1)$.

8. 1. Пусть A_1K — высота параллелепипеда, $K \in BD$. Так как $\angle A_1AD = \angle A_1AB$, то AK — биссектриса треугольника ABD . По теореме косинусов находим, что $AB = 13$ и, используя свойство биссектрисы треугольника, находим, что $KD = \frac{15}{4}$. Тогда высота параллелепипеда $A_1K = \frac{15}{4}$ ($\angle A_1DK = 45^\circ$). Из точки K опускаем перпендикуляр KF на AD и точки A_1 и F соединяем. A_1F — высота боковой грани AA_1D_1D . $KF = KD \times \sin 60^\circ = \frac{15\sqrt{3}}{8}$. Из треугольника A_1KF находим, что

$$A_1F = \sqrt{\left(\frac{15}{4}\right)^2 + \left(\frac{15\sqrt{3}}{8}\right)^2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{15\sqrt{7}}{8}.$$

Легко доказать, что высота грани AA_1B_1B тоже равна $\frac{15\sqrt{7}}{8}$.

$$S_{\text{бок.}} = 56 \cdot \frac{15\sqrt{7}}{8} = 105\sqrt{7}.$$

Ответ: $105\sqrt{7}$.2. $l^2 \sin 2\varphi (1 + \sec \alpha + \operatorname{tg} \alpha)$. Задача решается аналогично задаче 7(2).

§ 16

1. 1. 96 см^2 .
2. $\arctg 2\sqrt{3} \approx 73^\circ 54'$; $\arctg 4\sqrt{3} \approx 81^\circ 47'$.
2. 1. $270\sqrt{3} \text{ см}^2$.
2. $\arctg 6 \approx 80^\circ 32'$; $\arctg 3\sqrt{2} \approx 76^\circ 44'$.
3. 1. $24\sqrt{3}$.
2. 1) $2 \arctg \sqrt{2} \approx 109^\circ 28'$; 2) 60° .
4. 1. 128.
2. 1) $2 \arctg \frac{2}{3} \approx 67^\circ 23'$;
- 2) $180^\circ - 2 \arctg \frac{\sqrt{13}}{4} \approx 51^\circ 19'$.

5. 1. $a^2\sqrt{2}$.
2. $2 \arctg (\cos \varphi \cdot \tg \frac{180^\circ}{n}) \approx 27^\circ 57'$.

6. 1. $\frac{3m^2\sqrt{2}}{8}$.
2. $\arccos \left(\tg \frac{\alpha}{2} \cdot \ctg \frac{180^\circ}{n} \right) \approx 56^\circ 28'$.

7. 1. На рис. 102 $AK \perp MF$. Можно доказать, что AK — перпендикуляр к плоскости CMB . Тогда $\angle ACK$ есть угол между AC и плоскостью CMB ,
 $OF = \frac{a}{2\sqrt{3}}$; $MF = \sqrt{4a^2 + \frac{a^2}{12}} = \frac{7a}{2\sqrt{3}}$.

$AK \cdot MF = MO \cdot AF$. Отсюда следует, что $AK = \frac{MO \cdot AF}{MF} = \frac{6a}{7} \cdot \sin \angle ACK =$
 $= \frac{AK}{AC} = \frac{6}{7}$. $\angle ACK \approx 59^\circ$. Ответ: $\arcsin \frac{6}{7} \approx 59^\circ$.

2. Плоскости PBC и PAF пересекаются по прямой NP (рис. 103),
 $KM \perp PN$. Можно доказать, что $\angle BMA = \alpha$; $MK = \frac{a}{2} \cdot \ctg \frac{\alpha}{2}$. Из подобия тре-

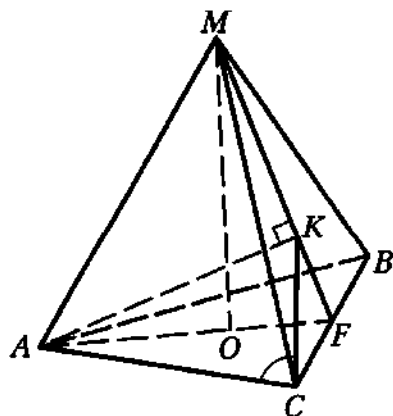


Рис. 102

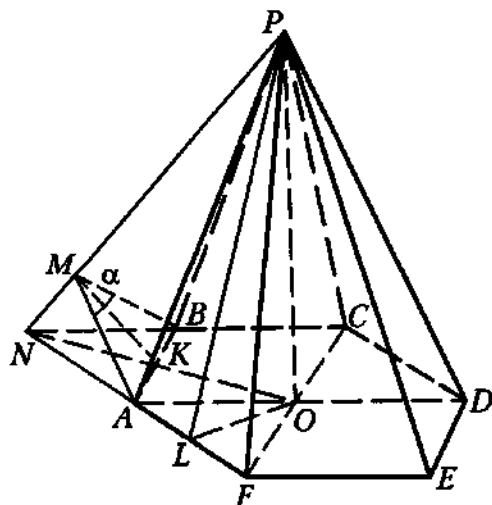


Рис. 103

угольников NMK и NPO следует, что $\frac{PO}{MK} = \frac{NO}{MN}$. Отсюда $PO = \frac{NO \cdot MK}{MN}$.

Из треугольника NMK следует, что $MN = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4} \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2} \sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}$.

В таком случае $PO = \frac{a\sqrt{3} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}}$. Из треугольника POL следует, что апофема пирамиды

$$PL = \left(\frac{3a^2}{4} + \frac{3a^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3 + 3\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{3a}{2\sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}}.$$

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн}} \cdot PL = \frac{9a^2}{2\sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}}. \text{ Ответ: } \frac{9a^2}{2\sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}}.$$

8. 1. На рис. 104 EK — перпендикуляр к плоскости CMD . Плоскость, определяемая прямыми AB и EK , пересекает плоскость CMD по прямой, параллельной AB ; $AP \parallel EK$, а т. к. EK — перпендикуляр к плоскости CMD , то и AP — перпендикуляр к той же плоскости. В таком случае $\angle AMP = \alpha$ — искомый;

$$MF = \sqrt{2a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{3a}{2} \cdot MO \cdot EF = EK \cdot MF.$$

Отсюда $EK = \frac{MO \cdot EF}{MF} = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$, но $AP = EK = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$. Из треугольника AMP имеем, что

$$\sin \alpha = \frac{AP}{AM}; \quad AM = \sqrt{2a^2 + \frac{2a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{10}}{2}. \text{ Тогда}$$

$$\sin \alpha = \frac{4\sqrt{5}}{15} \text{ и } \alpha = \arcsin \frac{4\sqrt{5}}{15} \approx 36^\circ 36'.$$

$$\text{Ответ: } \arcsin \frac{4\sqrt{5}}{15} \approx 36^\circ 36'.$$

$$2. \frac{3a^2\sqrt{3}}{2\sin \frac{\varphi}{2} \sqrt{1 - 3\operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}}}. \text{ Задача решается аналогично задаче 7 (2).}$$

§ 17

$$1. 1. a\sqrt{3}.$$

$$2. 12(5\sqrt{3} + 8).$$

$$2. 1. a.$$

$$2. 100(3 + 2\sqrt{6}).$$

$$3. 1. 1) 2\sqrt{3} \text{ см; } 2) 40 \text{ см}^2.$$

$$2. \frac{a^2}{2}(3 + 2\sqrt{3}).$$

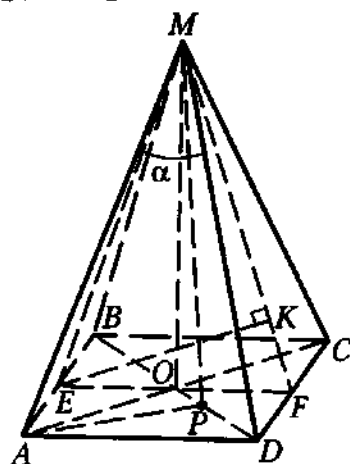


Рис. 104

4. 1. 1) $\frac{a\sqrt{3}}{4}$; 2) $\frac{a^2\sqrt{6}}{2}$.

2. $\frac{a^2}{4}(3 + \sqrt{6} + \sqrt{3})$.

5. 1. 1) $\frac{b}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \varphi$; 2) $\frac{b^2 \operatorname{tg} \alpha}{4 \cos \varphi}$.

2. $480(5 + 2\sqrt{3})$. Необходимо учесть, что грани MAC и MAB наклонены к основанию под углом 60° .

6. 1. 1) $\frac{a \operatorname{tg} \varphi}{4 \cos \frac{\alpha}{2}}$; 2) $\frac{a^2}{8 \sin \alpha \cos \varphi}$;

2. $3(1 + 2\sqrt{2})$ см². Необходимо учесть, что грани MAB и MAC наклонены к основанию под углом 45° .

7. 1. Так как площади боковых граней равны между собой и в основании пирамиды лежит правильный треугольник, то высоты боковых граней, опущенные из вершины пирамиды, равны между собой. Это значит, что вершина пирамиды одинаково удалена от сторон основания или от прямых, на которых лежат эти стороны. В таком случае вершины пирамиды проектируются либо в центр вписанной в основание окружности, либо в один из центров внеписанных окружностей. Для данного случая возможно только два различных варианта (см. рис. 105а, б).

В случае а) радиус вписанной окружности равен $\frac{a}{2\sqrt{3}}$ и высота боковой грани равна $\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{12}} = \frac{a\sqrt{13}}{2\sqrt{3}}$. Тогда $S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} \cdot P_{\text{осн}} \cdot h_{\text{бок грани}} = \frac{3a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{13}}{2\sqrt{3}} = \frac{a^2\sqrt{39}}{4}$.

В случае б) радиус внеписанной окружности определяется по формуле $r_a = \frac{S}{p-a}$, где r_a — радиус внеписанной окружности, которая касается стороны a ; S — площадь треугольника, а p — его полупериметр. В нашем

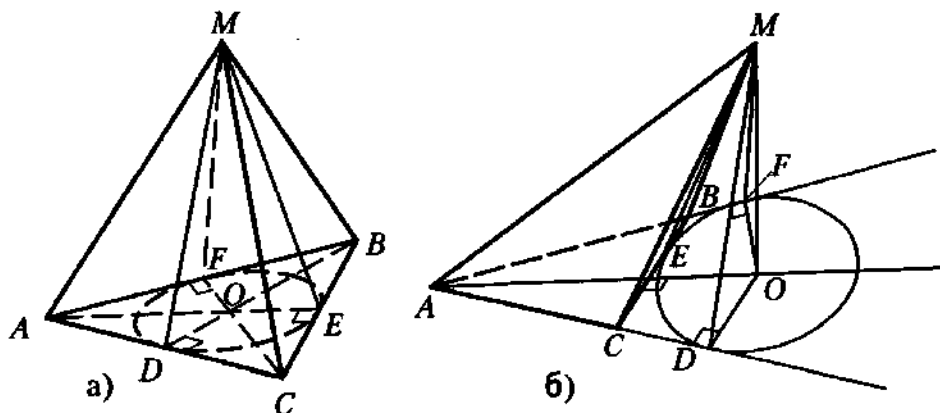


Рис. 105

случае радиус вневписанной окружности $r = \frac{a^2\sqrt{3}}{a(\frac{3a}{2} - a)} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Тогда высоты боковых граней равны $\sqrt{a^2 + 0,75a^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$.

$$S_{\text{бок.}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн.}} \cdot h_{\text{бок. грани}} = \frac{3a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{7}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{7}}{4}.$$

Ответ: $\frac{a^2\sqrt{39}}{4}$ или $\frac{3a^2\sqrt{7}}{4}$.

2. Пусть высоты AD , BE и CK треугольника ABC , лежащего в основании пирамиды $MAVC$ пересекаются в точке O . По условию MO — высота пирамиды. По теореме о трех перпендикулярах $ME \perp AC$. Тогда из треугольников MEA и MEC следует, что $ME^2 = MA^2 - AE^2$ и $ME^2 = MC^2 - EC^2$. Отсюда $MA^2 - MC^2 = AE^2 - EC^2$ (1). Из треугольников BEA и BEC следует, что $AE^2 = AB^2 - BE^2$ и $EC^2 = BC^2 - BE^2$. Отсюда $AE^2 - EC^2 = AB^2 - BC^2$ (2). Из (1) и (2) имеем: $MA^2 - MC^2 = AB^2 - BC^2$, т. е. $MA^2 + BC^2 = MC^2 + AB^2$ (MA и BC ; MC и AB — скрещивающиеся ребра пирамиды). Аналогично можно получить, что $MA^2 + BC^2 = MB^2 + AC^2$.

8. 1. Задача решается аналогично задаче 7(1). Следует только учесть, что, т. к. $\angle MAB \neq \angle MAC$, то вершина пирамиды может проектироваться только в центры вневписанных окружностей, которые касаются равных сторон основания. $S_{ABC} = 60$; $p = 25$. Радиус вневписанной окружности $r = \frac{60}{25-13} = 5$. Тогда высота боковых граней равна 13 и $S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн.}} \cdot h_{\text{бок. грани}} = 25 \times 13 = 325$. Ответ: 325.

2. Пусть высоты AE , BP и CT треугольника ABC , лежащего в основании пирамиды $MAVC$, пересекаются в точке O и пусть MO — перпендикуляр к плоскости ABC . Докажем, что высота AK пирамиды, опущенная из вершины A , проектируется в точку K — точку пересечения высот грани MBC . По теореме о трех перпендикулярах $ME \perp BC$ (рис. 106). По построению $AK \perp ME$. Тогда легко доказать, что AK — перпендикуляр к плоскости MBC . Теперь имеем: $AK \perp MBC$, AC — наклонная к этой плоскости, CK — ее проекция на эту плоскость. MB лежит в этой плоскости и $MB \perp AC$ (доказывается элементарно). Тогда на основании теоремы о трех перпендикулярах $CK \perp MB$, т. е. и $CF \perp MB$. Это значит, что точка K — точка пересечения высот грани MBC . Для остальных высот пирамиды доказательство аналогично.

§ 18

1. 1. $\frac{a^2\sqrt{3}}{24}$. 2. $28\sqrt{2} \text{ см}^2$.

2. 1. $\frac{a^2}{2}$. 2. $14\sqrt{3} \text{ см}^2$.

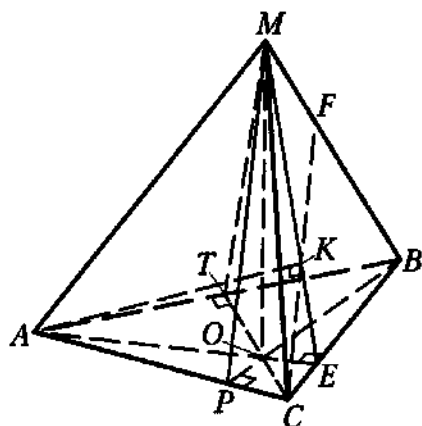


Рис. 106

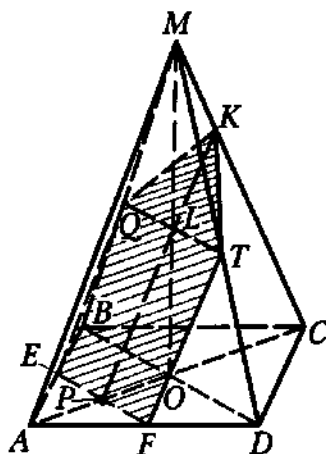


Рис. 107

3. 1. $\frac{3a^2}{8}$. 2. 96 см^2 .

4. 1. $\frac{3a^2\sqrt{3}}{8}$. 2. $42\sqrt{3} \text{ см}^2$.

5. 1. $\frac{5ab\sqrt{2}}{16}$. Сечение показано на рис. 107. Необходимо учесть, что $EQTF$ — прямоугольник.

2. $105\sqrt{3}$; $8\sqrt{6}$.

6. 1. $\frac{17a^2}{96}$. Сечение показано на рис. 108. OK — перпендикуляр к плоскости AMB . $PT \parallel AB$ и находится из подобия треугольников PMT и AMB .

2. $24\sqrt{3}$; $2\sqrt{6}$. Необходимо доказать, что сечением служит прямоугольник. Тогда длина бокового ребра равна 4. Дальнейшее решение очевидно.

7. 1. Сечение показано на рис. 109; $AP \perp MC$ и $EF \parallel BD$, причем $KE = KF$ и $EF \perp AP$. $S_{\text{сечения}} = \frac{1}{2} AP \cdot EF$. $AP = a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Точка K — центр правильного треугольника BMD , а потому $EF = \frac{2}{3} BD = \frac{2}{3} a\sqrt{2}$; $S_{\text{сечения}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot a\sqrt{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$.

2. Необходимо сначала найти площадь боковой поверхности полной пирамиды, которая равна $\frac{380\sqrt{3}}{3}$. Площади боковых поверхностей тре-

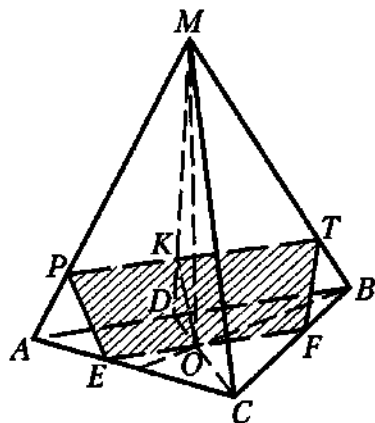


Рис. 108

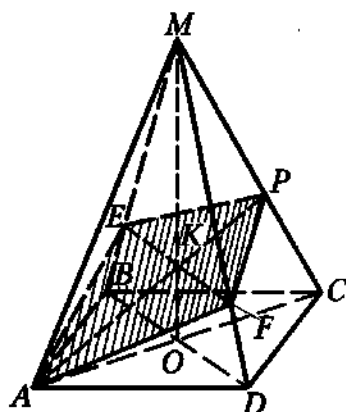


Рис. 109

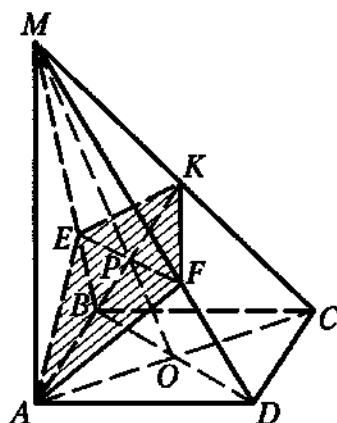


Рис. 110

угольной отсеченной пирамиды и полной пирамиды относятся, как 4 : 25.

$$\text{Тогда } S_{\text{бок. усеченной пирамиды}} = \frac{21}{25} \cdot S_{\text{бок. полной пирамиды}} = \frac{21}{25} \cdot \frac{380\sqrt{3}}{3} = \frac{532\sqrt{3}}{5}.$$

Ответ: $\frac{532\sqrt{3}}{5}$.

8. 1. 120 см^2 . Сечение показано на рис. 110. Необходимо учесть, что $AK = \frac{1}{2}MC$ и точка P — точка пересечения медиан треугольника BMD. В остальном задача решается аналогично задаче 7 (1).

2. $\frac{15}{4}(77 + 3\sqrt{281}) \text{ см}^2$. Принцип решения задачи аналогичен задаче 7 (2).

§ 19

1. 1. 1) $\overline{B_1D_1}$; $\overline{BD}$. 2) $\overline{B_1A}$; $\overline{C_1D}$. 3) $\overline{C_1A_1}$; $\overline{B_1D_1}$; $\overline{D_1B_1}$; $\overline{BD}$; $\overline{DB}$; $\overline{AC}$; $\overline{CA}$.

2. Если $a \parallel \alpha$.

2. 1. 1) $\overline{MK}$; $\overline{D_1A}$; $\overline{C_1B}$. 2) $\overline{AB}$; $\overline{A_1B_1}$; $\overline{D_1C_1}$.
3) $\overline{BA_1}$; $\overline{AB_1}$; $\overline{B_1A}$; $\overline{D_1C}$; $\overline{CD_1}$; $\overline{DC_1}$; $\overline{C_1D}$.

2. Да, могут. Например, если $\alpha \parallel \beta$.

3. 1. 1) $\overline{CB}$; $\overline{C_1B_1}$. 2) $\overline{CC_1}$; $\overline{BB_1}$; $\overline{AA_1}$. 3) $\overline{B_1C}$; $\overline{C_1B}$; $\overline{BC_1}$.

2. Да, будут.

4. 1. 1) $\overline{B_1D_1}$; $\overline{BD}$. 2) $\overline{C_1D}$; $\overline{B_1A}$. 3) $\overline{DB_1}$; $\overline{BD_1}$; $\overline{D_1B}$.

2. Да, будут.

5. 1. 1) $\overline{EM}$ и $\overline{TK}$; $\overline{KT}$ и $\overline{ME}$; $\overline{TM}$ и $\overline{EK}$; $\overline{MT}$ и $\overline{KE}$.

2) $\overline{KT}$ и $\overline{EM}$; $\overline{TK}$ и $\overline{ME}$; $\overline{EK}$ и $\overline{MT}$; $\overline{KE}$ и $\overline{TM}$.

3) $\overline{KT}$, $\overline{TK}$, $\overline{EM}$ и $\overline{ME}$; $\overline{KE}$, $\overline{EK}$, $\overline{MT}$ и $\overline{TM}$; $\overline{ET}$, $\overline{TE}$, $\overline{KM}$ и $\overline{MK}$.

2. $\overline{AM}$ и $\overline{OE}$.

6. 1. 1) $\overline{MT}$ и $\overline{KE}$, $\overline{TM}$ и $\overline{EK}$, $\overline{MK}$ и $\overline{TE}$, $\overline{KM}$ и $\overline{ET}$.
 2) $\overline{MT}$ и $\overline{KE}$, $\overline{TM}$ и $\overline{EK}$, $\overline{MK}$ и $\overline{TE}$, $\overline{KM}$ и $\overline{ET}$.
 3) $\overline{MT}$, $\overline{TM}$, $\overline{KE}$ и $\overline{EK}$; $\overline{MK}$, $\overline{KM}$, $\overline{TE}$ и $\overline{ET}$; $\overline{KT}$, $\overline{TK}$, $\overline{ME}$ и $\overline{EM}$.
 2. $\overline{EB_1}$ и $\overline{FC}$.

7. 1. 1) а) $\overline{FC}$, $\overline{AB}$, $\overline{ED}$, $\overline{A_1B_1}$, $\overline{E_1D_1}$, $\overline{F_1C_1}$. 6) $\overline{AC}$, $\overline{F_1D_1}$, $\overline{A_1C_1}$.

2) Необходимо через точку M провести плоскость, параллельную плоскости основания. Пусть эта плоскость пересечет ребра BB_1 и CC_1 соответственно в точках K и P . Тогда $\overline{MP} = \overline{FD}$ и $\overline{MK} = \overline{OC}$.

2. 1) Точки F и E лежат на медианах AP и CP треугольников ADB и CDB . Так как $\frac{EP}{AP} = \frac{EP}{CP} = \frac{1}{3}$, то $FE \parallel AC$. Из второго условия следует, что $MN \parallel AC$. Тогда $FE \parallel MN$ и векторы FE и MN коллинеарны.

2) $|\overline{FE}| = 6$ см.

8. 1. 1) а) $\overline{F_1C_1}$, $\overline{FC}$, $\overline{A_1B_1}$, $\overline{E_1D_1}$, $\overline{AB}$, $\overline{ED}$.
 6) $\overline{CF}$, $\overline{AD}$, $\overline{DA}$, $\overline{BE}$, $\overline{EB}$, $\overline{C_1F_1}$, $\overline{F_1C_1}$, $\overline{A_1D_1}$, $\overline{D_1A_1}$, $\overline{B_1E_1}$, $\overline{E_1B_1}$.
 2) $\overline{A_1E}$ и $\overline{A_1F_1}$.

2. 1) Задача решается аналогично задаче 7 (1, 2). 2) $|\overline{FE}| = 9$ см.

§ 20

1. 1. $\overline{AD_1}$.
 2. 1. $\vec{0}$.
 3. 1. $\overline{AC_1}$. 2. 17 см.
 4. 1. $\overline{DC}$. 2. 3 см.

5. 1. $a\sqrt{2}$. Необходимо учесть, что $\overline{BC} = \overline{AD}$ и $\overline{FA} = \overline{CE}$.
 Тогда $\overline{FA} + \overline{BC} + \overline{DC} + \overline{FA} = \overline{FA} + \overline{AD} + \overline{DC} + \overline{CE} = \overline{FE}$. $|\overline{FE}| = a\sqrt{2}$.

2. Составим разность:

$$\begin{aligned} & \overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1} - \overline{AB_1} - \overline{BC_1} - \overline{CA_1} = \\ & = (\overline{AA_1} - \overline{AB_1}) + (\overline{BB_1} - \overline{BC_1}) + (\overline{CC_1} - \overline{CA_1}) = \\ & = \overline{B_1A_1} + \overline{C_1B_1} + \overline{A_1C_1} = \overline{A_1C_1} + \overline{C_1B_1} + \overline{B_1A_1} = \overline{A_1A_1} = \vec{0}. \end{aligned}$$

Этим и доказывается справедливость этого равенства.

6. 1. $|\overline{KD} + \overline{AB} + \overline{CT} + \overline{CP}| = |\overline{KD} + \overline{DC} + \overline{CT} + \overline{TA}| = |\overline{KA}|$. Треугольник APC — прямоугольный ($\angle APC = 90^\circ$).

Тогда $KA = \sqrt{AP^2 + PK^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Ответ: $\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

2. Задача решается аналогично задаче 5 (2).

$$7. 1. \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{DA_1} - \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DA_1} - \overrightarrow{CB_1} = \overrightarrow{DA_1} - (\overrightarrow{DB_1} - \overrightarrow{DC_1}) = \\ = \overrightarrow{DA_1} - \overrightarrow{DB_1} + \overrightarrow{DC_1}.$$

2. M — точка пересечения диагоналей параллелепипеда.

$$8. 1. \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{C_1B_1} = \\ = \overrightarrow{DB_1} - \overrightarrow{DA_1} + \overrightarrow{DB_1} - \overrightarrow{DC_1} = 2\overrightarrow{DB_1} - \overrightarrow{DA_1} - \overrightarrow{DC_1}.$$

2. K — центр симметрии октаэдра.

§ 21

$$1. 2. -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

$$2. 2. 2(\overrightarrow{ME} - \overrightarrow{MF}).$$

$$3. 1. \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC_1}. \quad 2. -\frac{1}{2}.$$

$$4. 1. \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BM}. \quad 2. -2.$$

$$5. 1. \overrightarrow{MB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}.$$

2. Из данного равенства следует, что $(3-m) \cdot \vec{a} = (2n-4) \cdot \vec{b}$. Отсюда $m=3$ и $n=2$.

6. 1. $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{C_1P} = \overrightarrow{AC_1} + \frac{2}{3}\overrightarrow{C_1B} = \overrightarrow{AC_1} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CC_1}) = \\ = \overrightarrow{AC_1} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CC_1}$. Необходимо учесть, что P — точка пересечения медиан треугольника CB_1B .

2. $x = \frac{1}{3}$; $y = \frac{2}{3}$. Задача решается аналогично задаче 5(2).

7. 1. Основание высоты DM точка M лежит на стороне BC , причем AM — биссектриса треугольника ABC . В таком случае

$$\frac{CM}{MB} = \frac{a}{b}; \quad \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AD}; \quad \overrightarrow{AM} = \frac{a}{a+b}\overrightarrow{AC}.$$

Отсюда $\overrightarrow{DM} = \frac{a}{a+b}\overrightarrow{AB} + \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AB} = b\vec{e}_2$; $\overrightarrow{AC} = a\vec{e}_1$ и $\overrightarrow{AD} = c\vec{e}_3$.

Тогда $\overrightarrow{DM} = \frac{ab}{a+b}\vec{e}_1 + \frac{ab}{a+b}\vec{e}_2 - c\vec{e}_3$. Ответ: $\frac{ab}{a+b}\vec{e}_1 + \frac{ab}{a+b}\vec{e}_2 - c\vec{e}_3$.

$$2. \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA} + k(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) = \vec{a} + k\vec{c} - k\vec{b}.$$

Ответ: $\vec{a} + k\vec{c} - k\vec{b}$.

8. 1. Исходя из условия следует, что вершина A_1 проектируется на биссектрису AP угла BAD ($P \in BC$). В таком случае

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BP} = b; \quad \overrightarrow{A_1P} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AA_1}; \quad \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AB} + \frac{b}{a}\overrightarrow{AD}.$$

$$\text{Тогда } \overrightarrow{A_1P} = \overrightarrow{AB} + \frac{b}{a}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} =$$

$$= \overrightarrow{AB} + \frac{b}{a}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AA_1} = b\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 - c\vec{e}_3.$$

Ответ: $b\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 - c\vec{e}_3$.

2. Из подобия треугольников EPF и ABC следует, что $\frac{EF}{AC} = \frac{2}{5}$.

$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{OE} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OE} + \frac{2}{5}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) = \vec{m} + \frac{2}{5}\vec{k} - \frac{2}{5}\vec{p}.$$

О т в е т: $\vec{m} + \frac{2}{5}\vec{k} - \frac{2}{5}\vec{p}$.

§ 22

1. $\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{c} - \vec{b}$. 2. $\overrightarrow{DA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DD_1}$.

2. $\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$. 2. $\frac{1}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$.

3. $\frac{3}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{7}\overrightarrow{AA_1}$.

2. Рассмотрим тетраэдр $DABC$. Пусть E — середина ребра AC , а F — середина ребра DB и пусть O — середина отрезка EF . $\overrightarrow{CO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CF}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CD}$. Пусть теперь P — середина AD , F — середина BC и O_1 — середина PF . Тогда $\overrightarrow{CO_1} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CD}$. Если теперь рассмотрим точку O_2 — середину отрезка, соединяющего середины ребер AB и BC , то и в этом случае получим, что $\overrightarrow{CO_2} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CD}$. Отсюда вытекает, что $\overrightarrow{CO} = \overrightarrow{CO_1} = \overrightarrow{CO_2}$, т. е. точки O , O_1 и O_2 совпадают. Этим и доказывается данное утверждение.

4. $\frac{1}{12}\overrightarrow{CA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{CD}$.

2. Задача решается аналогично задаче 3 (2).

5. $\overrightarrow{AD_1} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{ED_1} = 2\overrightarrow{AF} + 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DD_1} = 2a\vec{e}_1 + 2a\vec{e}_2 + a \operatorname{tg} \varphi \vec{e}_3$.

О т в е т: $2a\vec{e}_1 + 2a\vec{e}_2 + a \operatorname{tg} \varphi \vec{e}_3$.

2. Рассмотрим призму $ABCA_1B_1C_1$. Пусть $A_2B_2C_2$ — сечение призмы плоскостью, параллельной основаниям. M_1 и M — точки пересечения медиан соответственно верхнего и нижнего оснований, а M_2 — точка пересечения медиан сечения. Выберем в пространстве произвольную точку O . Тогда $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} =$

$$= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OB_2} + \overrightarrow{OC_2} - \overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OC_1}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2}).$$

Аналогично, $\overrightarrow{M_1M} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{C_1C})$.

Отметим, что

$$\frac{A_1B_2}{A_1A} = \frac{B_1B_2}{B_1B} = \frac{C_1C_2}{C_1C} = k.$$

Тогда $\overrightarrow{M_1M_2} = k \cdot \frac{1}{3}(\overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{C_1C}) = k\overrightarrow{M_1M}$. Это значит, что точки M_1 , M_2 и M лежат на одной прямой.

6. $\frac{4}{5}a\vec{e}_2 + \frac{4}{5}a\vec{e}_1 + \frac{3a}{5\cos\varphi}\vec{e}_3$. Задача решается аналогично задаче 5 (1).

2. Задача решается аналогично задаче 5 (2).

7. 1. Пусть $\frac{BM}{MD} = \frac{x}{y}$ и $\frac{PN}{NC} = \frac{m}{n}$;

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN} = \frac{y}{x+y} \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} + \frac{n}{m+n} \overrightarrow{CP};$$

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB};$$

$$\overrightarrow{CP} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AP}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN} &= \frac{y}{x+y} (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{AB} + \frac{n}{m+n} (-\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AP}) = \\ &= \left(\frac{y}{x+y} - \frac{n}{m+n} \right) \overrightarrow{AD} + \left(1 - \frac{y}{x+y} - \frac{n}{m+n} \right) \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{n}{m+n} \overrightarrow{AP}; \end{aligned} \quad (1)$$

$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AP}$. Так как $MN \parallel AF$, то

$$\overrightarrow{MN} = k \cdot \overrightarrow{AF} = \frac{k}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{k}{2} \overrightarrow{AP}. \quad (2)$$

Из равенств (1) и (2) следует, что

$$\begin{cases} \frac{y}{x+y} - \frac{n}{m+n} = 0 \\ 1 - \frac{y}{x+y} - \frac{n}{m+n} = \frac{k}{2} \\ \frac{n}{m+n} = \frac{k}{2} \end{cases}$$

Отсюда можно получить, что $k = \frac{2}{3}$. Так как $\overrightarrow{MN} = k \cdot \overrightarrow{AF}$, то $|\overrightarrow{MN}| = |k| \cdot |\overrightarrow{AF}|$ и $\frac{|\overrightarrow{MN}|}{|\overrightarrow{AF}|} = |k|$, т. е. $\frac{MN}{AF} = \frac{2}{3}$.

О т в е т: $\frac{2}{3}$.

$$2. z = 1 - x - y, \quad \overrightarrow{OD} = x \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB} + (1 - x - y) \cdot \overrightarrow{OC}.$$

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = x \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - x \cdot \overrightarrow{OC} - y \cdot \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OC} =$
 $= x \cdot (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}) + y \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}) = x \cdot \overrightarrow{CA} + y \cdot \overrightarrow{CB}$. Отсюда следует, что векторы $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$ компланарны, т. е. точки A , B , C и D лежат в одной плоскости.

8. 1. Пусть $\frac{BM}{MD} = \frac{m}{n}$ и $\frac{B_1N}{NC} = \frac{x}{y}$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN} = \frac{n}{m+n} \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} + \frac{y}{x+y} \overrightarrow{CB_1} = \\ &= \frac{n}{m+n} (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{AB} + \frac{y}{x+y} (\overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AD}) = \\ &= \left(\frac{n}{m+n} - \frac{y}{x+y} \right) \overrightarrow{AD} + \left(1 - \frac{n}{m+n} \right) \overrightarrow{AB} + \frac{y}{x+y} \overrightarrow{AA_1}. \end{aligned} \quad (1)$$

$$\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1}.$$

Т. к. $MN \parallel AC_1$, то $\overrightarrow{MN} = k \cdot \overrightarrow{AC_1} = k \cdot \overrightarrow{AD} + k \cdot \overrightarrow{AB} + k \cdot \overrightarrow{AA_1}$. (2)

Из равенств (1) и (2) следует, что

$$\begin{cases} \frac{n}{m+n} - \frac{y}{x+y} = k \\ 1 - \frac{n}{m+n} = k \\ \frac{y}{x+y} = k \end{cases}$$

Отсюда следует, что $k = \frac{1}{3}$; $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$ и $\frac{x}{y} = \frac{2}{1}$. Следовательно, $\frac{BM}{MD} = \frac{1}{2}$ и $\frac{B_1N}{NC} = \frac{2}{1}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{1}$.

2. Если точки A, B, C и D принадлежат одной плоскости, то $\overrightarrow{CD} = x \cdot \overrightarrow{CA} + y \cdot \overrightarrow{CB}$. Пусть O — произвольная точка пространства, тогда $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$. В таком случае $\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = x \overrightarrow{OA} - x \overrightarrow{OC} + y \overrightarrow{OB} - y \overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OD} = x \overrightarrow{OA} + y \overrightarrow{OB} + (1 - x - y) \overrightarrow{OC} = x \overrightarrow{OA} + y \overrightarrow{OB} + z \overrightarrow{OC}$, где $x + y + z = 1$.

§ 23

1. 1) $(6 + 2\sqrt{3})$ см². 2) 2 см². 3) $\arctg \frac{1}{2}$. 4) 30°. 5) 2 см.
 2. 1) $4(\sqrt{7} + 1)$ см². 2) $2\sqrt{3}$ см². 3) 60°. 4) $\arccos \frac{1}{\sqrt{7}}$. 5) $2\sqrt{2}$ см.
 3. 1) $4(4\sqrt{3} + 3)$ см²; 2) $4\sqrt{3}$ см²; 3) 60°; 4) 30°; 5) $\overrightarrow{A_1M} = \frac{1}{3}\overrightarrow{A_1A} + \frac{1}{3}\overrightarrow{A_1B} + \frac{1}{3}\overrightarrow{A_1C}$; 6) 90°.
 4. 1) $(12\sqrt{3} + \sqrt{156})$ см². 2) $4\sqrt{3}$ см². 3) 60°. 4) $\arctg 2\sqrt{3} - 60^\circ$.
 5) $\overrightarrow{DO} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$. 6) 90°.

5. По данным задачи легко найти площадь треугольника ABC . $S_{ABC} = 84$. Площадь поверхности $S = P_{ABC} \cdot AA_1 + 2S_{ABC} = 588$ (рис. 111).

MHC — сечение, площадь которого надо найти. Плоскости MHC и ABC пересекаются по прямой PQ , причем $PQ \parallel AB$. Из точки A опускаем перпендикуляр AP на прямую PQ и точки M и P соединяем. MP — высота треугольника MHC . $AP = \frac{2S_{ABC}}{AB} = \frac{2 \cdot 84}{14} = 12$. Из треугольника MAP следует, что $MP = 13$. $S_{MHC} = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 13 = 91$; $\angle MPA$ — линейный угол двугранного угла, образованного плоскостями MHC и ABC ; $\cos \angle MPA = \frac{AP}{MP} = \frac{12}{13}$, отсюда $\angle MPA = \arccos \frac{12}{13}$; $\angle AMP$ — угол между прямой AA_1 и плоскостью MHC ; $\angle AMP = \arccos \frac{5}{13}$. $\overrightarrow{MK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Ответ: 1) 588 см². 2) 91 см². 3) $\arccos \frac{12}{13}$; 4) $\arccos \frac{5}{13}$; 5) $-\frac{1}{4}\overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. 6) рис. 111.

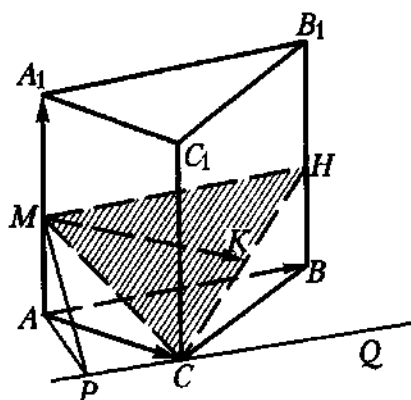


Рис. 111

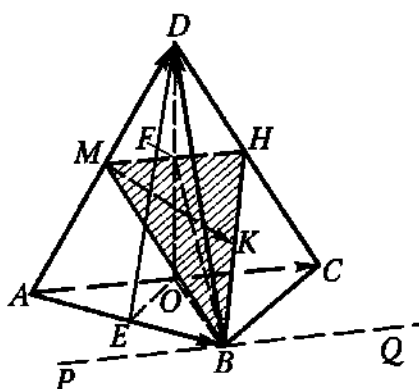


Рис. 112

6. Так как $DA = DB = DC$, то вершина O проектируется в центр описанной около основания окружности, в данном случае на середину гипотенузы AC (рис. 112). Из точки O опускаем перпендикуляр OE на AB и точки D и E соединяем. DE — высота боковой грани ADB , $DO = \sqrt{3}$; $OE = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Из треугольника DOE следует, что $DE = \sqrt{3 + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{7}{2}}$; $S_{бок.} = \frac{1}{2}AC \cdot DO + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot DE = \sqrt{7} + \sqrt{3}$; FB — высота сечения BMH . Из треугольника FOB следует, что $FB = \sqrt{\frac{3}{4} + 1} = \frac{\sqrt{7}}{2}$. $S_{сеч.} = \frac{1}{2}MH \cdot FB = \frac{1}{4}AC \cdot FB = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{7}}{2} = \frac{\sqrt{7}}{4}$; $\angle FBO$ — линейный угол двугранного угла, образованного плоскостями BMH и ABC ; $\operatorname{tg} \angle FBO = \frac{FO}{OB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Откуда $\angle FBO = \arctg \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\angle DBF$ — угол между прямой BD и плоскостью BMH ; $\operatorname{tg} \angle DBO = \frac{DO}{OB} = \sqrt{3}$. Откуда $\angle DBO = 60^\circ$. Тогда $\angle DBF = 60^\circ - \arctg \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\overrightarrow{MK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

Ответ: 1) $(\sqrt{7} + \sqrt{3})$ см²; 2) $\frac{\sqrt{7}}{4}$ см²; 3) $\arctg \frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $60^\circ - \arctg \frac{\sqrt{3}}{2}$; 5) $-\frac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$; 6) рис. 94.

7. 1. Сечение, проведенное через AD и точку P , показано на рис. 113, а; $PQ \parallel AD$. Из точки B опускаем перпендикуляр BT на сторону AD и точки P и T соединяем. Очевидно, что $PT \perp AD$; PBT — перпендикулярное сечение призмы $APBDQC$. $S_{бок.} = P_{PBT} \times AD \times AD = 5$; $BT = \frac{24}{5}$. $PT = \sqrt{\frac{576}{25} + 4} = \frac{26}{5}$; $P_{перп. сеч.} = \frac{24}{5} + \frac{26}{5} + 2 = 12$. $S_{бок.} = 12 \times 5 = 60$.

2. Сечение, проходящее через B_1D и параллельное AC показано на рис. 113, б, причем $EF \parallel AC$ и $EF \perp B_1D$; $S_{сеч.} = \frac{1}{2}EF \times B_1D$, но $EF = AC$. Тогда $S_{сеч.} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6\sqrt{2} = 24\sqrt{2}$. В плоскости BB_1D_1 опускаем перпендикуляр OK

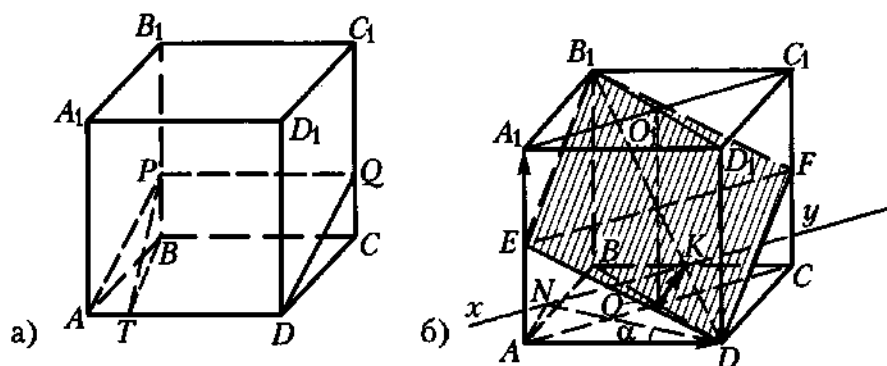


Рис. 113

из точки O на B_1D . Можно доказать, что OK перпендикулярно плоскости сечения. $OK = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. Расстояние между AA_1 и B_1D является длиной отрезка AO . $AO = 4$. Очевидно, что $B_1K : KD = 3 : 1$. Тогда имеем

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OK} &= \frac{1}{4}\overrightarrow{OB_1} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OD} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BB_1}) + \frac{3}{8}\overrightarrow{BD} = \\ &= \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AA_1}\right) + \frac{3}{8}\overrightarrow{BD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) + \frac{1}{4}\overrightarrow{AA_1} = \\ &= -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AA_1}.\end{aligned}$$

Плоскость, заданная пересекающимися прямыми AC и OK , пересекает плоскость сечения по прямой XY , которая параллельна AC . В этой плоскости проводим $AN \parallel OK$. Очевидно, что AN перпендикулярно плоскости сечения и $\angle ADN = \alpha$ есть угол между AD и плоскостями сечения.

$$\sin \alpha = \frac{AN}{AD} = \frac{3\sqrt{2}}{10}, \quad \alpha = \arcsin \frac{3\sqrt{2}}{10}.$$

Ответ: 1. 60 см^2 .

2. 1) $24\sqrt{2} \text{ см}^2$. 2) $3\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ см}^2$.

3) 4 см .

4) $-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AA_1}$;

5) $\arcsin \frac{3\sqrt{2}}{10}$.

8. 1) Площадь боковой поверхности пирамиды равна сумме площадей боковых граней, причем треугольники MAD и MBC равные равнобедренные прямоугольные треугольники. Высота пирамиды $MO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (рис. 114).

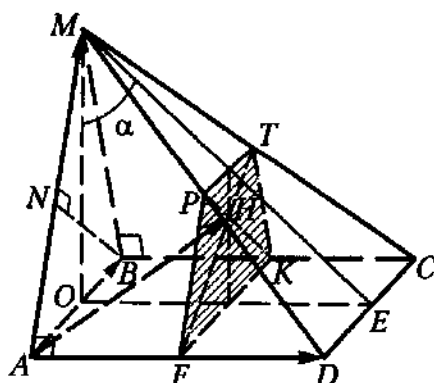


Рис. 114

На рисунке $OE \perp CD$, тогда и $ME \perp CD$. Высота треугольника DMC $ME = \sqrt{\frac{3a^2}{4} + a^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$. Тогда $S_{\text{бок}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a \frac{a\sqrt{7}}{2} = \frac{a^2}{4} \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{7} + 4)$. При построении сечения учитывалось, что плоскость сечения и грани AMB параллельны. $PT = \frac{a}{2}$; $FK = a$, а высота сечения равна $\frac{1}{2}MO$, т. е. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Тогда $S_{\text{сеч}} = \frac{1}{2}\left(a + \frac{a}{2}\right) \times \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{16}$. Легко доказать, что линейным углом двугранного угла, образованного гранями DMC и AMB , является $\angle OME = \alpha$; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{OE}{OM} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ и $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Так как AD — перпендикуляр к плоскости AMB , то $\angle AMD$ есть угол между AD и плоскостью AMB , но плоскость сечения параллельна плоскости AMB , а потому искомый угол равен величине угла AMD , т. е. 45° . Из подобия треугольников PHT и FHK следует, что $HT : HF = 1 : 2$.

Тогда

$$\begin{aligned}\overline{AH} &= \frac{2}{3}\overline{AT} + \frac{1}{3}\overline{AF} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\overline{AM} + \overline{AC}) + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\overline{AD} = \\ &= \frac{1}{3}\overline{AM} + \frac{1}{3}\overline{AC} + \frac{1}{6}\overline{AD} = \frac{1}{3}\overline{AM} + \frac{1}{3}(\overline{AD} + \overline{AB}) + \frac{1}{6}\overline{AD} = \frac{1}{3}\overline{AM} + \frac{1}{2}\overline{AD} + \frac{1}{3}\overline{AB}.\end{aligned}$$

Расстояние между BC и MD равно расстоянию между BC и плоскостью AMD , которая параллельна BC . Это расстояние равно длине высоты BN треугольника AMB , т. е. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: 1) $\frac{a^2}{4}(\sqrt{3} + \sqrt{7} + 4)$. 2) $\frac{3a^2\sqrt{3}}{16}$. 3) $\operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

4) 45° . 5) $\frac{1}{3}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AD} + \frac{1}{3}\overline{AM}$. 6) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

§ 24

1. Одна, две или три точки.
1. Две параллельные прямые, одна прямая или две точки.
1. Сохраняются все свойства прямоугольника как параллелограмма.
2. Рис. 115. На рисунке биссектриса l параллельна O_1M_1 .

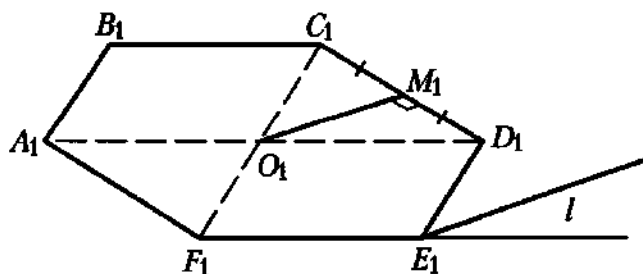


Рис. 115

3. Изображением служит произвольный треугольник $A_1B_1C_1$. Так как катеты треугольника относятся как 2 : 3, то их проекции на гипотенузу относятся, как 4 : 9. Поэтому на изображении гипотенузы нужно построить такую точку K_1 , что $A_1K_1 : K_1B_1 = 4 : 9$. Тогда C_1K_1 — изображение высоты треугольника.

4. 1. Сохраняются все свойства ромба как параллелограмма.

2. Пусть $ABCD$ ромб с углом BAD , равным 60° . Тогда треугольник ABD правильный, и высота BE , опущенная на сторону AD , делит ее пополам. Перпендикуляр OF , опущенный из точки пересечения диагоналей O на AD параллелен BE . Изображением ромба служит произвольный параллелограмм $A_1B_1C_1D_1$. Строим медиану B_1E_1 треугольника $A_1B_1C_1$ и проводим $O_1F_1 \parallel B_1E_1$; O_1F_1 — искомый перпендикуляр.

3. Центр вписанной в треугольник окружности есть точка пересечения его биссектрис. Пусть произвольный треугольник $A_1B_1C_1$ есть изображение данного треугольника. Медиана B_1E_1 есть изображение одной из биссектрис этого треугольника. Чтобы построить изображение другой биссектрисы, необходимо на стороне B_1C_1 построить такую точку K_1 , что $B_1K_1 : K_1C_1 = 4 : 5$. Тогда A_1K_1 — изображение второй биссектрисы. Точка их пересечения и есть изображение центра вписанной в треугольник окружности.

5. 1. Две пересекающиеся прямые, две параллельные прямые, прямая и точка.

2. Пусть параллелограмм $A_1B_1C_1D_1$ есть изображение данного квадрата и точка E_1 — середина A_1D_1 . В оригинале катеты треугольника BAE относятся как 2 : 1. Строим изображение A_1M , высоты этого треугольника (см. указание к задаче 3(3)). Теперь на изображении строим $C_1P_1 \parallel A_1M$. Это и будет изображение перпендикуляра, опущенного из точки C на BE .

3. Центр описанной окружности лежит в точке пересечения серединных перпендикуляров. Один из этих перпендикуляров есть ось симметрии данной трапеции, а другой проходит через основание высоты BE этой трапеции. Построение показано на рис. 116.

6. 1. Прямые параллельные или скрещивающиеся.

2. Пусть треугольник $A_1B_1C_1$ есть изображение треугольника ABC и O_1 — изображение центра описанной окружности. На рис. 117 D_1 и E_1 — середины сторон B_1C_1 и A_1B_1 . Тогда O_1D_1 и O_1E_1 — изображение серединных перпендикуляров. В таком случае изображения высот A_1P_1 и C_1K_1 парал-

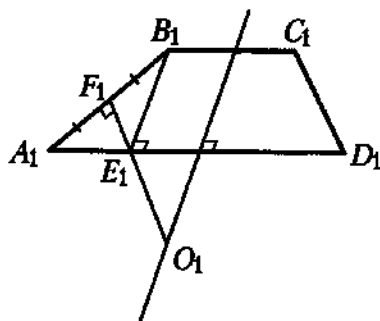


Рис. 116

2. Задача решается аналогично задаче 3(2). По теореме косинусов находим, что $\cos \angle BDC = \frac{5}{8}$. Тогда $\sin \angle BDC = \frac{\sqrt{39}}{8}$ и $R = \frac{BC}{2\sin \angle BDC} = \frac{\sqrt{39} \cdot 8}{2\sqrt{39}} = 4$. Ответ: 4.

3. Рассмотрим трехгранный угол $OABC$, у которого $\angle AOB = \angle AOC = 60^\circ$, $\angle BOC = 90^\circ$. Пусть $OA = OB = OC$. Легко доказать, что тогда $AO = AB = AC$, и точка проектируется в центр описанной около прямоугольного треугольника окружности, т. е. на середину BC . В таком случае плоскость BAC перпендикулярна плоскости прямого угла.

5. 2. Построим перпендикулярное сечение призмы $A_2B_2C_2$; $A_2C_2 = AC \sin 45^\circ = \sqrt{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}$; $A_2B_2 = AB \sin 60^\circ = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$. Угол $B_2A_2C_2$ находим, используя теорему косинусов для трехгранного угла. Имеем: $\cos 90^\circ = \cos 45^\circ \cdot \cos 60^\circ + \sin 45^\circ \cdot \sin 60^\circ \cdot \cos \angle B_2A_2C_2$.

$\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} \cdot \cos \angle B_2A_2C_2 = 0$; $\cos \angle B_2A_2C_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Сторону B_2C_2 находим по теореме косинусов. $B_2C_2 = \sqrt{9 + 3 - 2 \cdot 3\sqrt{3} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = 3\sqrt{2}$; $P_{A_2B_2C_2} = 3 + \sqrt{3} + \sqrt{3} + 3\sqrt{3} = \sqrt{3}(\sqrt{3} + 1 + \sqrt{6})$. $S_{\text{бок}} = 5\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1 + \sqrt{6})$.

Ответ: $5\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1 + \sqrt{6})$.

3. Необходимо рассмотреть трехгранный угол $DAMC$, у которого $\angle MDA = 45^\circ$; $\angle ADC = 90^\circ$ и $\cos \angle MDC = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. Пусть искомый двугранный угол — α . Тогда $\cos 90^\circ = \cos 45^\circ \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} + \sin 45^\circ \cdot \frac{\sqrt{7}}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos \alpha$. Отсюда: $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{7}}$ и $\alpha = \arccos \left(-\frac{1}{\sqrt{7}}\right) \approx 112^\circ 12'$.

Ответ: $\arccos \left(-\frac{1}{\sqrt{7}}\right) \approx 112^\circ 12'$.

6. 2. Рассмотрим правильную пирамиду $MABCD$. В трехгранном угле $CMBD$ один плоский угол BCD прямой, а два других MCD и MCB обозначим за α . Двугранный угол при ребре MC равен 120° . Тогда по теореме косинусов для трехгранного угла имеем: $\cos 90^\circ = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos 120^\circ$. Отсюда $\text{tg}^2 \alpha = 2$. Пусть MK — высота боковой грани DMC . Тогда $KC = m \cdot \text{ctg} \alpha = \frac{m}{\sqrt{2}}$. В таком случае сторона основания равна $m\sqrt{2}$. $S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн}} \cdot MK = 2m\sqrt{2} \cdot m = 2m^2\sqrt{2}$. Ответ: $2m^2\sqrt{2}$.

3. Необходимо рассмотреть трехгранный угол $DAMC$, у которого $\cos \angle MDA = \cos \angle MDC = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $\angle ADC = 90^\circ$. Пусть α — величина искомого двугранного угла. Тогда $\cos 90^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot \cos \alpha$. Отсюда $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$ и $\alpha = 120^\circ$. Ответ: 120° .

10-й КЛАСС. ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К КОНТРОЛЬНЫМ ЗАДАНИЯМ

№ 1

1. 2. 2) Прямые скрещивающиеся; 60° . 3. Любое.
2. 2. 1) Линия пересечения проходит через вершину C и параллельна прямым AB и DE . 2) Прямые скрещивающиеся; 20° .
3. Пересекаются или параллельны.
4. Прямые EF и MK являются скрещивающимися. Они могут быть параллельными, если AB пересекает CD или $AB \parallel CD$.
3. 2. 2) Прямые скрещивающиеся; 70° .
3. Прямые могут быть в любых взаимных положениях.
4. 2. 2) Прямые скрещивающиеся; 30° . 3. Нет, нельзя.
4. Прямые AC и BD являются скрещивающимися. Они могут пересекаться, если AB пересекает CD или $AB \parallel CD$.

№ 2

1. 3. 12.
2. 2. Прямые скрещивающиеся. 3. $2a + a\sqrt{2}$.
3. 3. 6
4. 2. Прямые скрещивающиеся. 3. 18.

№ 3

1. 1. 15 см. 2. 2) 60° . 3) $\arctg \frac{\sqrt{6}}{2}$.
3*. $\sqrt{3}$ см. Необходимо учесть, что $EO \parallel BC$, где O — основание перпендикуляра MO , опущенного из точки M на плоскость ABC ; O — середина гипотенузы. Расстояние от точки E до плоскости BMC равно расстоянию от точки O до этой плоскости.
2. 1. 45° . 2. 2) 45° .
3*. $\frac{4\sqrt{5}}{3}$. Необходимо учесть, что $AB \parallel CD$.
3. 1. 4 см. 2. 2) 60° . 3) $\arctg \frac{\sqrt{3}}{2}$.
3*. 1 см. Необходимо учесть, что $EO \parallel BC$, где O — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на плоскость ABC .
4. 1. 60° . 2. 2) 30° .
3*. $\frac{3\sqrt{10}}{8}$ см. Необходимо учесть, что $EO \parallel BC$, где O — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на плоскость ABC .

№ 4

1. $1. a^2(6 + \sqrt{3}). 2. 25(4 + \sqrt{6}).$

3*. Необходимо достроить пирамиду до пирамиды, основанием которой будет прямоугольник $ACBF$. Для решения задачи следует найти величину угла DBF . В треугольнике DBF $DB = DF = 5\sqrt{5}$. $FB = 10\sqrt{3}$. Тогда $\cos \angle DBF = \frac{5\sqrt{3}}{5\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$. Ответ: $\arccos \frac{\sqrt{15}}{5}$.

2. $1. 3(48 + 5\sqrt{3}) \text{ см}^2. 2. 50.$

3*. Необходимо из основания высоты точки O опустить перпендикуляр OE на ребро MC . Тогда угол BED искомый. Из треугольника MOC $OE = \frac{MO \cdot OC}{MC} = \frac{1 \cdot 4}{\sqrt{17}} = \frac{4}{\sqrt{17}}$. Отсюда $\operatorname{tg} \angle OED = \frac{3\sqrt{17}}{4}$. В таком случае $\angle OED = \arctg \frac{3\sqrt{17}}{4}$ и $\angle BED = 2 \arctg \frac{3\sqrt{17}}{4}$. Ответ: $2 \arctg \frac{3\sqrt{17}}{4}$.

3. $1. 62,4 \text{ см}^2. 2. 360.$

3*. Расстоянием будет являться длина высоты треугольника MBA , опущенная из вершины B . Ответ: $\frac{60}{13}$.

4. $1. 8\sqrt{7}(1 + \sqrt{3}). 2. 108 \text{ см}^2.$

3*. Необходимо в плоскости верхнего основания из вершины A_1 опустить перпендикуляр A_1K на C_1D_1 . Так как $\angle A_1D_1C_1 = 150^\circ$, то точка K не принадлежит стороне D_1C_1 : $A_1K = \frac{1}{2}A_1D_1 = 1$. $A_1C = 2\sqrt{14}$. Для решения задачи следует найти величину угла A_1CK ; $\sin \angle A_1CK = \frac{A_1K}{A_1C} = \frac{1}{2\sqrt{14}}$.

Ответ: $\arcsin \frac{1}{2\sqrt{14}}$.

№ 5

1. $1. 1) \overline{AA_1}; 2) \overline{CA}.$

$$2. \frac{1}{3}\overline{AB} - \frac{1}{6}\overline{AC} + \frac{1}{3}\overline{AD}.$$

3. Векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ будут коллинеарными, если $\vec{m} = k\vec{n}$ ($k \neq 0$). Тогда $p\vec{a} + q\vec{b} + 8\vec{c} = k\vec{a} + kp\vec{b} + kq\vec{c}$. Отсюда:

$$\begin{cases} p = k \\ q = kp \\ 8 = kq \end{cases}$$

Решая систему, получим, что $k = 2$, $p = 2$ и $q = 4$. Ответ: $p = 2$, $q = 4$.

4*. Необходимо доказать, что векторы $\overline{HM}$, $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$ компланарны. $\overline{HM} = \overline{DM} - \overline{DH} = \frac{1}{2}\overline{DA} - \frac{1}{2}\overline{DC} - \frac{1}{2}\overline{DB}$ (1); $\overline{AB} + \overline{DC} = \overline{DB} - \overline{DA} + \overline{DC}$ (2). Из (1) и (2) следует, что $\overline{HM} = -\frac{1}{2}\overline{AB} - \frac{1}{2}\overline{DC}$, т. е. векторы $\overline{HM}$, $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$ компланарны, а потому прямые HM , AB и DC параллельны одной плоскости.

2. 1. 1) $\overrightarrow{AD}$. 2) $\overrightarrow{A_1C}$.

2. $-\frac{1}{6}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

3. $2\vec{m} = 2\vec{a} + 2\vec{b} - 2\vec{c}$. $3\vec{n} = 6\vec{a} - 3\vec{b} + 3\vec{c}$.

Отсюда $2\vec{m} + 3\vec{n} = 8\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$, т. е. $\vec{p} = 2\vec{m} + 3\vec{n}$. Это и значит, что указанные векторы компланарны.

4*. Пусть P_1, P_2, P_3 и P_4 — середины соответственно отрезков NA, MD, NB и MC . Выберем в пространстве произвольную точку O .

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{ON}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{ND}), \quad (1)$$

$$\overrightarrow{P_4P_3} = \overrightarrow{OP_3} - \overrightarrow{OP_4} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{CN}), \quad (2)$$

но $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ и $\overrightarrow{ND} = \overrightarrow{CN}$. Тогда из (1) и (2) вытекает, что $\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_4P_3}$, т. е. $P_1P_2P_3P_4$ — параллелограмм (предварительно нужно доказать, что точки P_1, P_2, P_3 и P_4 не лежат на одной прямой).

3. 1. 1) $\overrightarrow{B_1A}$; 2) $\overrightarrow{CC_1}$.

2. $\frac{1}{3}\overrightarrow{DA} - \frac{1}{6}\overrightarrow{DB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$.

3. $k = 2$. Задача решается аналогично задаче 1. 3.

4*. Задача решается аналогично задаче 1 (4*).

4. 1. 1) $\overrightarrow{D_1A}$ 2) $\overrightarrow{C_1B}$.

2. $\frac{1}{3}\overrightarrow{BD} - \frac{1}{6}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

3. Необходимо доказать, что $\vec{p} = 2\vec{n} - \vec{m}$.

4*. Пусть M_1, M_2, M_3, M_4 — точки пересечения медиан соответственно треугольников $A_1BB_1, B_1CC_1, C_1DD_1$ и A_4AD_1 . В пространстве выбираем произвольную точку O . Тогда

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_1M_2} &= \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OC}) - \\ &\quad - \frac{1}{3}(\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{A_1C_1} + \overrightarrow{BC}), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_4M_3} &= \overrightarrow{OM_3} - \overrightarrow{OM_4} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OD_1}) - \\ &\quad - \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD_1}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{A_1C_1} + \overrightarrow{AD}). \end{aligned} \quad (2)$$

Так как $ABCD$ параллелограмм, то $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$. Тогда из (1) и (2) следует, что $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_4M_3}$, т. е. $M_1M_2M_3M_4$ — параллелограмм (предварительно нужно доказать, что точки M_1, M_2, M_3 и M_4 не лежат на одной прямой).

11-й КЛАСС. ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ ДЛЯ УРОКА

§ 1

1. 1. 1) $B(-2; -2; 0)$; $D(2; 2; 0)$; $C(-2; 2; 0)$; $A_1(2; -2; 4)$; $B_1(-2; -2; 4)$; $D_1(2; 2; 4)$; $C_1(-2; 2; 4)$.

2) $\overrightarrow{OD} \{2; 2; 0\}$; $\overrightarrow{OC_1} \{-2; 2; 4\}$; $\overrightarrow{OM} \{0; 2; 2\}$. $\overrightarrow{OD} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 0 \cdot \vec{k}$,
 $\overrightarrow{OC_1} = -2\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$, $\overrightarrow{OM} = 0 \cdot \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$.

2. Да, будут.

2. 1. 1) $A(2; 0; 0)$; $B(-2; 0; 0)$; $D(2; 4; 0)$; $A_1(2; 0; 4)$; $B_1(-2; 0; 4)$; $C_1(-2; 4; 4)$; $D_1(2; 4; 4)$.

2) $\overrightarrow{OC} \{-2; 4; 0\}$; $\overrightarrow{OB_1} \{-2; 0; 4\}$; $\overrightarrow{OK} \{-2; 2; 2\}$. $\overrightarrow{OC} = -2\vec{i} + 4\vec{j} + 0 \cdot \vec{k}$,
 $\overrightarrow{OB_1} = -2\vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 4\vec{k}$, $\overrightarrow{OK} = -2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$.

2. Да, будут.

3. 1. 1) $C(0; 0; 0)$; $B(-5; 0; 0)$; $A(0; -5\sqrt{3}; 0)$; $D(-5; 0; 5\sqrt{3})$;

2) $\overrightarrow{CM} \left\{ -\frac{10}{3}; -\frac{5\sqrt{3}}{3}; \frac{5\sqrt{3}}{3} \right\}$; $\overrightarrow{CM} = -\frac{10}{3}\vec{i} - \frac{5\sqrt{3}}{3}\vec{j} + \frac{5\sqrt{3}}{3}\vec{k}$.

2. Да, лежат.

4. 1. 1) $A(0; 0; 0)$; $C(0; 4; 0)$; $B(-4\sqrt{3}; 4; 0)$; $D(-4\sqrt{3}; 4; 12)$.

2) $\overrightarrow{AK} \left\{ -\frac{8\sqrt{3}}{3}; 4; 4 \right\}$; $\overrightarrow{AK} = -\frac{8\sqrt{3}}{3}\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$.

2. $m = -6$; $n = 2$.

5. 1. Из точки O опускаем перпендикуляр OE на AC и точку E соединяем с точкой D . Тогда $\angle DEO = 45^\circ$; $OE = OD = 12$. $D(0; 0; 12)$. В треугольнике DOE опускаем перпендикуляр OK на DE . Легко доказать, что $OK \perp ADC$. $\overrightarrow{OK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OD})$, где K — середина ED ($OE = OD$). Для решения задачи необходимо найти координаты точки E . Строим $EF \perp OC$ и из подобия треугольников OFE и AOC находим $EF = \frac{36}{5}$ и $OF = \frac{48}{5}$. Тогда $E(\frac{48}{5}; -\frac{36}{5}; 0)$. Дальнейшее решение очевидно.

Ответ: 1) $A(0; -20; 0)$; $B(-15; 0; 0)$; $C(15; 0; 0)$; $D(0; 0; 12)$.

2) $\overrightarrow{OK} \{4,8; -3,6; 6\}$; $\overrightarrow{OK} = 4,8\vec{i} - 3,6\vec{j} + 6\vec{k}$.

2. При $m = 3$. В этом случае $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ и векторы компланарны.

6. 1. 1) $A(\frac{1}{\sqrt{3}}; -1; 0)$; $C(\frac{1}{\sqrt{3}}; 1; 0)$; $B(-\frac{2}{\sqrt{3}}; 0; 0)$; $D(0; 0; 1)$.

2) Так как $OA = \frac{2}{\sqrt{3}}$, а $OD = 1$, то $\frac{AK}{KD} = \frac{AO^2}{DO^2} = \frac{4}{3}$.

Тогда $\overrightarrow{OK} = \frac{4}{7}\overrightarrow{OD} + \frac{3}{7}\overrightarrow{OA}$. Дальнейшее решение очевидно.

О т в е т: $\overrightarrow{OK} \left\{ \frac{3}{7\sqrt{3}}; -\frac{3}{7}; \frac{4}{7} \right\}$; $\overrightarrow{OK} = \frac{3}{7\sqrt{3}}\vec{i} - \frac{3}{7}\vec{j} + \frac{4}{7}\vec{k}$.

2. При $y = 6$. В этом случае $\vec{p} = 2\vec{m} + 2\vec{n}$ и векторы компланарны.

7. 1. Поместим призму в прямоугольную систему координат так, чтобы B было бы началом координат, а оси OX , OY и OZ были бы сонаправлены с лучами BA , BC и BB_1 соответственно. Пусть боковые ребра призмы и катеты основания равны 1. Тогда $F(1; 0; \frac{1}{2})$; $M(\frac{1}{2}; 0; 1)$; $E(0; \frac{1}{6}; 1)$ и $K(0; \frac{1}{2}; 0)$. Необходимо установить, компланарны ли векторы $\overrightarrow{EK}$, $\overrightarrow{EM}$ и $\overrightarrow{EF}$. $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BE}$; $\overrightarrow{BM} \left\{ \frac{1}{2}; 0; 1 \right\}$; $\overrightarrow{BE} \left\{ 0; \frac{1}{6}; 1 \right\}$. Тогда $\overrightarrow{EM} \left\{ \frac{1}{2}; -\frac{1}{6}; 0 \right\}$. Аналогично получим, что $\overrightarrow{EF} \left\{ 1; -\frac{1}{6}; -\frac{1}{2} \right\}$ и $\overrightarrow{EK} \left\{ 0; \frac{1}{3}; -1 \right\}$. Если указанные векторы компланарны, то должны существовать такие x и y , что $\overrightarrow{EK} = x\overrightarrow{EM} + y\overrightarrow{EF}$. Тогда получим систему

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + y = 0 \\ -\frac{1}{6}x - \frac{1}{6}y = \frac{1}{3} \\ 0 - \frac{1}{2}y = -1. \end{cases}$$

Эта система имеет решение $x = -4$ и $y = 2$. Следовательно, $\overrightarrow{EK} = -4\overrightarrow{EM} + 2\overrightarrow{EF}$. Тем самым доказывается, что указанные точки лежат в одной плоскости.

2. $\vec{a} = x\vec{p} + y\vec{q} + z\vec{m}$.

$x\vec{p} \{x; -2x; x\}$; $y\vec{q} \{2y; 0; -y\}$; $z\vec{m} \{-z; z; 2z\}$.

$\vec{a} \{x + 2y - z; -2x + z; x - y + 2z\}$, так как разложение по базису единственное, то

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ -2x + z = 2 \\ x - y + 2z = -2z = -2. \end{cases}$$

Отсюда: $x = -1$, $y = 1$ и $z = 0$. Ответ: $\vec{a} = -\vec{p} + \vec{q} + 0 \cdot \vec{m}$.

8. 1. Задача решается аналогично задаче 7 (1). Если куб с ребром, равным 1, поместить в прямоугольную систему координат так, чтобы начало координат было в точке B , а оси OX , OY и OZ были бы сонаправлены с лучами BA , BC и BB_1 соответственно, то можно получить, что $\overrightarrow{PK} = 2\overrightarrow{PF} + 2\overrightarrow{PM}$. Этим доказываем, что указанные точки лежат в одной плоскости.

2. $\vec{m} = \frac{2}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b} + \frac{3}{5}\vec{c}$. Задача решается аналогично задаче 7 (2).

§ 2

1. $\sqrt{34}$; $\sqrt{6} + 2\sqrt{14}$.

2. 1) $C(3; 0; -4)$; 2) $BC = 3$; 3) $\vec{BC} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$.

2. 1. $\sqrt{42}$; $2\sqrt{6} - \sqrt{14}$.

2. 1) $C(-1; 0; 1)$; $D(2; 2; 0)$. 2) $BC = \sqrt{3}$; $\vec{AD} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$.

3. 1. 9.

2. $\vec{a} \{-8; 8; 4\}$.

4. 1. $\sqrt{10}$.

2. $\vec{m} \{3; -6; -3\}$.

5. 1. Поместим призму в прямоугольную систему координат так, чтобы начало координат совпадало с точкой B , а оси OX , OY и OZ были бы сонаправлены с лучами BA , BC и BB_1 соответственно. При решении нужно учесть, что точка P — точка пересечения медиан треугольника DC_1C и $\vec{MP} = \frac{1}{3}(\vec{MC}_1 + \vec{MC} + \vec{MD})$. Ответ: $\frac{\sqrt{53}}{6}$.

2. $\vec{AM} = k\vec{AB}$, т. к. точка M лежит на прямой AB . Пусть координаты точки $M(x; y; z)$. Тогда $\vec{AM} \{x+1; y-2; z-1\}$. С другой стороны, $\vec{AM} \{3k; -k; -2k\}$. $|\vec{AM}| = \sqrt{9k^2 + k^2 + 4k^2} = |k|\sqrt{14}$. По условию $|\vec{AM}| = 3\sqrt{14}$. Тогда $k = \pm 3$.

$$\text{Так как } \begin{cases} x+1=3k \\ y-2=-k \\ z-1=-2k \end{cases} \text{ то } \begin{cases} x=8 \\ y=-1 \\ z=-5 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x=-10 \\ y=5 \\ z=7 \end{cases}$$

Ответ: $M(8; -1; -5)$ или $M(-10; 5; 7)$.

6. 1. $\frac{\sqrt{89}}{3}$.

2. $P(-16; 7; -3)$. Задача решается аналогично задаче 5 (2).

7. 1. Поместим тетраэдр в прямоугольную систему координат так, чтобы начало координат совпадало с точкой E . Пусть ось OX противоположно направлена лучу EB , ось OY сонаправлена с лучом EC , а ось OZ сонаправлена с лучом BD . Пусть $P(x; y; z)$. В выбранной системе координат $A(0; -2; 0)$; $B(-4; 0; 0)$; $C(0; 2; 0)$; $D(-4; 0; 4)$. Так как точка P равноудалена от всех вершин тетраэдра, то

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + (y+2)^2 + z^2} &= \sqrt{x^2 + (y-2)^2 + z^2} = \sqrt{(x+4)^2 + y^2 + z^2} = \\ &= \sqrt{(x+4)^2 + y^2 + (z-4)^2}. \end{aligned}$$

Решая эту систему, получим: $x = -\frac{3}{2}$; $y = 0$ и $z = 2$. $P(-\frac{3}{2}; 0; 2)$; $AP = \sqrt{(-\frac{3}{2})^2 + 4 + 4} = \frac{\sqrt{41}}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{41}}{2}$.

2. $\sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2}$ есть расстояние между точками $M(x; y; z)$ и $A(x; y; z)$, а $\sqrt{x^2 + (y-1)^2 + z^2}$ — между точками $M(x; y; z)$ и $B(0; 1; 0)$.

Так как $AB = \sqrt{2}$, то $MA + MB \geq \sqrt{2}$, а по условию $MA + MB = 1$. Следовательно, уравнение не имеет решения.

8. 1. 3.

2. Решением уравнения служат координаты всех точек отрезка AB , где $A(0; 0; 1)$ и $B(1; 0; 0)$. Задача решается аналогично задаче 7.

§ 3

1. 1. 1) $-\frac{a^2}{2}$; 2) 0.

2. Острый.

2. 1. 1) $-a^2$; 2) 0.

2. Тупой.

3. 1. 1) $-\frac{3a^2}{2}$; 2) 0; 2) $180^\circ - \arccos \frac{5}{13}$.

4. 1. 1) $-\frac{3a^2}{4}$; 2) 0.

2. $\arccos \frac{3}{5}$.

5. 1. Пусть вектор $\vec{a} \{x; y; z\}$ составляет с вектором $\vec{i}$ угол α , с вектором $\vec{j}$ — угол β , а с вектором $\vec{k}$ — угол γ . $\cos \alpha = \frac{x}{|\vec{a}|}$; $\cos \beta = \frac{y}{|\vec{a}|}$; $\cos \gamma = \frac{z}{|\vec{a}|}$. Тогда $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{a^2} = 1$. По условию $\alpha = 120^\circ$; $\gamma = 135^\circ$. Тогда $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \cos^2 \beta + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1$. Отсюда $\cos \beta = \pm \frac{1}{2}$. Ответ: 60° или 120° .

2. $\frac{3\sqrt{2}}{8}$. Необходимо куб поместить в прямоугольную систему координат и найти синус одного из углов треугольника.

6. 1. 45° или 135° .

2. $\frac{\sqrt{21}}{8}$. Смотрите указания к задачам 5 (1), 5 (2).

7. 1. $2\sqrt{6}$. Необходимо учесть, что вершина M пирамиды проектируется на биссектрису угла BAD , т. е. на AC . Для решения задачи необходимо найти синус угла между векторами $\vec{AM}$ и $\vec{AC}$.

2. Рассмотрим векторы $\vec{a} \{\sqrt{\sin^2 x + 0,5}; \sqrt{\cos^2 x - 0,5}; \sqrt{5}\}$ и $\vec{b} \{1; 1; 1\}$.

Их скалярное произведение: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{\sin^2 x + 0,5} + \sqrt{\cos^2 x - 0,5} + \sqrt{0,5}$.

С другой стороны, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi$, где $\varphi = \angle \vec{a} \vec{b}$;

$$|\vec{a}| = \sqrt{\sin^2 x + 0,5 + \cos^2 x - 0,5 + 0,5} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{3} \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \cos \varphi = \frac{3}{2} \cos \varphi.$$

Наибольшее значение скалярного произведения равно $\frac{3}{\sqrt{2}}$. Таким образом, наибольшее значение выражения $\sqrt{\sin^2 x + 0,5} + \sqrt{\cos^2 x - 0,5} + \sqrt{0,5}$ равно $3\sqrt{0,5}$. Оно достигается при $x = \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

8. 1. $2\sqrt{2}$. Необходимо учесть, что вершина D проектируется на биссектрису угла BAC , т. е. на AK . Для решения задачи необходимо найти синус угла между векторами $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AK}$.

2. Рассмотрим векторы $\vec{a} \{ \sqrt{1+x}; \sqrt{1-x} \}$ и $\vec{b} \{ 1; 1 \}$. Их скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$, где $\varphi = \angle \vec{a} \vec{b}$; $|\vec{a}| = \sqrt{1+x+1-x} = \sqrt{2}$; $|\vec{b}| = \sqrt{2}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cos \varphi = 2 \cos \varphi$. Наибольшее значение скалярного произведения равно 2. Таким образом, наибольшее значение выражения $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + 1$ равно 3. Оно достигается при $x = 0$.

§ 4

1. $1. \arccos \frac{1}{\sqrt{10}} \approx 71^\circ 34'$.

2. $1. \arccos \frac{1}{2\sqrt{7}} \approx 79^\circ 6'$.

3. 1. Необходимо доказать, что $\angle ACB = 90^\circ$ и тогда $AB = 5$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 25 + 0 = 25. \end{aligned}$$

Ответ: 25.

2. Пусть $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{CC_1}$ — базисные векторы.

Тогда $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CC_1}$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{EF}^2 &= \frac{1}{4}\overrightarrow{CA}^2 + \overrightarrow{CB}^2 + \frac{1}{4}\overrightarrow{CC_1}^2 - \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CC_1} = \\ &= \frac{1}{4}a^2 + a^2 + \frac{1}{4}a^2 - a^2 \left(-\frac{1}{2}\right) - 0 + 0 = 2a^2. \quad EF = a\sqrt{2}. \quad \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{CC_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CC_1}^2 = \frac{1}{2}a^2. \end{aligned}$$

$$\cos \varphi = \frac{|\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{CC_1}|}{|\overrightarrow{EF}| \cdot |\overrightarrow{CC_1}|} = \frac{a^2}{2a \cdot a\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}. \quad \varphi = \arccos \frac{1}{2\sqrt{2}} \approx 69^\circ 18'.$$

Ответ: 1) $a\sqrt{2}$; 2) $\approx 69^\circ 18'$.

4. 1. 100.

2. 1) $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. 2) $\arccos \frac{1}{\sqrt{6}} \approx 65^\circ 54'$. Задача решается аналогично задаче 3 (1, 2).

5. 1. Поместим призму в прямоугольную систему координат. Пусть D будет началом координат. Положительное направление оси Ox противоположно лучу DB , положительное направление оси Oy сонаправлено с лучом DC , а положительное направление оси Oz совпадает с лучом CC_1 . Обозначим искомый угол за φ :

$$\overrightarrow{CB_1} \{-4; -2; 2\}; \quad \overrightarrow{AB_1} \{-4; 2; 2\}.$$

$$\sin \varphi = \frac{|\overrightarrow{CB_1} \cdot \overrightarrow{AB_1}|}{|\overrightarrow{CB_1}| \cdot |\overrightarrow{AB_1}|} = \frac{16 - 4 + 4}{\sqrt{16+4+4} \cdot \sqrt{16+4+4}} = \frac{2}{3}. \quad \varphi = \arcsin \frac{2}{3} \approx 41^\circ 49'.$$

2. Пусть $BD = BC = BA = 1$ и пусть E — середина DC .

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} \quad \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BD} = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}\right) \cdot \overrightarrow{BD} = \\ = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{2} = 0.$$

Отсюда следует, что $AE \perp BD$. Аналогично можно доказать, что $AE \perp BC$. В таком случае $AE \perp DBC$ и плоскости DAC и DBC перпендикулярны.

6. 1. $\arcsin \sqrt{\frac{5}{6}} \approx 43^\circ 59'$. Задача решается аналогично задаче 5 (1).

2. Пусть $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BB_1}$ — базисные векторы.

$$\overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1}; \quad \overrightarrow{A_1C_1} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$$

$$\overrightarrow{BD_1} \cdot \overrightarrow{A_1C_1} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1}) \cdot (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}) = \overrightarrow{BC}^2 - \overrightarrow{BA}^2 = 1 - 4 = -3 \neq 0.$$

Следовательно, BD_1 не перпендикулярен к A_1C_1 и BD_1 не перпендикулярен плоскости A_1C_1D .

7. 1. Опустим из вершины M перпендикуляр MO на плоскость ABC . По теореме о трех перпендикулярах $OA \perp AC$. Очевидно, что точка O находится вне треугольника ABC . Пусть $\angle MAO = \varphi$. $\angle MAO = 180^\circ - \angle CB \hat{M} A$.

$$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB};$$

$$\overrightarrow{MB}^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{CB}^2 + 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = \\ = 16 + 9 + 25 + 0 + 2 \cdot 4 \cdot \cos(180^\circ - \varphi) + 0 = 50 + 40 \cos(180^\circ - \varphi). \text{ По} \\ \text{условию } MB = \sqrt{30}. \text{ Тогда } 50 - 40 \cos \varphi = 30; \cos \varphi = \frac{1}{2} \text{ и } \varphi = 60^\circ. \text{ Высота} \\ \text{пирамиды } MO = MA \cdot \sin 60^\circ = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}.$$

2. Пусть $DA = DB = DC = 1$ и пусть $\angle ADC = \alpha$; $\angle ADB = \beta$; $\angle CDB = \gamma$.

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA})(\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA}) = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DA}^2 = \\ = \cos \gamma - \cos \beta - \cos \alpha + 1. \cos \beta < 0; \cos \alpha < 0. \text{ Значит, } -\cos \beta > 0 \text{ и } -\cos \alpha > 0; \\ |\cos \gamma| < 1, \text{ а потому } 1 + \cos \gamma > 0. \text{ В таком случае } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} > 0 \text{ и } \angle ACB - \\ \text{острый. Аналогично доказываем, что и все остальные углы острые.}$$

8. 1. $\frac{3\sqrt{6}}{4}$. Задача решается аналогично задаче 7(1).

2. От вершины M отложим единичные векторы $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$ и $\overrightarrow{MD}$, сонаправленные с векторами $\overrightarrow{ME}$, $\overrightarrow{MF}$, $\overrightarrow{MK}$ и $\overrightarrow{MP}$. Тогда $ABCD$ — квадрат и $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$. $(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}) \cdot (\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) = 0$.

$$\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0.$$

$$\cos \alpha - \cos \beta - 1 + \cos \alpha = 0; \cos \beta = 2 \cos \alpha - 1 \text{ и } \beta = \arccos(2 \cos \alpha - 1).$$

§ 5

1. 1. а) $(-100; -200; -1)$, б) $(100; 200; -1)$.

2. Так как при движении отрезок отображается на равный отрезок, то каждая сторона треугольника отображается на равный ей отрезок, и,

следовательно, треугольник отображается на треугольник с соответственно равными сторонами, т. е. на равный треугольник.

2. 1. а) $(-0,01; -0,02; -1)$; б) $(0,1; 0,1; 0)$.

2. Задача решается аналогично задаче 1 (2).

3. 1. Указание: а) вычислите координаты середины отрезка AB ; б) Вычислите координаты середины отрезка BC .

2. Рассмотрим двугранный угол, образованный полуплоскостями α и β с границей a и линейным углом lk , где l и k — лучи, принадлежащие полуплоскостям α и β соответственно. Пусть при движении $a \rightarrow a_1$; $\alpha \rightarrow \alpha_1$; $\beta \rightarrow \beta_1$; $k \rightarrow k_1$; $l \rightarrow l_1$. Очевидно, что прямая a_1 будет общей границей полуплоскостей α_1 и β_1 , в которых будут соответственно лежать лучи l_1 и k_1 . Так как при движении углы сохраняются, то углы lk и l_1k_1 равны между собой. Следовательно, при движении двугранный угол отображается на равный ему двугранный угол.

4. 1. а) $\{3; 3; 3\}$; б) указание: найдите середину отрезка AB .

2. Пусть прямая AB пересекает плоскость α в точке A и образует с ней угол φ . Пусть C — проекция точки B на плоскость α . Проведем в плоскости α через точку C прямую b . Очевидно, что $BC \perp b$. Пусть при движении $\alpha \rightarrow \alpha_1$; $A \rightarrow A_1$; $B \rightarrow B_1$; $C \rightarrow C_1$ и $b \rightarrow b_1$. Очевидно, что прямая A_1B_1 будет пересекать плоскость α_1 , а прямые A_1C_1 и b_1 будут лежать в плоскости α_1 . Так как при движении углы сохраняются, то будет выполняться $B_1C_1 \perp b$, $B_1C_1 \perp A_1C_1$, т. е. $B_1C_1 \perp \alpha$, и $\angle B_1A_1C_1$ — угол между A_1B_1 и плоскостью α_1 . Так как при движении углы сохраняются, то $\angle B_1A_1C_1 = \angle BAC = \varphi$. Следовательно, при движении прямая и плоскость, составляющие угол φ , отображаются на прямую и плоскость, составляющие угол φ .

5. 1. Заметим прежде всего, что точка $A(10; 20; 0)$ лежит в плоскости OXY . Пусть при осевой симметрии относительно прямой a точка A отображается на точку $B(x; y; z)$. Тогда середина отрезка AB — точка M имеет координаты $(k; k; 0)$, где $k \neq 0$, так как принадлежит прямой a и не совпадает с началом координат — O . Значит, $\overline{MA} \perp \overline{MO}$ и $(10 - k)k + (20 - k)k = 0$. Откуда $k = 15$. Используя формулы координат середины отрезка, получаем $15 = \frac{10+x}{2}$, $15 = \frac{20+y}{2}$ и $0 = \frac{0+z}{2}$. Откуда $A_1(20; 10; 0)$.

2. При данном отображении пространства на себя произвольные точки $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ переходят в точки $A_1(2x_1; 2y_1; 2z_1)$ и $B_1(2x_2; 2y_2; 2z_2)$. Пользуясь координатной формулой для нахождения расстояния между точками, находим, что $AB \neq A_1B_1$. Это значит, что данное отображение движением не является.

6. Задачи решаются аналогично задачам 5 (1, 2).

Ответ: 1. $(0; 10; 20)$. 2. Да, является.

7. 1. Введем прямоугольную систему координат, будем рассматривать прямые m_1 и m_2 в качестве осей OX и OY . При симметрии относительно оси OX $A(x; y; z) \rightarrow B(x; -y; -z)$, а при симметрии относительно оси OY $B(x; -y; -z) \rightarrow C(-x; -y; z)$. В таком случае точки A и C симметричны относительно оси OZ , которая перпендикулярна к OX и OY .

2. Да, будет. Такая точка может быть получена композицией центральной симметрии относительно начала координат и параллельного переноса на вектор $\vec{p} \{2; -3; 1\}$.

8. 1. При симметрии относительно $A: M \rightarrow M_1$, при симметрии относительно $B: M_1 \rightarrow M_2$, а при симметрии относительно $C: M_2 \rightarrow M_3$. Образовался пространственный четырехугольник $MM_1M_2M_3$. Точки M и M_3 будут симметричны относительно точки D — середины MM_3 . Точки A, B, C и D — последовательно середины сторон указанного четырехугольника. Тогда легко доказать, что $ABCD$ — параллелограмм.

2. Да, будет. Такая точка может быть получена композицией зеркальной симметрии относительно плоскости OXZ и параллельного переноса на вектор $\vec{p} \{-1; -2; 1\}$.

§ 6

1. 1) Рассмотрим прямую a , перпендикулярную некоторой плоскости α , и две пересекающиеся прямые b и c , лежащие в плоскости α . Очевидно, что $a \perp b$ и $a \perp c$. Пусть при движении $a \rightarrow a_1, b \rightarrow b_1, c \rightarrow c_1, \alpha \rightarrow \alpha_1$. Легко доказать, что прямые c_1 и b_1 лежат в плоскости α_1 , а прямая a_1 пересекает плоскость α_1 . Так как при движении углы сохраняются, то $a_1 \perp b_1$ и $a_1 \perp c_1$. Значит, $a_1 \perp \alpha_1$, т. е. при движении прямая, перпендикулярная плоскости, отображается на прямую, перпендикулярную плоскости.

2) Очевидно, что если одна из двух параллельных прямых пересекает плоскость α , то и другая пересекает ее. Пусть данные прямые a и b пересекают данную плоскость α в точках A и B соответственно. Значит, при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AB}$ $a \rightarrow b, \alpha \rightarrow \alpha_1$. Тогда по доказанному в пункте а) прямая b будет перпендикулярна плоскости α .

2. Указание: задача решается аналогично задаче 1 (1).

3. 1) Пусть дана правильная четырехугольная пирамида $EABCD$ с высотой EO . При симметрии относительно прямой EO $E \rightarrow E, A \rightarrow C, C \rightarrow A, B \rightarrow D, D \rightarrow B$. Значит квадрат $ABCD$ отображается на себя. Следовательно, EO — ось симметрии пирамиды.

2) Пусть H — произвольная точка пирамиды. Рассмотрим сечение пирамиды плоскостью EOH . Очевидно, оно является треугольником. По указанному в пункте 1) при симметрии относительно прямой EO точка H отображается на точку H_1 , принадлежащую пирамиде. Но очевидно также, что точка H_1 принадлежит плоскости EOH , т. е. принадлежит сечению. Это означает, что треугольник, полученный в сечении, отображается на

себя при симметрии относительно прямой EO , проходящей через одну из его вершин. Значит, этот треугольник равнобедренный.

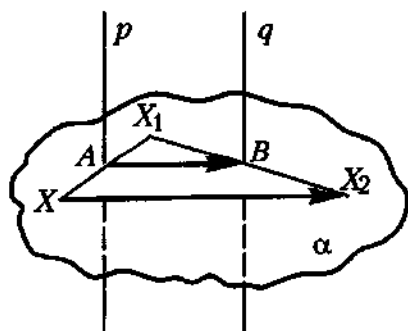
4. Указание. Задача решается аналогично задачам 3 (1, 2).

5. 1) Указание. Задача решается аналогично задаче 3 (1).

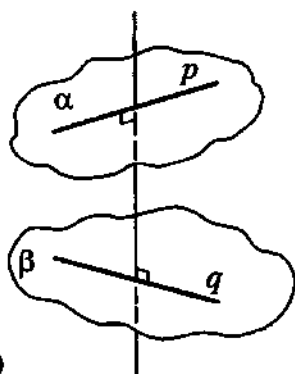
2) Проведем плоскость α через прямую c , содержащую середины противоположных ребер правильного тетраэдра. Пусть точка M принадлежит сечению тетраэдра плоскостью α . Тогда по доказанному в задаче 1 при симметрии относительно прямой c точка M отображается на точку M_1 , принадлежащую одновременно плоскости α и тетраэдру. Значит, сечение при симметрии относительно прямой c отобразится на себя. Возьмем теперь произвольную точку N , принадлежащую одной из двух частей, на которые плоскость α делит тетраэдр. По доказанному в пункте 1) при симметрии относительно прямой c точка N отображается на точку N_1 , принадлежащую тетраэдру. По определению симметричных точек отрезок NN_1 пересекает прямую c , а значит, и плоскость α . Следовательно, точки N и N_1 принадлежат разным частям тетраэдра. Значит, эти части отображаются друг на друга при симметрии относительно прямой c . Отсюда следует, что плоскость α делит тетраэдр на две равные части.

6. Указание. Задача решается аналогично задачам 5 (1), 5 (2).

7. 1. Пусть $p \parallel q$ (рис. 119а). Композицией осевых симметрий последовательно относительно осей p и q является параллельный перенос на вектор $2\overline{AB}$, который отображает точку x на точку x_2 . Композиция же симметрий последовательно относительно осей q и p есть параллельный перенос на вектор $2\overline{BA}$, который отображает точку x_2 на точку x . Исходя из условия $2\overline{AB} = 2\overline{BA}$, т. е. $\overline{AB} = \vec{0}$, что противоречит условию. Пусть теперь p и q — скрещивающиеся прямые (рис. 119б). В таком случае $S_q \cdot S_p$



а)



б)

Рис. 119

отображает общий перпендикуляр прямых p и q на себя, причем это отображение прямой m есть перенос $\vec{c} \neq \vec{0}$, но тогда $S_p \cdot S_q \neq S_q \cdot S_p$, что снова противоречит условию. Отсюда следует, что p и q — пересекающиеся прямые.

2. Через точку A и прямую l (рис. 120) проводим плоскость β , которая пересекает плоскость α по прямой p . В плоскости β строим прямую m , параллельную l . Пусть эта прямая пересекает p в точке L . Через середину O , отрезок ML и точку A проводим прямую до пересечения с l в точке A_1 . Легко доказать, что A_1 — искомая точка.

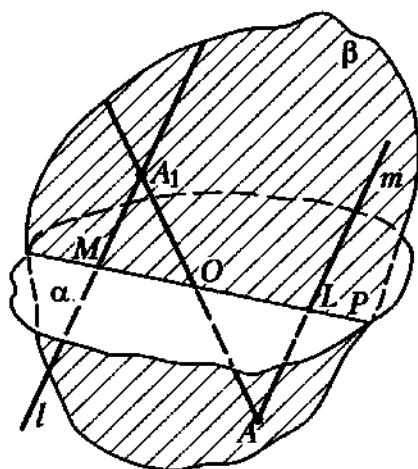


Рис. 120

8. 1. На рис. 121 угол POC — линейный угол двугранного угла $\alpha\alpha\beta$ и l — его биссектриса. Выберем в грани α произвольную точку A и докажем, что при осевой симметрии относительно оси l она отображается на точку, принадлежащую грани β . Для этого через точку A проведем плоскость, параллельную ребру a и перпендикулярную l . Эта плоскость пересекает грани α и β по параллельным прямым m и n , а плоскость линейного угла γ по прямой CB . CB пересекает l в точке M . Через точки A и M проводим прямую до пересечения с гранью β в точке A_1 . Тогда легко доказать, что $l \perp AA_1$ и $A_1M = MA$. Этим доказываем, что точки A и A_1 симметричны относительно оси l . Аналогично можно дока-

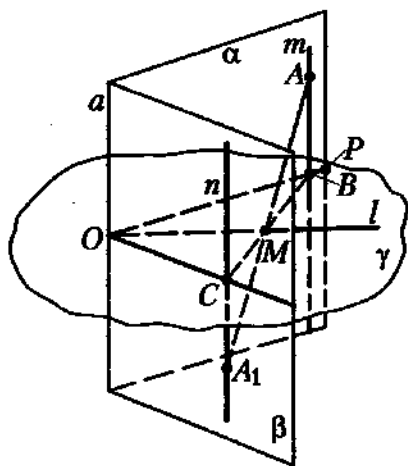


Рис. 121

зять, что каждая точка грани α имеет себе симметричную точку в грани β и наоборот. Значит при симметрии относительно оси l двугранный угол $\alpha\alpha\beta$ отображается на себя. Следовательно, l — ось симметрии двугранного угла.

2. На рис. 122 $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DA_1} + \overrightarrow{DC_1} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD_1} = 2\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DC} + 2\overrightarrow{DD_1} = 2(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD_1}) = 2\overrightarrow{DB_1}$. Это значит, что точка B_1 есть середина диагонали построенного на отрезках DB , DA_1 и DC_1 параллелепипеда, т. е. центр его симметрии.

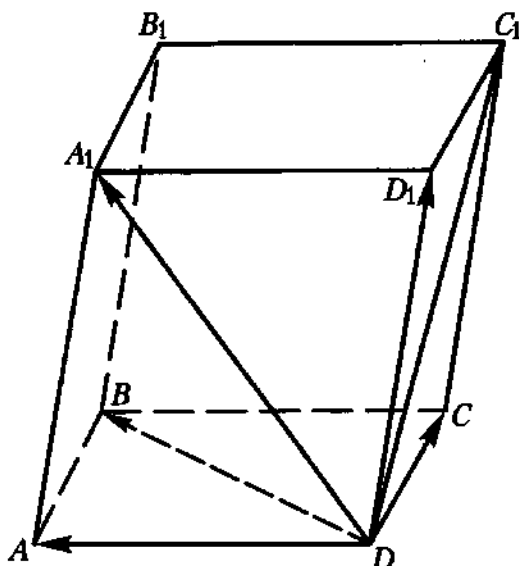


Рис. 122

§ 7

1. $1. \frac{S\sqrt{3}}{2}$. 2. 8π .

2. $1. 2Q$. 2. 64π .

3. $1. \arctg(\pi \operatorname{tg} \varphi)$. 2. $12\pi\sqrt{3}$.

4. $1. \arctg\left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\pi}\right)$. 2. 8π .

5. $1. \frac{2a^2\sqrt{3}}{3}$.

2. πa^2 . Указание: боковая поверхность состоит из трех частей, которые вместе составляют половину площади боковой поверхности цилиндра с высотой, равной a , и радиусом оснований a (рис. 123).

6. $1. 42$.

2. $\frac{\pi a^2}{2}$. Указание: боковая поверхность состоит из трех частей, которые вместе составляют половину площади боковой поверхности цилиндра с высотой, равной a , и радиусом оснований — $\frac{a}{2}$ (рис. 124).

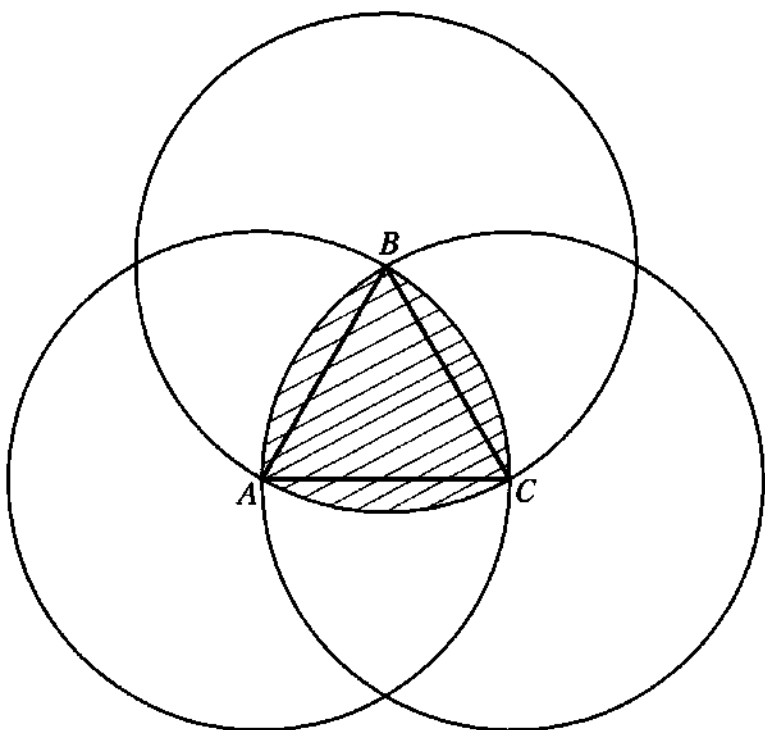


Рис. 123

7. 1. Поместим цилиндр в прямоугольную систему координат, как это указано на рис. 125. Пусть R — радиус основания, а h — высота цилиндра. $A (R; 0; 0)$; $C (-R; 0; h)$; $M (R; 0; \frac{h}{2})$; $L (0; R; 0)$. $\overline{AC} \{-2R; 0; h\}$;

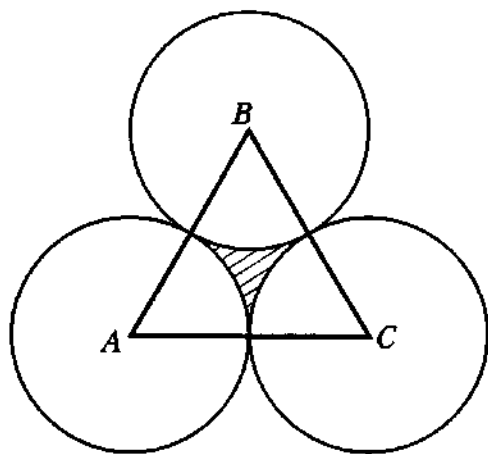


Рис. 124

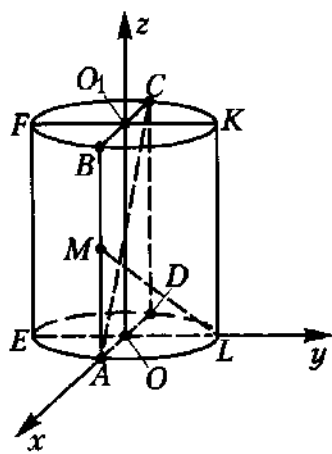


Рис. 125

$\overline{ML} \{-R; R; -\frac{h}{2}\}$. Так как $AC \perp ML$, то $\overline{AC} \cdot \overline{ML} = 0$, т. е. $2R^2 - \frac{h^2}{2} = 0$. Кроме того, $2Rh = 4$ и $h = \frac{2}{R}$. Тогда $2R^2 - \frac{2}{R^2} = 0$ и $R = 1$; $h = 2$. $S = 4\pi + 2\pi \cdot 1 = 6\pi$.
 Ответ: 6π .

2. На рис. 126 $EFLK$ — осевое сечение цилиндра. По условию $KL = EL = 2R$; $LP = \frac{a}{2} - R$. $\frac{KL}{LP} = \operatorname{tg} \varphi = 2$. $\frac{2R}{\frac{a}{2} - R} = 2$. Отсюда $R = \frac{a}{4}$. $S_{\text{бок}} = 2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot \frac{a^2}{16} = \frac{\pi a^2}{4}$. Ответ: $\frac{\pi a^2}{4}$.

8. 1. Поместим цилиндр в прямоугольную систему координат, аналогично задаче 7 (1). Пусть R — радиус основания, а h — высота цилиндра. $N(\frac{R}{2}; \frac{R}{2}; 0)$; $M(\frac{R}{2}; -\frac{R}{2}; \frac{h}{2})$. $MN = \sqrt{R^2 + \frac{h^2}{4}}$. Исходя из условия, имеем

$$\begin{cases} R^2 + \frac{h^2}{4} = 17 \\ 2Rh = 16 \end{cases}; \begin{cases} h = \frac{8}{R} \\ R^2 + \frac{16}{R^2} = 17. \end{cases}$$

$h^4 - 17R^2 + 16 = 0$. $R_1 = 1$, $R_2 = 4$. Отсюда $h_1 = 8$, $h_2 = 2$. Тогда $S_1 = 16\pi + 2\pi \cdot 1 = 18\pi$; $S_2 = 16\pi + 2\pi \cdot 16 = 48\pi$. Ответ: 18π или 48π .

2. Как указано на рис. 127, окружности оснований цилиндра вписаны в правильные треугольники EFK и $E_1F_1K_1$. Это вытекает из того, что плоскости оснований цилиндра параллельны плоскости диагонального сечения BMD , а само диагональное сечение, исходя из условия, правильный треугольник. $AC = a\sqrt{2}$; $AP = \frac{a\sqrt{2}-h}{2}$; $EK = 2AP = a\sqrt{2} - h$. Радиус основания цилиндра $r = \frac{EK}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{2}-h}{2\sqrt{3}}$. $S_{\text{бок}} = 2\pi rh = 2\pi \frac{a\sqrt{2}-h}{2\sqrt{3}} \cdot h = \frac{\pi h}{\sqrt{3}}(a\sqrt{2} - h)$.

Ответ: $\frac{\pi h}{\sqrt{3}}(a\sqrt{2} - h)$.

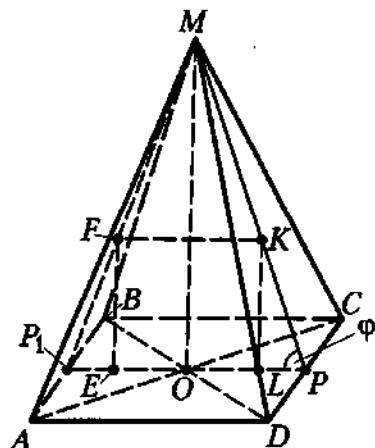


Рис. 126

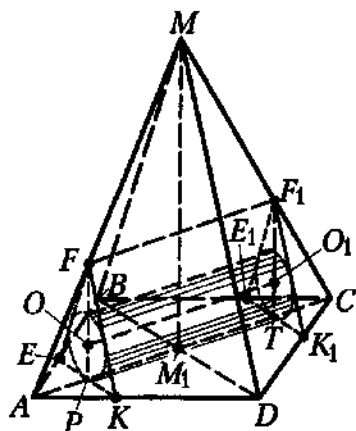


Рис. 127

§ 8

1. $1. \pi a^2$. 2. 64π .

2. 1. $\frac{\pi n^3 \sqrt{3}}{4}$ 2. 2 и 14.

3. 1. $8\sqrt{2}$. 2. $\pi^2 \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha$.

4. 1. 150π . 2. $\frac{\pi n^2 \alpha \operatorname{tg} \varphi}{\sin \varphi}$.

5. 1. Если наибольший угол между образующими конуса тупой, то наибольшую площадь имеет сечение с взаимно перпендикулярными образующими, а если острый или прямой — то осевое сечение. Если α — центральный угол развертки, то $\alpha = \frac{R}{L} \cdot 360^\circ$ и тогда $\frac{R}{L} = \frac{3}{4}$. Пусть φ — наибольший угол между образующими и $\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{3}{4} > \frac{\sqrt{2}}{2}$. Отсюда $45^\circ < \frac{\varphi}{2} < 90^\circ$, т. е. $90^\circ < \varphi < 180^\circ$. Следовательно, наибольшую площадь имеет сечение с взаимно перпендикулярными образующими. Если β — искомый угол, то $\sin \beta = \frac{H}{h}$, где H — высота конуса, а h — высота сечения.

$$H = \sqrt{L^2 - \frac{9}{16}L^2} = \frac{L\sqrt{7}}{4}; \quad h = \frac{L\sqrt{2}}{4}. \quad \text{Тогда } \sin \beta = \frac{\sqrt{14}}{4}. \quad \text{О т в е т: } \arcsin \frac{\sqrt{14}}{4}.$$

2. 60° .

6. 1. 90° . Указание: задача решается аналогично задаче 5 (1), но в данном случае наибольшую площадь имеет осевое сечение.

2. 60° .

7. 1. Основание конуса лежит в плоскости $z = -2$. Пусть $M(x; y; -2)$ — центр окружности основания. $MA = MB = MC$.

$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2}$. Отсюда следует, что

$$\begin{cases} -2x - 4y + 5 = -8x - 4y + 20 \\ -2x - 4y + 5 = -6x - 8y + 25. \end{cases}$$

$x = \frac{5}{2}$; $y = \frac{5}{2}$ и $z = -2$. Координаты вершины конуса $M\left(\frac{5}{2}; \frac{5}{2}; 1\right)$. Радиус

основания $R = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$. Образующая $l = \sqrt{\frac{10}{4} + 9} = \frac{\sqrt{49}}{2}$. $S_{\text{бок}} = \pi R l =$
 $= \pi \cdot \frac{\sqrt{10}}{2} \cdot \frac{\sqrt{46}}{2} = \frac{\pi\sqrt{115}}{2}$. Сечение делит высоту конуса в отношении 1 : 3.

$S_{\text{осн}} = \frac{5\pi}{2}$ и $S_{\text{сеч}} = \frac{1}{9} \cdot S_{\text{осн}} = \frac{5\pi}{18}$. О т в е т: $S_{\text{сеч}} = \frac{5\pi}{18}$; координаты вершины

$M\left(\frac{5}{2}; \frac{5}{2}; 1\right)$; $S_{\text{бок}} = \frac{\pi\sqrt{115}}{2}$.

2. Пусть $ABCD$ — осевое сечение конуса и $AC \perp BD$. BK — высота конуса. Легко доказать, что $BK = KD$, $KD = R + r$, где R и r — радиусы основания. Пусть l — образующая конуса и φ — угол между ней и плоскостью основания. Отсюда $BK = KD = l \sin \varphi$. В таком случае $R + r = l \sin \varphi$ и $S_{\text{бок. ус. конуса}} = \pi l^2 \sin \varphi$. Площадь боковой поверхности второго конуса равна

$\pi BK \cdot BD = \pi l \sin \varphi \cdot l \sqrt{2} \sin \varphi = \pi l^2 \sqrt{2} \sin^2 \varphi$. По условию $\frac{\pi l^2 \sin \varphi}{\pi l^2 \sqrt{2} \sin^2 \varphi} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.
Отсюда $\sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\varphi = 60^\circ$.

Ответ: 60° .

8. 1. $\frac{65\pi}{4}$. Указание. Необходимо учесть, что треугольник ABC прямоугольный и радиус основания конуса равен $\frac{5}{2}$.

2. 60° .

§ 9

1. 1. $\frac{84\pi}{5}$. 2. $\frac{\pi a^2 \sqrt{2}}{12}$.

2. 1. 16π . 2. $\frac{2\pi a^2 \sqrt{3}}{9}$.

3. 1. $\pi a^2 (3 + \sqrt{2})$. 2. $\frac{\pi a^2}{4 \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \beta}$.

4. 1. 96π . 2. $\frac{\pi \cdot a^2 \cos^2 \alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \varphi}$.

5. 1. Обозначим через S_a площадь поверхности, которая образуется при вращении отрезка a вокруг оси. Тогда $S_{\text{т. вращ.}} = \pi AC(AO_1 + CO_2) + \pi a AO_1 + \pi a CO_2 = \pi(AO_1 + CO_2)(AC + a)$ (рис. 128). $\angle BAC = \angle BCA = 30^\circ$; $\angle BAE = \angle O_1BA = 15^\circ$; $\angle O_2BC = 45^\circ$; $AC = a\sqrt{3}$; $AO_1 = a \sin 15^\circ$; $CO_2 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Тогда $S = \pi a^2 \left(\sin 15^\circ + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) (\sqrt{3} + 1)$.

2. $S = \frac{\pi^2 \operatorname{ctg} \varphi \cos \frac{\pi}{5}}{1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi \cos^2 \frac{\pi}{5}}$.

6. 1. $S_{\text{т. вр.}} = \pi BC \cdot BO_1 + \pi AB \cdot (AC + BO_1) + \pi AD \cdot (AC + DO_2) + \pi DC \cdot DO_2$ (рис. 129). Так как $AB = CD$ и $BC = AD$, то

$$\begin{aligned} S &= \pi BC \cdot BO_1 + \pi AB \cdot (AC + BO_1) + \pi BC \cdot (AC + DO_2) + \pi AB \cdot DO_2 = \\ &= \pi BC \cdot (BO_1 + DO_2 + AC) + \pi \cdot AB (BO_1 + DO_2 + AC) = \\ &= \pi (AB + BC) (BO_1 + DO_2 + AC); \end{aligned}$$

$AB + BC = \frac{P}{2}$; $BO_1 + DO_2 = AC$. Тогда $S = \pi \frac{P}{2} \cdot 2AC = \pi Pd$. Ответ: πPd .

2. $\frac{l^2 \operatorname{ctg} \varphi \cdot \cos \frac{\pi}{5}}{\operatorname{ctg}^2 \varphi + \cos^2 \frac{\pi}{5}}$.

7. 1. Можно доказать, что площадь поверхности, образованной при вращении ломаной линии вокруг оси l (рис. 130) равна площади поверхности, которая образуется при вращении отрезка MP вокруг той же оси. $MP = 8a$; $\angle PMO = \frac{\alpha}{2}$; $PO = 8a \sin \frac{\alpha}{2}$; $S_{\text{т. вращ.}} = \pi \cdot PO \cdot PM = \pi \cdot 8a \cdot 8a \sin \frac{\alpha}{2} = 64\pi a^2 \sin \frac{\alpha}{2}$.
Ответ: $64\pi a^2 \sin \frac{\alpha}{2}$.

$$= \frac{a^2}{4} \left(\operatorname{tg} \varphi + \frac{3}{\operatorname{tg} \varphi} + 2\sqrt{3} \right); \quad \operatorname{tg} \varphi + \frac{3}{\operatorname{tg} \varphi} = \sqrt{3} \left(\frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{\operatorname{tg} \varphi} \right) \geq 2\sqrt{3}. \quad S_{\text{наим}} = a^2\sqrt{3}.$$

Это достигается, если $\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{3}$, т. е. $\varphi = 60^\circ$.

Ответ: $S = \frac{a^2}{4} \left(\operatorname{tg} \varphi + \frac{3}{\operatorname{tg} \varphi} + 2\sqrt{3} \right); \quad S_{\text{наим}} = a^2\sqrt{3}; \quad \varphi = 60^\circ.$

8. 1. $36\pi a^2\sqrt{2}.$

2. $S = \frac{a^2}{3} \left(\operatorname{tg} \varphi + \frac{3}{\operatorname{tg} \varphi} + 2\sqrt{3} \right); \quad S_{\text{наим}} = \frac{4a^2\sqrt{3}}{3}; \quad \varphi = 60^\circ.$

Задачи решаются аналогично задачам 7 (1, 2).

§ 10

1. 1. а) $(x-3)^2 + y^2 + z^2 = 16$; б) да; нет.

2. 13.

2. 1. а) $x^2 + y^2 + (z-4)^2 = 9$; б) нет; да.

2. 13.

3. 1. $(x-1)^2 + y^2 + (z-\sqrt{3})^2 = 4$ или $(x-1)^2 + y^2 + (z+\sqrt{3})^2 = 4.$

2. $\frac{a\sqrt{2\cos 2\alpha}}{4}.$

4. 1. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ или $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 9.$

2. $\frac{a\sqrt{\cos \alpha}}{2\cos \frac{\alpha}{2}}.$

5. 1. Очевидно, что $z = 0$. Пусть $M(x; y; z)$ — искомая точка пересечения. Она лежит на прямой AB . Это значит, что $\overline{AM} = k\overline{AB}$.
 $\overline{AM} \{x - \sqrt{2}; y - \sqrt{2}; z\}; \quad \overline{AB} \{-2\sqrt{2}; \sqrt{2}; \sqrt{2}\}.$

$$\begin{cases} x - \sqrt{2} = -2k\sqrt{2} \\ y - \sqrt{2} = k\sqrt{2} \\ z = k\sqrt{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2k\sqrt{2} + \sqrt{2} \\ y = k\sqrt{2} + \sqrt{2} \\ z = k\sqrt{2}. \end{cases}$$

С другой стороны, эта точка лежит на сфере. Тогда $(\sqrt{2}(1-2k))^2 + (\sqrt{2}(k+1))^2 + (k\sqrt{2})^2 = 4$. Отсюда $6k^2 - 2k = 0; k_1 = 3, k_2 = 0$.

Следовательно, $\begin{cases} x_1 = -5\sqrt{2} \\ y_1 = 4\sqrt{2} \\ z_1 = 3\sqrt{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} x_2 = \sqrt{2} \\ y_2 = \sqrt{2} \\ z_2 = 0. \end{cases}$

Ответ: $(-5\sqrt{2}; 4\sqrt{2}; 3\sqrt{2})$ и $(\sqrt{2}; \sqrt{2}; 0)$.

2. Отметим, что центр сферы $O_1(0; 0; \frac{1}{2})$ и ее радиус равен $\frac{7}{13}$. Опустим из начала координат перпендикуляр OK на AB . $OK = \frac{12}{5}$. Соединим точки C и K . В треугольнике $СОК$ опустим перпендикуляр OM на $СК$.
 $СК = \sqrt{\frac{144}{25} + 1} = \frac{13}{5}; \quad OM = \frac{12}{13}$. OM — расстояние от точки O до плоскости ABC . Построим $O_1M_1 \perp СК$; O_1M_1 — расстояние от центра сферы O_1 до

плоскости ABC . $O_1M_1 = \frac{1}{2}OM = \frac{6}{13} < \frac{7}{13}$. Следовательно, пересечением сферы и плоскости является окружность с радиусом $r = \sqrt{\frac{49}{169} - \frac{36}{169}} = \frac{\sqrt{13}}{13}$. Длина этой окружности $C = \frac{2\pi\sqrt{13}}{13}$.

О т в е т: да, пересекает, длина линии пересечения $\frac{2\pi\sqrt{13}}{13}$.

6. 1. $(2; 1; \frac{1}{2})$; $(0; 3; -\frac{5}{2})$.

2. Если $R > \frac{2}{7}$, то сфера и плоскость пересекаются по окружности.

Если $R = \frac{2}{7}$, то сфера и плоскость имеют только одну общую точку. Если $R < \frac{2}{7}$, то сфера и плоскость общих точек не имеют. Указание: задачи решаются аналогично задачам 5 (1, 2).

7. 1. Перепишем уравнения данных сфер в каноническом виде: $(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 4$ и $(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 9$. Первая сфера имеет центр в точке $O_1(1; 0; -1)$, а вторая — в точке $O_2(-1; 1; 1)$. Радиусы сфер $R_1 = 2$; $R_2 = 3$. Расстояние между центрами $O_1O_2 = \sqrt{4+1+4} = 3$; $R_2 - R_1 < O_1O_2 < R_1 + R_2$. Следовательно, сферы пересекаются. Пусть A — общая точка этих сфер. Тогда высота h треугольника O_1AO_2 есть радиус линии пересечения этих сфер. $O_1O_2 = 3$; $O_1A = 2$; $O_2A = 3$. $S_{\triangle O_1AO_2} = 2\sqrt{2}$. $h = \frac{4\sqrt{2}}{3}$. Тогда длина окружности $C = \frac{8\pi\sqrt{2}}{3}$. О т в е т: $\frac{8\pi\sqrt{2}}{3}$.

2. Пусть $M(x; y; z)$ принадлежит искомому множеству $MA = \sqrt{(x-2)^2 + y^2 + z^2}$; $MB = \sqrt{(x+4)^2 + y^2 + z^2}$; $2MA = MB$.

$$2\sqrt{(x-2)^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(x+4)^2 + y^2 + z^2}.$$

$4(x-2)^2 + 4y^2 + 4z^2 = (x+4)^2 + y^2 + z^2$. Отсюда имеем, что $(x-4)^2 + y^2 + z^2 = 16$. О т в е т: искомым множеством является сфера $(x-4)^2 + y^2 + z^2 = 16$.

8. 1. $(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 = 22$.

2. $x^2 + (y - \frac{4}{3})^2 + z^2 = \frac{16}{9}$.

Указание: задача решается аналогично задаче 7 (2).

§ 11

1. 1. 400π . 2. 6π .

2. 1. 676π . 2. 4π .

3. 1. 676π . 2. $4\pi\sqrt{2}$.

4. 1. 676π . 2. 36π , 36π .

5. 1. $8\sqrt{2}$.

2. Пусть искомое расстояние равно x . Тогда радиус большей окружности кольца равен $\sqrt{R^2 - x^2}$, а радиус меньшей окружности — $(R - x)$.

Последнее следует из того, что осевое сечение — равнобедренный прямоугольный треугольник. $S_{\text{кольца}} = \pi(R^2 - x^2 - (R - x)^2) = 2\pi(-x^2 + Rx)$. Легко догадаться, что наибольшее значение этой функции достигается при $x = \frac{R}{2}$. Ответ: $\frac{R}{2}$.

6. 1. 4 и 5.

2. Пусть искомое расстояние равно x . Тогда радиус основания цилиндра равен $\sqrt{R^2 - x^2}$. Площадь боковой поверхности цилиндра $S = 2\pi x \sqrt{R^2 - x^2} = 2\pi \sqrt{R^2 x^2 - x^4}$. Рассмотрим функцию $p(x) = R^2 x^2 - x^4$, где $0 < x < R$. Эта функция, а значит и площадь боковой поверхности цилиндра, достигает наибольшего значения при $x = \frac{R}{\sqrt{2}}$. Ответ: $\frac{R}{\sqrt{2}}$.

7. 1. Концы хорд MA , MB и MC лежат на поверхности шара и являются вершинами правильного треугольника ABC . Образовалась правильная пирамида $MABC$. Пусть MO_1 — высота этой пирамиды. Тогда центр шара O лежит в точке пересечения серединного перпендикуляра KO к ребру MA (K — середина AM). Легко доказать, что $\triangle KOM \sim \triangle MO_1A$. Отсюда $R_{\text{ш}} = MO = \frac{AM^2}{2MO_1}$. Пусть длина хорды равна a . Тогда $AC = 2a \sin \frac{\alpha}{2}$ и

$$AO_1 = \frac{2a \sin \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}. \quad MO_1 = \frac{a}{\sqrt{3}} \sqrt{3 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}; \quad R = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2a \sqrt{3 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}.$$

$$\text{Отсюда } a = \frac{2R \sqrt{3 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{3}} = \frac{2R \sqrt{1 + 2 \cos \alpha}}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{2R \sqrt{1 + 2 \cos \alpha}}{\sqrt{3}}.$$

2. $\pi(a^2 + b^2 + c^2)$. Указание: диаметром сфер служит диагональ параллелепипеда, построенного на этих хордах.

8. 1. Центры этих шаров являются вершинами правильного тетраэдра, длина ребра которого равна $2R$. Центр искомой сферы совпадает с центром названного тетраэдра. Ее радиус равен разности радиуса сферы, которой принадлежат вершины тетраэдра, и радиуса шара. Радиус сферы можно найти, например, способом, который показан в задаче 7 (1). Ее радиус равен $\frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. Тогда радиус искомой сферы равен $\frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - R = R\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{R}{2}(\sqrt{6}-2)$. Ответ: $\frac{R}{2}(\sqrt{6}-2)$.

2. Суммы длин скрещивающихся ребер тетраэдра равны между собой. Указание: необходимо воспользоваться тем, что отрезки касательных, проведенных из одной точки к сфере, равны между собой.

§ 12

1. 1. 2. 2. $\frac{6}{\pi}$.

2. 1. $\frac{2}{3}$. 2. 16π .

3. 1. $1\frac{1}{6}$. Указание: центр описанного шара лежит ниже плоскости основания. Для нахождения радиуса описанного шара можно, например, воспользоваться тем, что $R_{\text{ш}} = \frac{L^2}{2H}$, где L — длина бокового ребра пирамиды, а H — ее высота.

2. $\arctg\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)$.

4. 1. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 2. 676π .

5. 1. На рис. 132 изображена пирамида $MABCD$. $ABCD$ — квадрат, $MC \perp ABC$. Центр описанного шара лежит на середине O ребра AM (в точке пересечения перпендикуляра к плоскости основания, проведенного через центр O_1 квадрата, и серединного перпендикуляра OK к ребру MC). Пусть сторона квадрата равна a . Тогда $AC = a\sqrt{2}$. С другой стороны, $AC = 2R \cos 30^\circ = R\sqrt{3}$; $a\sqrt{2} = R\sqrt{3}$.

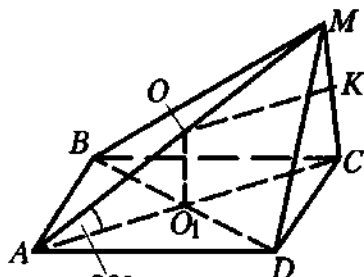


Рис. 132

$$\text{Отсюда: } a = \frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{2}}. \quad MC = a\sqrt{2} \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}; \quad MD = \sqrt{a^2 + \frac{2a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{5}}{\sqrt{3}}.$$

$$S_{\text{бок.}} = MC \cdot CD + MD \cdot AD = \frac{a^2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{a^2\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \frac{a^2}{\sqrt{3}}(\sqrt{5} + \sqrt{2}) = \frac{3R^2}{2\sqrt{3}}(\sqrt{5} + \sqrt{2}) = \frac{R^2\sqrt{3}}{2}(\sqrt{5} + \sqrt{2}).$$

$$\text{Ответ: } \frac{R^2\sqrt{3}}{2}(\sqrt{5} + \sqrt{2}).$$

2. $\frac{(a+b)^2\sqrt{3}}{4}$. Указание: апофема рассматриваемой пирамиды равна сумме апофем ее оснований.

6. 1. Пусть $MABC$ — правильная треугольная пирамида. $MO_1 \perp ABC$. Опустим из точки O_1 перпендикуляр O_1K на ребро AC и соединим точки M и K . $\angle MKO_1$ — линейный угол двугранного угла, который образуется боковой гранью с плоскостью основания. Центр шара лежит в точке O пересечения биссектрисы KO этого линейного угла с высотой пирамиды MO_1 . Исходя из условия $\frac{OO_1}{OM} = \frac{1}{3}$. Исходя из свойств биссектрисы угла

треугольника следует, что и $\frac{KO_1}{OM} = \frac{1}{3}$. Это значит, что $\cos \angle MKO_1 = \frac{1}{3}$;

$$O_1K = \frac{a}{2\sqrt{3}}. \text{ Тогда } MK = \frac{3a}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \text{ боковое ребро } AM = \sqrt{\frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = a.$$

Ответ: a .

2. $4R^2\sqrt{2}$.

7. 1. Легко доказать, что данная пирамида является правильной. Линия пересечения состоит из четырех равных дуг окружностей, которые получаются при пересечении сферы с гранями пирамиды (рис. 23). Для нахождения радиуса этих окружностей необходимо определить расстояние от центра шара до граней пирамиды. На рисунке $PK \perp DMC$ и $OO_1 \perp DMC$.

$$OO_1 = \frac{1}{2}PK. \quad PK = \frac{MP \cdot PE}{ME}; \quad ME = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \quad PE = \frac{a}{2}; \quad MP = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2};$$

$$PK = \frac{a\sqrt{2} \cdot \frac{a}{2}}{2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}; \quad OO_1 = \frac{a\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}. \text{ Радиус окружности } MO_1 = \sqrt{MO^2 - OO_1^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{2a^2}{16} - \frac{2a^2}{16 \cdot 3}} = \frac{a}{2\sqrt{3}}. \text{ Градусная мера каждой из дуг линии пересечения рав-$$

на 120° . Тогда $l = \frac{\pi \cdot a \cdot 120}{2\sqrt{3} \cdot 180} = \frac{\pi a}{3\sqrt{3}}$. В таком случае длина линии пересече-

$$\text{ния равна } \frac{4\pi a}{3\sqrt{3}} = \frac{4\pi a\sqrt{3}}{9}. \text{ Ответ: } \frac{4\pi a\sqrt{3}}{9}.$$

2. На рис. 134 изображено диагональное сечение BB_1D_1D куба $ABCD A_1B_1C_1D_1$ вместе с большими кругами вписанных шаров.

$\triangle O_1LD \sim \triangle OKD$. Пусть радиус малого шара равен x . Тогда $\frac{x}{R} = \frac{OK}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}$; $R = \frac{a}{2}$.

Отсюда $OK = x\sqrt{2}$; из треугольника OKD имеем $OD = \sqrt{2x^2 + x^2} = x\sqrt{3}$;

диагональ куба $B_1D = a\sqrt{3}$. $O_1D = x + R + x\sqrt{3}$; $\frac{a\sqrt{3}}{2} = x + \frac{a}{2} + x\sqrt{3}$. В та-

ком случае $x = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{a}{2}(2-\sqrt{3})$.

Ответ: $\frac{a}{2}(2-\sqrt{3})$.

8. 1. $\frac{9a}{2} \arctg \frac{\sqrt{3}}{2}$. Указание: задача решается аналогично задаче 7 (1).

Плоский угол при вершине пирамиды равен $2\arctg \frac{\sqrt{3}}{2}$ радиан.

2. На рис. 135, а изображен вид сверху правильной пирамиды $DABC$ с изображениями вписанных в нее шаров. На рис. 135, б изображен треугольник DOM , где DO — высота пирамиды, DM — ее апофема. Окружность с центром в точке P — изображение сечения шара плоскостью DAM .

Пусть радиус шара равен x . Тогда $O_1M = x \operatorname{ctg} 30^\circ = x\sqrt{3}$. $OM = \frac{a}{2\sqrt{3}}$. Тре-

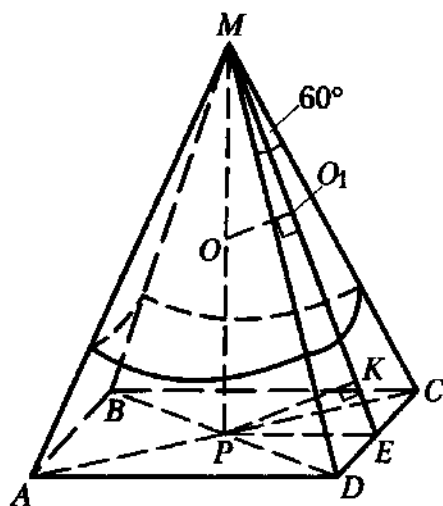


Рис. 133

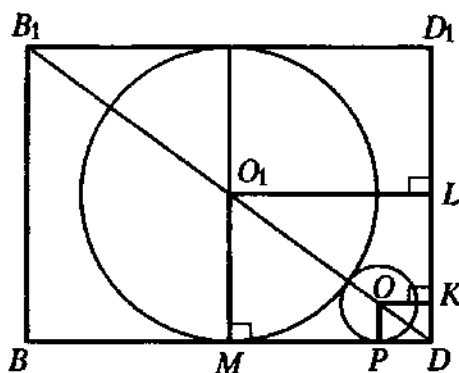


Рис. 134

угольник $O_1O_2O_3$ — правильный со стороной, равной $2x$, $OO_1 = \frac{2x}{\sqrt{3}}$; $OM = O_1M + OO_1$; $\frac{a}{2\sqrt{3}} = x\sqrt{3} + \frac{2x}{\sqrt{3}}$. Отсюда $x = \frac{a}{10}$. Ответ: $\frac{a}{10}$.

§ 13

1. 1. 24. 2. $144\sqrt{3}$.

2. 1. 32. 2. $54\sqrt{3}$.

3. 1. $\frac{d^3\sqrt{2}}{8}$. 2. $24\sqrt{3}$.

4. 1. $a^3\sqrt{2}$. 2. 40.

5. 1. Пусть диагонали основания пересекаются в точке O . В плоскости DBB_1 проводим через точку O прямую, параллельную DB_1 , до пересечения с ребром BB_1 в точке E . Эту точку соединим с вершинами A и C . Сечение AEC — искомое. Из точки B опускаем перпендикуляр BK на AC и точку K соединяем с E . $\angle EKB = 45^\circ$, $BE = BK = \frac{24}{5}$, $BB_1 = 2BE = \frac{48}{5}$, $V = 6 \cdot 8 \cdot \frac{48}{5} = 460,8$. Ответ: 460,8.

2. $a^3 \cdot \frac{\sqrt{2\cos 2\alpha}}{4\sin \alpha}$. Указание: из вершины C необходимо опустить перпендикуляр CK на AB . Легко доказать, что $CK \perp AA_1B_1$. В таком случае $\angle CB_1K = \alpha$. Дальнейшее решение очевидно.

6. 1. $\frac{216\sqrt{5}}{5}$. 2. $\frac{h^3 \operatorname{ctg}^2 \alpha \operatorname{tg} \beta}{2\cos^2 \beta}$.

Указание: задачи решаются аналогично задачам 5 (1, 2).

7. 1. На рис. 136 показано сечение параллелепипеда указанной плоскостью. $BK \perp EF$. $\angle B_1KB = 45^\circ$. Так как R и T — середины сторон AD и CD ,

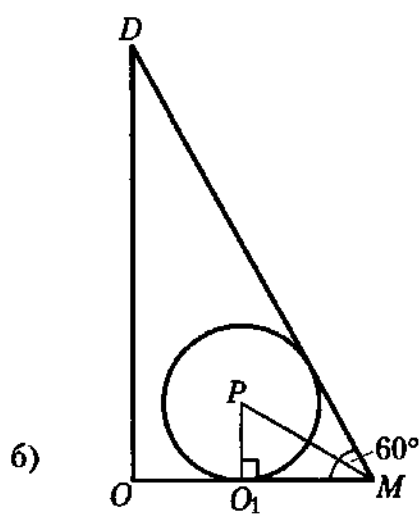
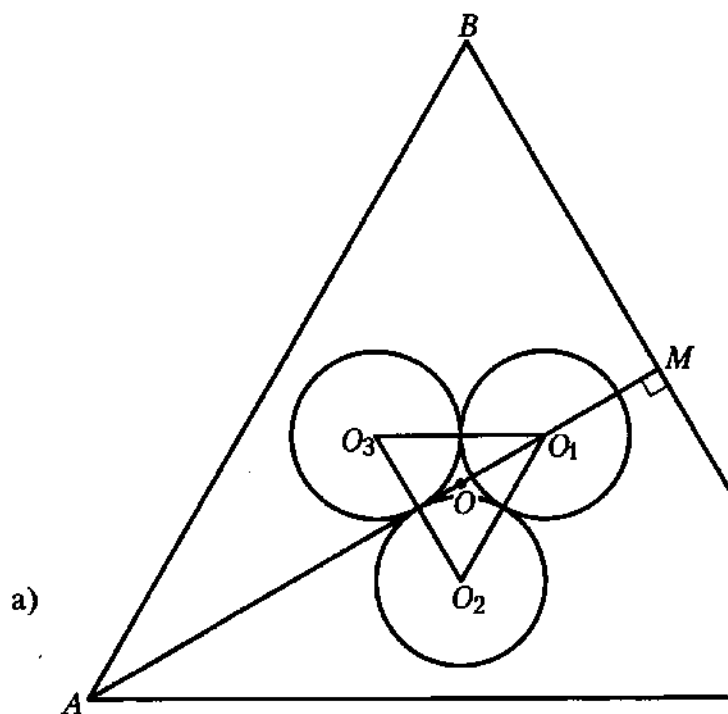


Рис. 135

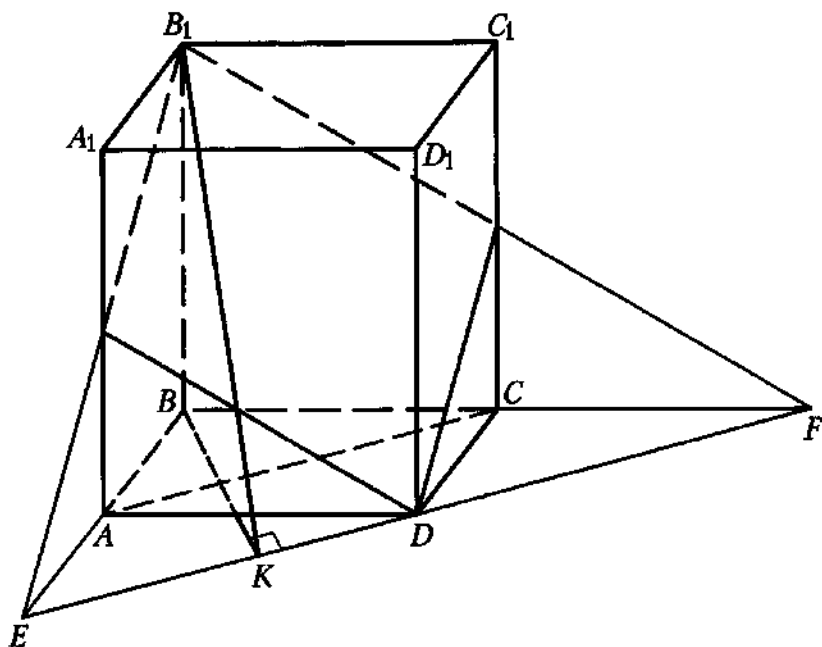


Рис. 138

8. 1. Сечение показано на рис. 138. Линия пересечения EF с плоскостью основания параллельна диагонали основания AC . $BK \perp EF$, $\angle BKB_1 = 60^\circ$. $EB = 10$; $BF = 24$. В таком случае $EF = 26$. $BK = \frac{BE \cdot BF}{EF} = \frac{120}{13}$; $BB_1 = 120 \cdot \frac{\sqrt{3}}{13}$. $V = 5 \cdot 12 \cdot \frac{120\sqrt{3}}{13} = \frac{7200\sqrt{3}}{13}$. Ответ: $\frac{7200\sqrt{3}}{13}$.

2. Поместим призму в прямоугольную систему координат с началом в вершине C . Пусть CA принадлежит оси OX , CB — оси OY и CC_1 — оси OZ . Тогда $A(3; 0; 0)$; $B(0; 6; 0)$; $P(0; 3; z)$ ($z > 0$). Точка пересечения медиан $M(1; 2; 0)$; $\overrightarrow{MP} = \{-1; 1; z\}$. Если φ — угол между MP и плоскостью XOZ (грань AA_1C_1C принадлежит этой плоскости), то $\sin \varphi = \frac{|\overrightarrow{MP} \cdot \vec{j}|}{|\overrightarrow{MP}| \cdot |\vec{j}|}$, где $\vec{j} = \{0; 1; 0\}$. $\overrightarrow{MP} \cdot \vec{j} = 1$. $|\overrightarrow{MP}| = \sqrt{1+1+z^2} = \sqrt{2+z^2}$. $\frac{1}{\sqrt{2+z^2} \cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $\sqrt{3} = \sqrt{2+z^2}$; $z^2 = 1$; $z = 1$ ($z > 0$). Тогда $CC_1 = 2$. $V = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 \cdot 2 = 18$.
 Ответ: 18.

§ 14

1. $1. 768\sqrt{3}$. 2. $3\pi R^2$.

2. 1. 125. 2. 3468π .

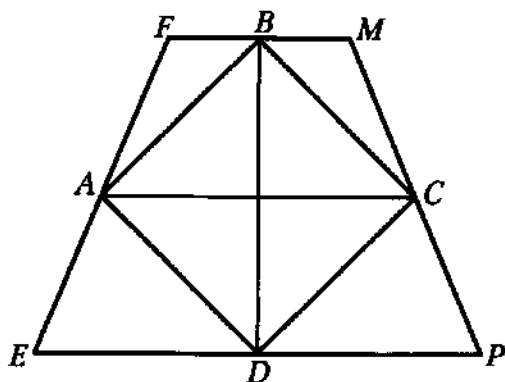


Рис. 139

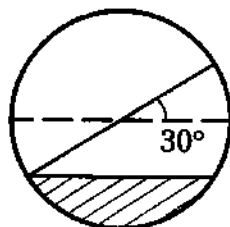


Рис. 140

3. 1. $\frac{576\sqrt{3}}{5}$. 2. $\frac{1600\pi}{729}$.

4. 1. 36. 2. $\frac{1024\pi}{27}$.

5. 1. $\frac{441\sqrt{143}}{2}$. Указание: необходимо доказать, что треугольник B_1FE прямоугольный с прямым углом B_1FE .

2. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{4-3\sqrt{3}}{8+3\sqrt{3}}$.

Указание: объем меньшей отсеченной части равен $\frac{1}{3}$ от разности объемов цилиндра и правильной треугольной призмы, вписанной в этот цилиндр.

6. 1. $\frac{9\sqrt{2}}{2}$. 2. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2\pi-3\sqrt{3}}{10\pi+3\sqrt{3}}$.

7. 1. На рис. 139 показан вид сверху на куб и описанную около него призму. Пусть x — длина ребра куба. AC — средняя линия трапеции. $AC = x\sqrt{2}$. Высота трапеции $BD = x\sqrt{2}$. $S_{\text{трап}} = x\sqrt{2} \cdot x\sqrt{2} = 2x^2$. Высота призмы равна x . $V_{\text{пр}} = 2x^2 \cdot x = 2x^3$. Очевидно, что $2x\sqrt{2} = a + b$, $x = \frac{a+b}{2\sqrt{2}}$; $V = 2 \cdot \frac{(a+b)^3}{16\sqrt{2}} = \frac{(a+b)^3\sqrt{2}}{16}$. Ответ: $\frac{(a+b)^3\sqrt{2}}{16}$.

2. На рис. 140 заштрихована та часть жидкости, которая останется после поворота корыта на 30° . Пусть радиус основания цилиндра — R , а его высота — H . Тогда объем оставшейся части жидкости равен $\frac{R^2H(4\pi-3\sqrt{3})}{12}$. Этот результат был получен при решении задачи 5 (1). Объем вылившейся жидкости $\Delta V = \frac{\pi R^2H}{2} - \frac{R^2H(4\pi-3\sqrt{3})}{12} = \frac{R^2H}{12}(2\pi + 3\sqrt{3})$.

$\frac{\Delta V}{V} = \frac{R^2H(2\pi+3\sqrt{3})}{12 \cdot \frac{1}{2}R^2H \cdot \pi} = \frac{2\pi+3\sqrt{3}}{6} = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \approx 0,61$. Ответ: $\approx 61\%$.

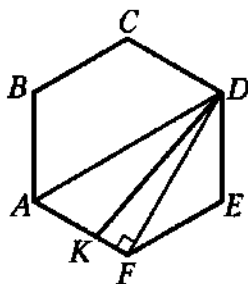


Рис. 141

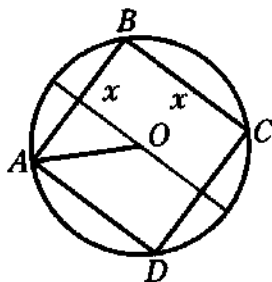


Рис. 142

8. 1. Очевидно, что плоскость сечения пересечет грань, которая проходит через сторону основания AF (рис. 141). Пусть $KF = x$ и сторона основания — a . Необходимо учесть, что объемы призм с одинаковой высотой относятся между собой, как площади их оснований. Плоскость сечения делит призму на две призмы. Объем призмы с основанием $KDEF$ составляет $\frac{1}{4}$ от объема всей призмы. $S_{KDEF} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}x \cdot a \cdot \sqrt{3}$. $S_{ABCDEF} = 3a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$. Тогда $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}xa\sqrt{3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$. Отсюда находим, что $x = \frac{a}{4}$ и $KD = \sqrt{\frac{a^2}{16} + 3a^2} = \frac{7a}{4}$. $S_{сеч} = KD \cdot h$, где h — высота призмы. $S_{сеч} = \frac{7ah}{4}$. По условию $ah = Q$. В таком случае $S_{сеч} = \frac{7}{4}Q$. Ответ: $\frac{7}{4}Q$.

2. На рис. 142 показан вид сверху на два данных цилиндра. Пусть диаметр основания и высота вписанного цилиндра равна x и пусть радиус основания большего цилиндра — R . Очевидно, что высота этого цилиндра равна x . Тогда его объем $V_1 = \pi R^2 x$. $V_2 = \pi \cdot \frac{x^2}{4} \cdot x = \frac{\pi \cdot x^3}{4}$. Но $x = R\sqrt{2}$. Тогда $V_1 = \pi R^3\sqrt{2}$ и $V_2 = \frac{\pi R^3\sqrt{2}}{2}$. В таком случае $\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{2}$. Ответ: $\frac{1}{2}$.

§ 15

1. 1. $\frac{375}{8}$. 2. 600.

2. 1. $120\sqrt{3}$. 2. 600.

3. 1. $\frac{a^2b\sqrt{2}}{4}$. 2. $120\sqrt{2}$.

4. 1. $\frac{abc\sqrt{2}}{2}$. 2. $250\sqrt{3}$.

5. 1. Пусть в наклонной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ основанием служит правильный треугольник ABC , и пусть $\angle A_1AC = \angle A_1AB = 45^\circ$. Тогда легко доказать, что грань CC_1B_1B — квадрат. Обозначим длину каждого ребра за x . Тогда $S_{AA_1C_1C} = S_{AA_1B_1B} = \frac{x^2\sqrt{2}}{2}$, а $S_{CC_1B_1B} = x^2$. По условию

$x^2 + \frac{2x^2\sqrt{2}}{2} = 4(1 + \sqrt{2})$. Отсюда $x=2$. Зная длину ребер призмы, легко найти ее высоту, которая равна $\frac{2}{\sqrt{3}}$. $S_{\text{осн}} = \sqrt{3}$. В таком случае $V_{\text{пр}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} = 2$. Ответ: 2.

2. Расстояние от бокового ребра до диагонали противоположной грани равно расстоянию от бокового ребра до этой грани. Построим перпендикулярное сечение призмы. Пусть d — расстояние от бокового ребра до противоположающей боковой грани, m — сторона перпендикулярного сечения, противоположащая этому боковому ребру и l — боковое ребро призмы. $V = S_{\text{перп. сеч}} \cdot l = \frac{1}{2} dml = \frac{1}{2} dQ$, где Q — площадь боковой грани. Тогда $V = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 40 = 100$. Ответ: 100.

6. 1. Пусть в наклонной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ основанием служит прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$) и пусть плоскость грани AA_1C_1C перпендикулярна плоскости основания. В таком случае можно доказать, что CC_1B_1B — квадрат и высота призмы A_1O проектируется на сторону основания AC . Примем равные ребра призмы за x . Тогда $A_1O = \frac{x\sqrt{3}}{2}$. Опустим из точки O перпендикуляр OK на AB и соединим точки K и A_1 . В таком случае $A_1K \perp AB$; $AO = \frac{x}{2}$. $OK = \frac{x}{2\sqrt{2}}$; $A_1K = \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{8}} = \frac{x\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$. $S_{AA_1B_1B} = \frac{x\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$. $x\sqrt{2} = \frac{x^2\sqrt{7}}{2}$; $S_{AA_1C_1C} = \frac{x^2\sqrt{3}}{2}$; $S_{CC_1B_1B} = x^2$. По условию $\frac{x^2\sqrt{7}}{2} + \frac{x^2\sqrt{3}}{2} + x^2 = 2(\sqrt{7} + \sqrt{3} + 2)$. Отсюда $x = 2$. $V = \frac{x^2}{2} \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{x^3\sqrt{3}}{4}$. Так как $x = 2$, то $V = 2\sqrt{3}$. Ответ: $2\sqrt{3}$.

2. $30\sqrt{2}$. Указание: задача решается аналогично задаче 5 (2).

7. 1. На рис. 143 MPK перпендикулярна сечению призмы. $V_{\text{пр}} = S_{MPK} \cdot AA_1$. Для нахождения площади перпендикулярного сечения необходимо найти угол PMK , т. е. угол между скрещивающимися прямыми EB и FC , где $EB \perp AA_1$ и $FC \perp AA_1$. $EB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $FC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $EA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $FA = \frac{a}{2}$. Если φ — искомый угол, то $\cos \varphi = \frac{|\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{FC}|}{|\overrightarrow{EB}| |\overrightarrow{FC}|}$; $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{FC} = (\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a}{2} + a \cdot \frac{a}{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) + a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2\sqrt{2}}{4} = \frac{a^2}{4} (2 - \sqrt{2})$. Отметим, что $\overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{AB} = 135^\circ$ и $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{AC} = 120^\circ$; $\cos \varphi = \frac{a^2(2-\sqrt{2})}{4 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}}$.

$$\sin \varphi = \sqrt{1 - \frac{3-2\sqrt{2}}{3}} = \frac{\sqrt{2\sqrt{2}}}{3}.$$

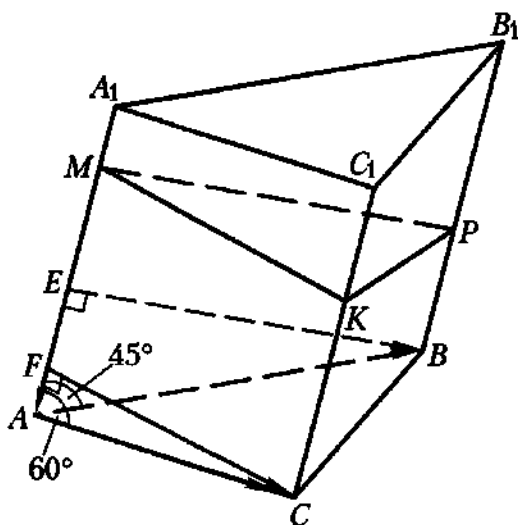


Рис. 143

$$S_{MPK} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{a^2\sqrt{6}}{8} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2} = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{2}; \quad V = \frac{a^2b\sqrt{2}}{4}.$$

Ответ: $\frac{a^2b\sqrt{2}}{4}$.

2. По условию BB_1D_1D — прямоугольник. Из этого следует, что $BD \perp DD_1$, а так как $AA_1 \parallel DD_1$, то $BD \perp AA_1$, а $BD \perp AC$ по условию. Отсюда плоскость ABC перпендикулярна плоскости диагонального сечения AA_1C_1C . Поэтому высота A_1O призмы лежит в плоскости этого сечения.

$$A_1O = \frac{S_{AA_1CC_1}}{AC} = \frac{30}{5} = 6; \quad S_{осн} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 = 10; \quad V = S_{осн} \cdot A_1O = 60. \quad \text{Ответ: } 60.$$

8. 1. Пусть A_1O — высота призмы. Опустим из точки O перпендикуляры OE и OF соответственно на AC и AB . Тогда $A_1E \perp AC$ и $A_1F \perp AB$. По условию $A_1E = 7$ и $A_1F = 20$. Продолжим FO до пересечения с AC в точке K . Получим прямоугольный треугольник AFK , где $\angle FKA = 30^\circ$. Из $\triangle AA_1E$ имеем, что $AE = 24$, а из $\triangle AA_1F$ получим, что $AF = 15$. Тогда из прямоугольного треугольника AFK получим, что $AK = 30$ и $EK = 6$. Из $\triangle OEK$ имеем $OE = EK \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$. Теперь можно найти $A_1O \cdot A_1O = \sqrt{A_1E^2 - OE^2} = \sqrt{49 - 12} = \sqrt{37}$; $S_{осн} = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 50 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 500\sqrt{3}$. $V = 500\sqrt{3} \cdot \sqrt{37} = 500\sqrt{111}$. Ответ: $500\sqrt{111}$.

2. Диагональное сечение BB_1D_1D разбивает параллелепипед на две равные призмы. Исходя из условия, можно доказать, что BB_1D_1D — квадрат. Пусть диагонали квадрата пересекаются в точке O . Опустим из точки O перпендикуляр OK на AA_1 и точку K соединим с точками B и D . Легко дока-

зять, что BKD — перпендикулярное сечение призмы $ABDA_1B_1D_1$, $BD = a\sqrt{2}$.
 $OK = \frac{a\sqrt{2}}{2} \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{a\sqrt{6}}{6}$; $S_{BKD} = \frac{1}{2} a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{6} = \frac{a^2\sqrt{3}}{6}$; $V_{\text{пр}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{6} \cdot a = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.
 Тогда $V_{\text{параллелепипеда}} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $a^3\sqrt{3}$.

§ 16

1. 1. $\frac{2h^3\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha}{27}$. 2. $\frac{a^3\sin^2\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}{3}$.

2. 1. $\frac{d^3\sqrt{2}\cdot\operatorname{tg}\alpha}{24}$. 2. $\frac{a^3}{6}\cdot\sin\alpha\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\beta$.

3. 1. $\frac{4}{3}h^3\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$. 2. $\frac{5}{3}$.

4. 1. $\frac{h^3\sqrt{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos\alpha+1}$. 2. $72\sqrt{3}$.

5. 1. $\frac{d^3(1+\sin 2\alpha)}{3\sin^2\beta\cdot\cos\beta\cdot\sin 2\alpha}$.

2. Пусть $DABC$ — правильная треугольная пирамида и DO — ее высота. Построим высоту BE основания и из точки E опустим перпендикуляр EF на ребро DB . Точку F соединим с точками A и C . $\angle AFC = \alpha$ — линейный угол двугранного угла, образованного двумя смежными боковыми гранями. Из подобия треугольников DOB и EFB следует, что $\frac{DO}{EF} = \frac{OB}{FB}$. Отсюда $DO = \frac{EF \cdot OB}{FB}$; $EF = \frac{a}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$; $OB = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Из треугольника EFB следует, что $FB = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4} \cdot \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}$. Тогда $DO = \frac{a \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}}$.

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{a^3 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{12\sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}}.$$

Ответ: $\frac{a^3 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{12\sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{a^3 \cos \frac{\alpha}{2}}{12\sqrt{4\sin^2 \frac{\alpha}{2} - 1}}$.

6. 1. $\frac{2d^3}{3\sin^2\beta\cdot\cos\beta\cdot\sin\alpha}$. 2. $\frac{a^3\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{6\sqrt{-\cos\alpha}}$.

Указание: задача решается аналогично задаче 5 (2).

7. 1. Если боковые грани имеют равные площади, то высоты этих граней равны и вершина M равноудалена от прямых, на которых лежат стороны оснований. Так как в основании лежит правильный треугольник, то возможны три различных варианта, которые показаны на рис. 144.

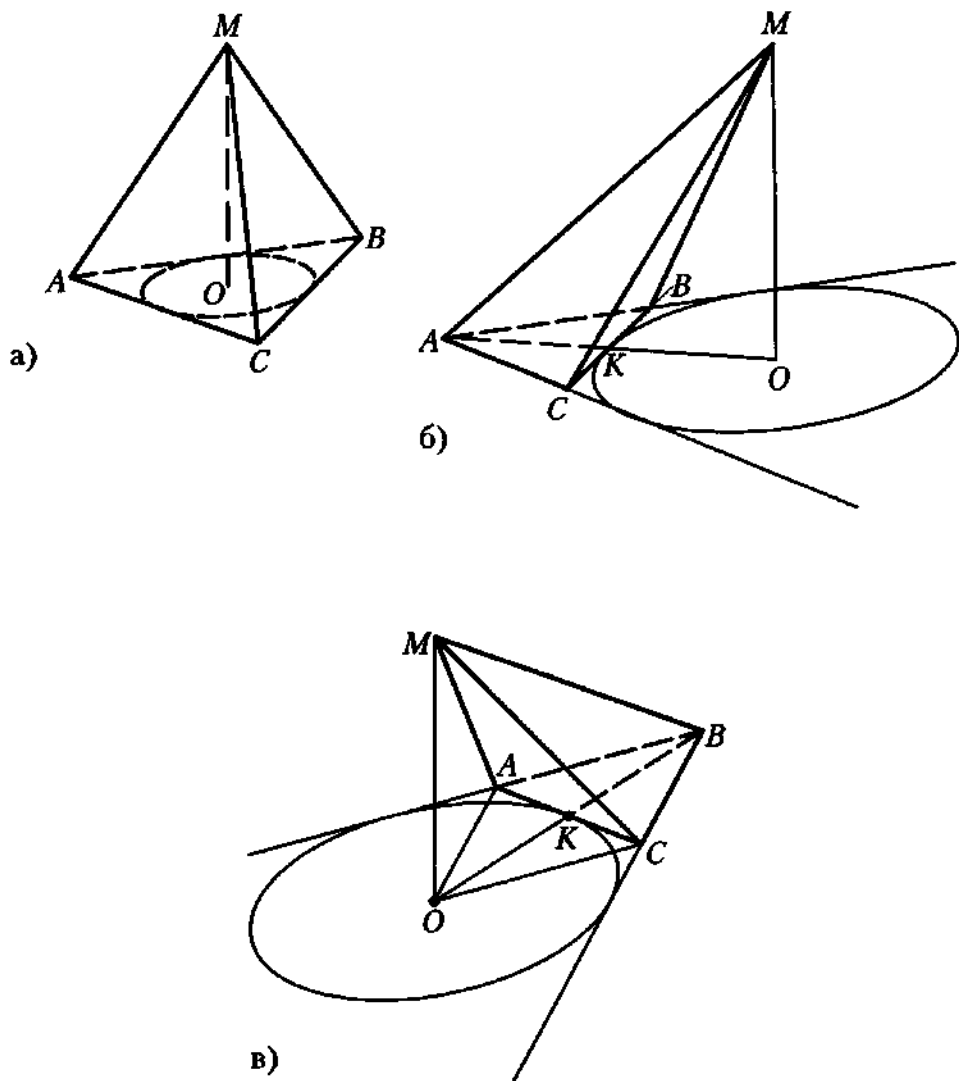


Рис. 144

Рис. 144, а: O — центр вписанной окружности. $AO = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$; $MO = \sqrt{2 - \frac{2}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$. $S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3}$.

Рис. 144, б: O — центр внеписанной окружности. Радиус этой окружности может быть вычислен по формуле $r = \frac{2S}{a+b-c}$, где S — площадь треугольника, а a, b и c — его стороны. В нашем случае $r = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{2} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

$AO = AK + KO = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} = \sqrt{6} > AM$. Следовательно, этот вариант не реализуется.

Рис. 144, в: O — центр вневписанной окружности. $AK = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $r = \frac{\sqrt{6}}{2}$.
 $AO = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}} = \sqrt{2} = AM$. Следовательно, и этот вариант не реализуется.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

2. Покажем, что точки M , P и C лежат на одной прямой (рис. 145).

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MP} &= \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AF} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \\ &= \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{12}\overrightarrow{AB}\end{aligned}\quad (1)$$

$$\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}. \quad (2)$$

Исходя из (1) и (2) имеем, что $PC = 3MP$. Это и значит, что указанные три точки лежат на одной прямой. Аналогично и точки M , K и D лежат на одной прямой. В таком случае речь идет о плоскости MDC , которая делит пирамиду на две части, объемы которых относятся, как 1 : 2. Ответ: 1 : 2.

8. 1. $\frac{\sqrt{105}}{4}$; 9. $\frac{3\sqrt{11}}{4}$.

Указание: задача решается аналогично задаче 7 (1), но в этом случае реализуются все три различные возможности.

2. Рассмотрим пирамиду, изображенную на рис. 146. В пирамиде $MA_1B_1C_1$ площадь основания $S_1 = \frac{1}{2}MC_1 \cdot MB_1 \cdot \sin \alpha$. Высота пирамиды $h_1 = MA_1 \cdot \sin \varphi$. $V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot MC_1 \cdot MB_1 \sin \alpha \cdot \sin \varphi = \frac{1}{6} MC_1 \cdot MA_1 \sin \alpha \cdot \sin \varphi$. Аналогично для пирамиды $MABC$ $V = \frac{1}{6} \cdot MC \cdot MB \cdot MA \sin \alpha \cdot \sin \varphi$. Тогда $\frac{V_1}{V} = \frac{MA_1 \cdot MB_1 \cdot MC_1}{MA \cdot MB \cdot MC}$. В нашем

случае $\frac{V_1}{V} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{1}{20}$.

Ответ: 1 : 19.

§ 17

1. 1. $\frac{256\pi\sqrt{3}}{9}$. 2. $\frac{\pi}{4}$.

2. 1. 36π . 2. $\frac{\pi}{2}$.

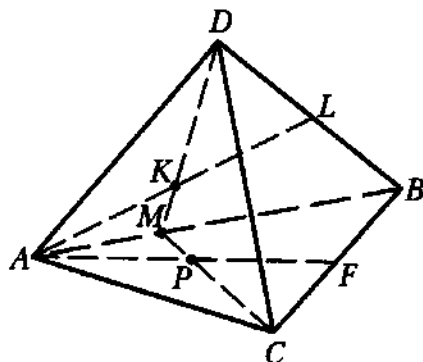


Рис. 145

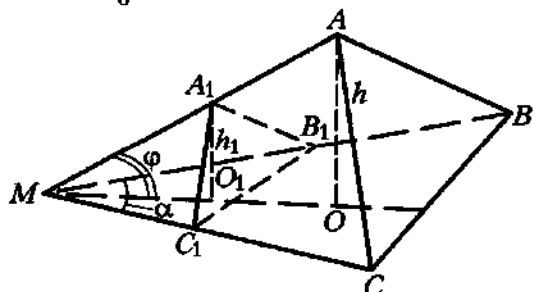


Рис. 146

3. 1. $\frac{2}{3}\pi\sqrt{2}$. 2. 100π .

4. 1. $\frac{16\pi\sqrt{2}}{3}$. 2. $\frac{18\pi\sqrt{14}}{5}$.

5. 1. $\frac{\pi \cdot a^3 \cdot \sin^2 2\beta \cdot \cos \beta \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{12 \sin^2 \left(\beta + \frac{\alpha}{2} \right)}$.

2. 60° . Указание: необходимо доказать, что большее основание трапеции является диаметром основания конуса.

6. 1. $\frac{144\pi}{5}$.

2. 45° . Указание: необходимо учесть, что суммы противоположных сторон трапеции должны быть равны. Если меньшую из боковых сторон принять за x , то $\sqrt{x^2 + 4} + x = 6$. Отсюда $x = \frac{8}{3}$ и радиус основания конуса равен $\frac{4}{3}$. Остальное решение очевидно.

7. 1. По условию сечение наибольшей площади не совпадает с осевым сечением. Значит угол между образующими в этом сечении прямой. Пусть сечением является треугольник ABM , где M — вершина конуса. Опустим из центра основания O перпендикуляр OK на AB и точки K и M соединим. $\angle MKO = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$. Треугольник AMB — равнобедренный и прямоугольный. $MK = \frac{l\sqrt{2}}{2}$. $MO = MK \cdot \sin(\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{l\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{l}{\sqrt{3}}$. Радиус основания конуса $R = BO = \sqrt{l^2 - \frac{1}{3}l^2} = \frac{l\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$; $OK = \frac{l\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$; $\cos \angle KOB = \frac{OK}{OB} = \frac{1}{2}$. Следовательно, $\angle AOB = 120^\circ$ и AB — сторона правильного треугольника. В таком случае треугольник AMB есть грань правильной треугольной пирамиды, вписанной в этот конус, причем боковые ребра этой пирамиды взаимно перпендикулярны. Объем пирамиды равен $\frac{l^3}{6}$. Объем конуса равен $\frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3} \cdot \frac{2l^2\pi}{3} \cdot \frac{l}{\sqrt{3}} = \frac{2l^3\sqrt{3}\pi}{27}$. Объем отсеченной части $V = \frac{1}{3} \left(\frac{2l^3\sqrt{3}\pi}{27} - \frac{l^3}{6} \right) = \frac{l^3}{162} (4\pi\sqrt{3} - 9)$. Ответ: $\frac{l^3}{162} (4\pi\sqrt{3} - 9)$.

2. На рис. 147 FM , FO и MO соответственно образующая, высота и радиус основания конуса. Зная длины сторон треугольника CMB , можно найти радиус описанной около него окружности: $MO = \frac{25}{4}$. Из треугольника AME , где $AM = 10$, $ME = 8$ и $AE = 6\sqrt{3}$, находим косинус угла AME : $108 = 100 + 64 - 280 \cos \angle AME$, $\cos \angle AME = \frac{7}{20}$. Тогда $\operatorname{tg} \angle AME = \frac{3\sqrt{39}}{7}$; $FO = MO \cdot \operatorname{tg} \angle AME = \frac{25}{4} \cdot \frac{3\sqrt{39}}{7} = \frac{75\sqrt{39}}{28}$; $V = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{625}{16} \cdot \frac{75\sqrt{39}}{28} = \frac{15625\pi\sqrt{39}}{448}$.

Ответ: $\frac{15625\pi\sqrt{39}}{448}$.

8. 1. $\frac{H^3}{18}(8\pi + 3\sqrt{3})$. 2. $\frac{15625\pi\sqrt{15}}{1344}$.

Указание: задачи решаются аналогично задачам 7 (1, 2).

§ 18

1. 1. 456. 2. $\frac{26\pi\sqrt{3}}{3}$.

2. 1. $168\sqrt{3}$. 2. $\frac{560\pi}{3}$.

3. 1. $\frac{(a^2-b^2)\cdot\sqrt{2}}{12}$. 2. 576π .

4. 1. $\frac{7\pi^3\sqrt{2}}{6}$. 2. 8064π .

5. 1. Достроим усеченную пирамиду до полной пирамиды, частью которой является данная усеченная. Можно найти, что объем такой пирамиды равен $108\sqrt{3}$. Плоскость верхнего основания усеченной пирамиды делит объем полной пирамиды в отношении 1 : 27 (стороны основания относятся как 1 : 3). В таком случае объем усеченной пирамиды $V = \frac{26}{27} \cdot 108\sqrt{3} = 104\sqrt{3}$. Ответ: $104\sqrt{3}$.

2. $54\sqrt{3}$.

6. 1. 268,8. Указание: задача решается аналогично задаче 5 (1). Объем полной пирамиды равен $\frac{1536}{5}$, а объем усеченной пирамиды $V = \frac{7}{8} \cdot \frac{1536}{6} = 268,8$.

2. $\frac{32000\pi\sqrt{3}}{3}$.

7. 1. На рис. 148 плоскости EA_1P и FB_1L перпендикулярны к плоскости основания. Многогранник AA_1DBB_1C разбился этими плоскостями на прямую призму EA_1PFB_1L и две равные пирамиды A_1AEPD и B_1BCLF . Пусть высота усеченной пирамиды равна h . Тогда объем призмы $V' = \frac{1}{2}ahb$, а объем пирамиды $V'' = \frac{1}{3}a \cdot \frac{a-b}{2} \cdot h = \frac{1}{6}a(a-b)h$.

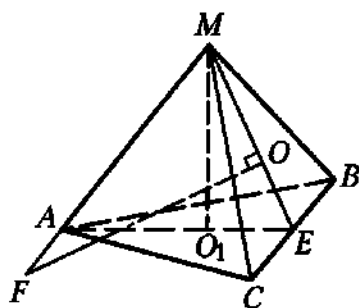


Рис. 147

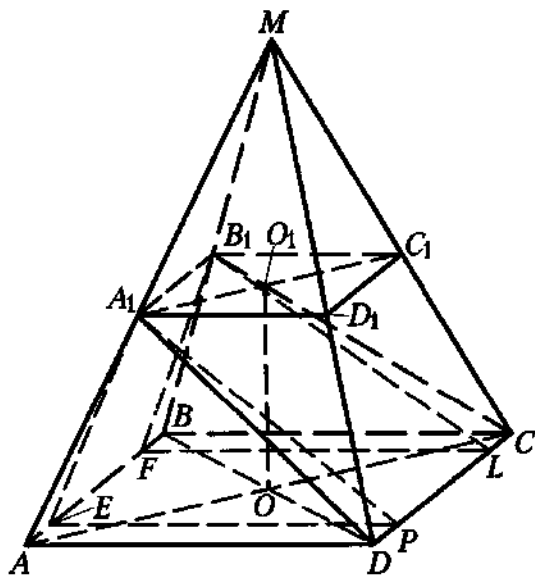


Рис. 148

Объем многогранника AA_1DBB_1C : $V_1 = V' + 2V'' = \frac{abh}{2} + \frac{a(a-b)h}{3} = \frac{ha}{6}(b+2a)$.

Объем усеченной пирамиды $V = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2)$. Объем второго многогранника, который дополняет рассмотренный многогранник до усеченной пирамиды $V_2 = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2) - \frac{h}{6}a(b+2a) = \frac{h}{6}b(a+2b)$. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{a(b+2a)}{b(a+2b)}$.

Ответ: $\frac{a(b+2a)}{b(a+2b)}$.

2. $\frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{6}$. Указание: объем тела вращения может быть получен, если из объема усеченного конуса, полученного вращением трапеции $OBCO_1$ вокруг оси l , вычесть объемы конусов, полученных вращением треугольников OBA и O_1CA вокруг той же оси (рис. 149).

8. 1. $\frac{11}{45}$. Указание: задача решается аналогично задаче 7 (1).

2. $\frac{2\pi a^3}{9}$. Указание: объем тела вращения может быть получен, если из объема цилиндра, полученного вращением прямоугольника $AEFC$ вокруг оси l , вычесть объемы двух усеченных конусов, полученных вращением трапеций $AEOB$ и $CFOB$ вокруг той же оси (рис. 150). Следует отметить, что $\angle AOC = 60^\circ$.

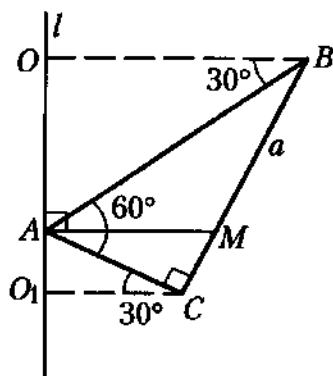


Рис. 149

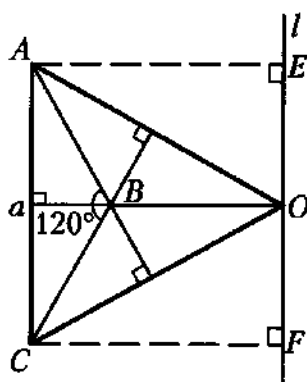


Рис. 150

§ 19

1. 1. $\frac{128\pi}{3}$; 2. $\frac{4}{9}$.

2. 1. 12π ; 2. $\frac{32}{9}$.

3. 1. $\frac{52\pi}{3}$. 2. 36π .

4. 1. $\frac{50\pi}{3}$. 2. $\frac{62500\pi}{81}$.

5. 1. На рис. 151 изображено осевое сечение рассматриваемой фигуры. $S_{OKO_2} = 126$, $KO = 12$; $OO_1 = 5$; $OO_2 = 16$. Высота первого сегмента $h_1 = 13 - 5 = 8$. Тогда его объем $V_1 = \pi \cdot 64 \left(13 - \frac{8}{3}\right) = \frac{1984\pi}{3}$. Высота второго сегмента $h_2 = 20 - 16 = 4$. Тогда его объем $V_2 = \pi \cdot 16 \left(20 - \frac{4}{3}\right) = \frac{896\pi}{3}$. Отсюда объем двояковыпуклого стекла $V = \frac{1984}{3}\pi + \frac{896}{3}\pi = 960\pi$. Ответ: 960π .

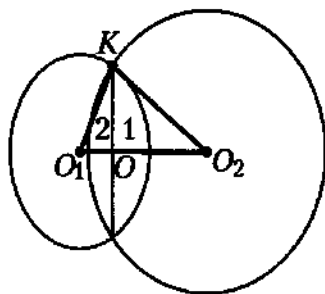


Рис. 151

2. Пусть R — радиус вписанного шара, φ — величина угла между образующей конуса и плоскостью основания. Радиус основания конуса $r = R \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}$.

Высота конуса $H = R \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \cdot \operatorname{tg} \varphi$. $V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3} \pi R^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2} \cdot R \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \cdot \operatorname{tg} \varphi =$

$= \frac{\pi R^3 \cdot \operatorname{tg} \varphi}{3 \operatorname{tg}^3 \frac{\varphi}{2}} = \frac{2\pi R^3}{3 \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} \cdot (1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2})}$; $V_{\text{шара}} = \frac{4}{3} \pi R^3$. Исходя из условия, имеем

$\frac{2\pi R^3}{3 \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} (1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2})} = \frac{9}{4}$. Пусть $\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} = a > 0$. Тогда получаем уравнение

$9a^2 - 9a + 2 = 0$, корни которого $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_2 = \frac{2}{3}$, $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\varphi = 60^\circ$ или

$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ и $\varphi = 2 \arctg \frac{\sqrt{6}}{3}$. Ответ: 60° или $2 \arctg \frac{\sqrt{6}}{3}$.

6. 1. $\frac{1444\pi}{3}$. Указание: необходимо учесть, что центры шаров лежат по одну сторону от плоскости окружности, по которой пересекаются их поверхности.

2. $\pi - 4 \arctg \frac{1}{2}$ или $\pi - 4 \arctg \frac{\sqrt{3}}{2}$. Указание: задача решается аналогично задаче 5 (2).

7. 1. Данная пирамида изображена на рис. 152. В любой тетраэдр можно вписать шар. Радиус этого шара R может быть вычислен по формуле $R = \frac{3V}{S}$, где V — объем тетраэдра, а S — площадь его поверхности. Из точки K опустим перпендикуляр на сторону BC и продолжим стороны AC и AB . Тогда по теореме о трех перпендикулярах можно доказать, что $MD \perp AB$, $ML \perp AB$ и $MP \perp AC$. $KD = 2 - \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6} = 2 - \frac{\sqrt{3}}{6}$; $KA = 2 - \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}$; $KP = \frac{1}{2} KA = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$.

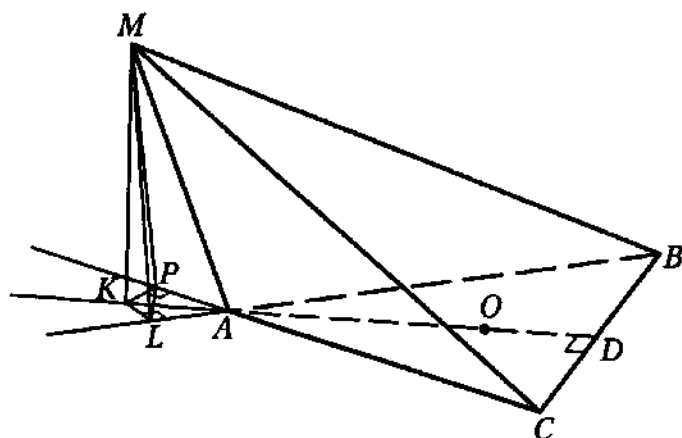


Рис. 152

Из треугольника MKD: $MD = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}} + \left(4 - \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{3}{36}\right)} = \frac{7\sqrt{3}}{6}$. $S_{BMC} = \frac{7\sqrt{3}}{12}$.

Из треугольника MKL: $ML = MP = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}} + \left(1 - \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{3}{9}\right)} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

$$S_{MAC} = S_{MAB} = \frac{\sqrt{3}}{3}; \quad S = \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{7\sqrt{3}}{12} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}; \quad V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4\sqrt{4}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \frac{4\sqrt{4}}{3};$$

$$R = \frac{\sqrt{3} \cdot \frac{4\sqrt{4}}{3} \cdot 2}{4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 3\sqrt{3}} = 2^{-1/2} \cdot 3^{-5/4}. \quad S_{шара} = 4\pi \cdot 2^{-1} \cdot 3^{-5/2} = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}. \quad \text{Ответ: } \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}.$$

2. Объем полого шара $V = \frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)$. Так как толщина стенок 3 см, то $r = 6$ см. Тогда $V = \frac{4}{3}\pi(729 - 216) = 684\pi$ см³. Вес шара P равен $684\pi \rho$ (г), где ρ — плотность материала. Погруженная в воду часть шара есть шаровой сегмент, объем которого $V_c = \pi \cdot 144\left(9 - \frac{12}{3}\right) = 720\pi$ см³. Выталкивающая сила $F = 720\pi \cdot 1 = 720\pi$ (1 г/см³ — плотность воды). По закону Архимеда $P = F$, т. е. $684\pi \cdot \rho = 720\pi$. Отсюда $\rho \approx 1,05$ г/см³.

8. 1. $\frac{4\pi}{27}$. Указание: задача решается аналогично задаче 7 (1). Необходимо учесть $KE = KP = KF$ (рис. 153). Тогда высоты боковых граней пирамиды равны между собой и $S_{бок} = \frac{1}{2} \cdot P_{ABC} \cdot MP$.

2. Вес полого шара $P = \frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3) \cdot d$, а выталкивающая сила $F = \frac{2}{3}\pi R^3 \cdot 1$. Так как $P = F$, то $\frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)d = \frac{2}{3}\pi R^3$; $2(R^3 - r^3)d = R^3$; $2\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^3\right)d = 1$. $\left(\frac{r}{R}\right)^3 = 1 - \frac{1}{2d}$; $\frac{r}{R} = \sqrt[3]{1 - \frac{1}{2d}}$ и $r = R\sqrt[3]{1 - \frac{1}{2d}}$. Тогда толщина стенок шара $h = R - r = R\left(1 - \sqrt[3]{1 - \frac{1}{2d}}\right)$. Ответ: $R\left(1 - \sqrt[3]{1 - \frac{1}{2d}}\right)$.

т. е. $x = k + 1$, $y = k + 1$ и $z = 1 - k$. Точка P является серединой отрезка AA_1 и $P \left(\frac{k+2}{2}; \frac{k+2}{2}; \frac{2-k}{2} \right)$. Так как точка P принадлежит плоскости α , то $\frac{k+2}{2} + \frac{k+2}{2} - \frac{2-k}{2} - 2 = 0$. Отсюда $k = \frac{2}{3}$ и $x = \frac{5}{3}$; $y = \frac{5}{3}$; $z = \frac{1}{3}$.

Ответ: $A_1 \left(\frac{5}{3}; \frac{5}{3}; \frac{1}{3} \right)$.

2. Указанная прямая пересекает ось OX в точке $A(-1; 0; 0)$ и ось OY в точке $B(0; 1; 0)$. Точки A, B и M определяют плоскость $ax + by + cz + d = 0$. Так как указанные точки принадлежат плоскости, то $-a + d = 0$ и $b + d = 0$ и $a + b - 2c + d = 0$.

Отсюда следует, что $a = d$ и $b = -d$ и $c = \frac{d}{2}$.

В таком случае уравнение плоскости имеет вид: $2x - 2y + z + 2 = 0$.

Ответ: $2x - 2y + z + 2 = 0$.

6. 1. Пусть $P(x; y; z)$. Так как точка P лежит на прямой EF , то $\overrightarrow{EP} = k \cdot \overrightarrow{EF}$; $\overrightarrow{EF} \{1; 1; 2\}$, $\overrightarrow{EP} \{x - 1; y + 2; z - 1\}$.

Отсюда $x - 1 = k$, $y + 2 = k$ и $z - 1 = 2k$; $x = k + 1$, $y = k - 2$ и $z = 2k + 1$.

С другой стороны, точка P лежит на плоскости, а потому $k + 1 - 2(k - 2) + 2k + 1 - 3 = 0$ и $k = -3$. В таком случае $x = -2$, $y = -5$ и $z = -5$.

Ответ: $P(-2; -5; -5)$.

2. Пусть искомая плоскость имеет вид: $ax + by + cz + d = 0$. Так как плоскость $x - 2y + z - 1 = 0$ и искомая перпендикулярны, то векторы, перпендикулярные этим плоскостям, $\vec{n}_1 \{a; b; c\}$ и $\vec{n}_2 \{1; -2; -1\}$ тоже перпендикулярны между собой. Тогда $a - 2b + c = 0$. Кроме того, координаты данных точек E и F удовлетворяют уравнению плоскости, т. е. $a - 2b + c = 0$ и $2a + b - c + d = 0$. Решив полученную систему уравнений, получаем уравнение искомой плоскости $2x + 3y + 4z - 3 = 0$. Ответ: $2x + 3y + 4z - 3 = 0$.

7. 1. Пусть MO — высота пирамиды. Поместим пирамиду в прямоугольную систему координат. O — начало координат, ось OX сонаправлена с лучом BA , ось OY — с лучом AD , а ось OZ — с лучом OM . Напишем уравнение плоскости DMC $D(1; 1; 0)$; $C(-1; 1; 0)$; $M(0; 0; 1)$. Координаты этих точек удовлетворяют уравнению $ax + by + cz + d = 0$. Имеем систему уравнений $a + b + d = 0$, $-a + b + d = 0$ и $c + d = 0$. Отсюда можно получить, что уравнение плоскости имеет вид: $y + z - 1 = 0$. Вектор, перпендикулярный этой плоскости, $\vec{n} \{0; 1; 1\}$. Если φ — искомый угол, то $\sin \varphi = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{AM}| \cdot |\vec{n}|}$;

$\overrightarrow{AM} \{-1; 1; 1\}$. $\sin \varphi = \frac{|1+1|}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$; $\varphi = \arcsin \frac{\sqrt{6}}{3}$. Ответ: $\arcsin \frac{\sqrt{6}}{3}$.

2. Так как искомая плоскость должна быть параллельна направлению вектора $\vec{n}$, то в плоскости должна быть прямая, параллельная этому направлению. Для этого найдем третью точку C искомой плоскости как

образ точки $A(1; -1; 1)$ при параллельном переносе на вектор $\vec{m}\{3; 1; -1\}$: $C(4; 0; 0)$. Теперь мы имеем три точки A , B и C , определяющие искомую плоскость. Теперь достаточно просто написать уравнение этой плоскости.
 Ответ: $x - 5y - 2z - 4 = 0$.

8. 1. 60° . Указание: необходимо поместить пирамиду в прямоугольную систему координат и найти уравнение плоскостей AMD и DMC . Тогда, если $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ — векторы, перпендикулярные этим плоскостям и φ — искомый угол, то $\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$.

2. Найдем две точки A и B , принадлежащие линии пересечения плоскостей. 1) Пусть $x = 0$. Тогда $-y + z - 1 = 0$ и $y - 2 - 2 = 0$.

Отсюда $y = -4$; $z = -3$ и $A(0; -4; -3)$.

$$2) \text{ Пусть } z = 0. \text{ Тогда } \begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$$

Отсюда $x = 1$ и $y = 1$ и $B(1; 1; 0)$. Плоскость, проходящая через точку M , должна быть перпендикулярна вектору $\overline{AB}\{1; 5; 3\}$. Тогда уравнение плоскости имеет вид $1(x - 1) + 5(y - 1) + 3(z - 1) = 0$, т. е. $x + 5y + 3z - 9 = 0$.
 Ответ: $x + 5y + 3z - 9 = 0$.

11-й КЛАСС. ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К РАБОТАМ НА ПОВТОРЕНИЕ

№ 1

1. 1) Скрещивающиеся, 2) скрещивающиеся, 3) скрещивающиеся.

2. Прямоугольник; $\frac{2a^2}{9}$.

3. 1) 60° . 2) $\arctg \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

4. $\arcsin \frac{3\sqrt{7}}{7}$. Возможен ответ: $90^\circ - \arctg \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

5. Для нахождения угла между AB и DC проведем прямую $l \parallel AB$ (рис. 44). Угол между DC и l является искомым. Из точки B опустим перпендикуляр BE на l и точку E соединим с точкой D . Легко доказать, что $DE \perp CE$. $DE = \sqrt{a^2 + \frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$; $BE = \frac{a\sqrt{7}}{2}$; $CE = \frac{a}{2}$. Тогда $\tg \angle DCE = \frac{DE}{CE} = \sqrt{7}$ и $\angle DCE = \arctg \sqrt{7}$. Ответ: $\arctg \sqrt{7}$.

6. Плоскость $CDE \parallel AB$. Расстояние между прямыми AB и DC равно расстоянию от прямой AB до плоскости CDE . Можно доказать, что оно равно высоте BK треугольника DBE (рис. 154); $BK = \frac{BE \cdot DB}{DE} = \frac{a\sqrt{3} \cdot a \cdot 2}{2a \cdot \sqrt{7}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Ответ: $\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

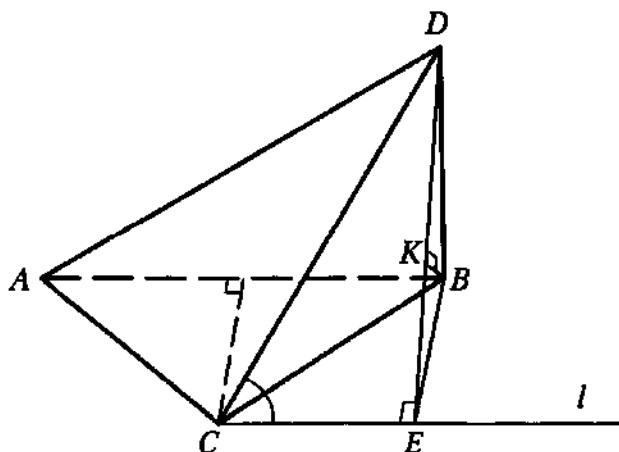


Рис. 154

2. 1) 1) Скрещивающиеся, 2) скрещивающиеся, 3) пересекающиеся.

2. Прямоугольная трапеция; $\frac{3a^2\sqrt{5}}{8}$.

3. 1) $\arctg 2$. 2) 90° .

4. 30° .

5. 60° .

6. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Указание: задачи 5 и 6 решаются аналогично задачам 1 (5, 6).

3. 1) 1) скрещивающиеся, 2) скрещивающиеся, 3) параллельные.

2. Равнобедренная трапеция; $\frac{3a^2\sqrt{3}}{16}$.

3. 1) $\arctg \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\arctg \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

4. 45° .

5. Все необходимые построения показаны на рис. 155. $OK = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$;

$$MO = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \quad MK = \sqrt{\frac{3a^2}{4} + \frac{18a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{30}}{4}; \quad KD = \frac{a\sqrt{2}}{4}; \quad \operatorname{tg} \angle MDK = \frac{MK}{KD} = \frac{a\sqrt{30} \cdot 4}{4 \cdot a\sqrt{2}} = \sqrt{15}; \quad \angle MDK = \arctg \sqrt{15}. \quad \text{Ответ: } \arctg \sqrt{15}.$$

6. Расстояние между BC и MD равно высоте BN треугольника AMB . Необходимо учесть, что $BC \parallel AMD$, а BN есть расстояние между BC и плоскостью AMD , т. е. расстояние между указанными скрещивающимися прямыми. Ответ: $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

4. 1. 1) Скрещивающиеся, 2) скрещивающиеся, 3) скрещивающиеся.

2. Равнобедренный треугольник; $\frac{a^2\sqrt{15}}{16}$.

3. 1) $\arctg 2$. 2) $2 \arctg \frac{\sqrt{6}}{3}$.

4. $\arctg \frac{\sqrt{39}}{13}$.

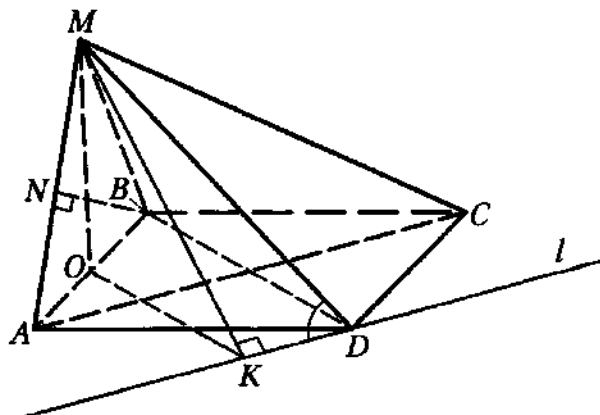


Рис. 155

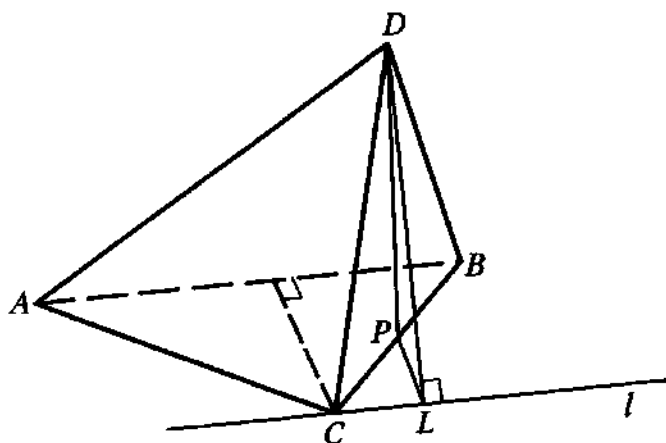


Рис. 156

5. 1) 90° . 2) $\arcsin \frac{15}{4}$. Указание: смотри построения, данные на рис. 156.
6. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$.

№ 2

1. 1) $\frac{V_1}{V_2} = \frac{11}{1}$.

2) $8(13 + \sqrt{34})$. Указание: целесообразно построить перпендикулярное сечение призмы и находить площадь боковой поверхности как произведение периметра перпендикулярного сечения на боковое ребро.

3) $\arcsin \frac{3\sqrt{2}}{10}$.

2. 1) $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{5}$.

2) $8(\sqrt{3} + \sqrt{7})$.

3) $2 \arctg \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

3. 1) $24(\sqrt{6} + \sqrt{15})$. Указание: площадь боковой поверхности целесообразно находить суммированием площадей боковых граней, учитывая, что грань CC_1B_1B является прямоугольником.

2) $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{5}$.

3) $\frac{12\sqrt{5}}{5}$. Указание: искомым расстоянием является длина высоты треугольника, полученного при построении сечения, указанном в предыдущем пункте.

4. 1) $\frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{17}$. Указание: плоскость сечения пересекает плоскость основания по биссектрисе AF ($O \in AF$), которая делит сторону основания в отношении 5 : 6. В таком случае $S_{AFB} = \frac{5}{11} S_{ABC}$.

2) 128.

3) $\arcsin \frac{32\sqrt{41}}{205}$.

№ 3

1. 1) $32\pi\sqrt{3}$. 2) $180^\circ \sqrt{3} \approx 311^\circ 46'$. 3) $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{27}$. 4) 256π .

2. 1) 64π . 2) $2 \arctg \frac{1}{\pi} \approx 35^\circ 19'$. 3) Да, можно; $\frac{V_{\text{шара}}}{V_{\text{шля}} = \frac{2}{3}}$. 4) 128π .

3. 1) 100π . 2) $\frac{1625\sqrt{3}}{12}$. 3) 180° ; 15 и 5. 4) Пусть $ABCD$ — осевое сечение усеченного конуса. $AD = 15$; $BC = 5$; $AB = CD = 10$. Радиус описанного шара равен радиусу описанной около треугольника ABD окружности. $BD = \sqrt{100 + 225 - 2 \cdot 10 \cdot 15 \cdot \frac{1}{2}} = 5\sqrt{7}$; $5\sqrt{7} = 2R_{\text{ш}} \cdot \sin 60^\circ$. Отсюда $R_{\text{ш}} = \frac{5\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$ и $S = 4\pi \cdot \frac{25 \cdot 7}{3} = \frac{700\pi}{3}$. Ответ: $\frac{700\pi}{3}$.

4. 1) $36\pi\sqrt{2}$.

2) 36. Указание: наибольшую площадь имеет осевое сечение.

3) $\frac{V_{\text{ш}}}{V_{\text{н}}} = \frac{1}{6}$.

4) Пусть треугольник AMB — осевое сечение конуса. Тогда радиус вписанной окружности является радиусом вписанного в конус шара. Центр шара делит высоту конуса в отношении 1 : $\sqrt{2}$, считая от основания (используется свойство биссектрисы угла треугольника). Отсюда следует, что $R_{\text{ш}} = \frac{6}{\sqrt{2}+1} = 6(\sqrt{2}-1)$; $V_{\text{ш}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = 288\pi(\sqrt{2}-1)^3$. Ответ: $288(\sqrt{2}-1)^3$.

№ 4

1. 1. 1) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{6}$.

2. Очевидно, что $C_1(3; -2; 5)$, $B_1(-1; -5; 5)$ и $E(2; 0; 5)$. $\overrightarrow{AE} \{1; -2; 3\}$; $\overrightarrow{CB_1} \{-4; 1; 3\}$. По условию плоскость перпендикулярна CB_1 . В таком случае, если φ — искомый угол, то $\sin \varphi = \frac{|\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{CB_1}|}{|\overrightarrow{AE}| \cdot |\overrightarrow{CB_1}|}$, $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{CB_1} = -4 - 2 + 9 = 3$.

$|\overrightarrow{AE}| = \sqrt{14}$; $|\overrightarrow{CB_1}| = \sqrt{26}$. $\sin \varphi = \frac{3}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{26}} = \frac{3\sqrt{91}}{182}$; $\varphi = \arcsin \frac{3\sqrt{91}}{182}$.

Ответ: $\arcsin \frac{3\sqrt{91}}{182}$.

2. 1. 2) Пусть E — середина AC , а F — середина MB . $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CB})$; $EF^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AM}^2 + \overrightarrow{CB}^2 + 2 \cdot \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CB})$. В пункте 1) было

доказано, что $AM \perp CB$. Поэтому $\overline{EF}^2 = \frac{1}{4}(4a^2 + a^2 + 0) = \frac{5a^2}{4}$. Отсюда: $EF = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. Ответ: $\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

2. Основание пирамиды $ABCD$ лежит в плоскости $z = 2$. Тогда, исходя из условия, следует, что высота пирамиды $h = 3$. $\overline{AC} \{-2; 4; 0\}$; $\overline{BD} \{5; 0; 0\}$; $|\overline{AC}| = 2\sqrt{5}$; $|\overline{BD}| = 5$; $\overline{AC} \cdot \overline{BD} = -10$. Если φ — угол между диагоналями оснований, то $\cos \varphi = \frac{|\overline{AC} \cdot \overline{BD}|}{|\overline{AC}| \cdot |\overline{BD}|} = \frac{1}{\sqrt{5}}$. $S_{\text{осн}} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \cdot \sin \varphi$; $\sin \varphi = \sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$; $S = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot 5 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = 10$. $V_{\pi} = \frac{1}{3} \cdot 10 \cdot 3 = 10$. Ответ: 10.

3. 1. 1) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{8}$.

2. $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{3}$. Указание: необходимо куб поместить в прямоугольную систему координат и учесть, что диагональ AC_1 перпендикулярна плоскости A_1DB . Тогда, если φ — искомый угол, то $\sin \varphi = \frac{|\overline{AC_1} \cdot \overline{EF}|}{|\overline{AC_1}| \cdot |\overline{EF}|}$.

4. 1. 1) Разложим вектор $\overline{EM}$ по базисным векторам $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$.

$$\begin{aligned} \overline{EM} &= \overline{AM} - \overline{AE} = \frac{1}{3}(\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{AD}) - \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{3}\overline{AB} + \frac{1}{3}\overline{AC} - \frac{1}{6}\overline{AD} = \\ &= \frac{1}{3}(\overline{AB} + \overline{AC} - \frac{1}{2}\overline{AD}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{EM}^2 &= \frac{1}{9}(\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + \frac{1}{4}\overline{AD}^2 + 2\overline{AB} \cdot \overline{AC} - \overline{AB} \cdot \overline{AD} - \overline{AC} \cdot \overline{AD}) = \\ &= \frac{1}{9}(a^2 + a^2 + \frac{a^2}{4} + a^2 - \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2}) = \frac{a^2}{4} \cdot EM = \frac{a}{2}. \text{ Ответ: } \frac{a}{2}. \end{aligned}$$

2. $\arccos \frac{\sqrt{33}}{11}$. Указание: пусть MO — высота пирамиды. Тогда целесообразно точку O принять за начало координат. Ось OX направить по лучу, сонаправленному с лучом OA , ось OY направить по лучу, сонаправленному с лучами BC и AD , а ось OZ — по лучу OM .

11-й КЛАСС. ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К КОНТРОЛЬНЫМ ЗАДАНИЯМ

№ 1

1. 1. 60° .

2. 1) 90° . 2) $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

3. Пусть $A(0; y; 0)$ и пусть φ — искомый угол, $\sin \varphi = |\cos(\overrightarrow{AB} \wedge \vec{j})|$;
 $\overrightarrow{AB} \{1; -y; 1\}$; $\vec{j} \{0; 1; 0\}$; $\sin \varphi = \frac{|-y|}{\sqrt{2+y^2} \cdot 1} = \frac{1}{2}$; $\frac{y^2}{2+y^2} = \frac{1}{4}$. Отсюда $y = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$.
 Ответ: $(0; \frac{\sqrt{6}}{3}; 0)$ или $(0; -\frac{\sqrt{6}}{3}; 0)$.

4*. Пусть $\vec{a} \{6k; 8k; -7,5k\}$. $\sqrt{36k^2 + 64k^2 + \frac{255}{4}k^2} = \frac{25}{2}|k|$. По условию $\frac{25}{2}|k| = 5$, отсюда $|k| = 4$. Угол между вектором $\vec{a}$ и вектором $\vec{j} \{0; 1; 0\}$ тупой. Это значит, что $\vec{a} \cdot \vec{j} < 0$. Имеем $0 + 8k - 0 < 0$. Отсюда $k < 0$ и $k = -4$.
 Ответ: $\vec{a} \{-24; 32; 30\}$.

2. 1. 1) $180^\circ - \arccos \frac{1}{10}$.

2) $\sqrt{2}$.

2. Рассмотрим базисные векторы $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{CC_1}$. Пусть $AC = CB = BB_1 = a$. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB_1} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CC_1}$. $\cos \varphi = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB_1}|}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CB_1}|}$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB_1} = (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA})(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CC_1}) = a^2 - a^2(-\frac{1}{2}) + 0 - 0 = \frac{3a^2}{2}$. $|\overrightarrow{AB}| = a\sqrt{3}$; $|\overrightarrow{CB_1}| = a\sqrt{2}$.
 $\cos \varphi = \frac{3a^2}{2a\sqrt{3} \cdot a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$.

О т в е т: $\arccos \frac{\sqrt{6}}{4}$.

3. Пусть $A(x; x; 0)$ и пусть φ — искомый угол.

$\sin \varphi = |\cos(\overrightarrow{AB} \wedge \vec{i})|$; $\vec{i} \{1; 0; 0\}$; $\overrightarrow{AB} \{x-1; x-1; -1\}$.

$\sin \varphi = \frac{|x-1|}{\sqrt{2(x-1)^2+1}} = \frac{1}{2}$; $\frac{(x-1)^2}{2(x-1)^2+1} = \frac{1}{4}$; $4(x-1)^2 = 2(x-1)^2 + 1$;

$2(x-1)^2 = 1$; $x-1 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$; $x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ или $x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

О т в е т: $A(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}; 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}; 0)$ или $A(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}; 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}; 0)$.

4*: Пусть $\overrightarrow{OM} \{x; y; z\}$. Из условия следует, что $7x=0$ и $3z=0$. Следовательно, искомое множество есть пересечение плоскостей OYZ и OXY , т. е. ось OY . Ответ: ось OY .

3. 1. $2\sqrt{5}$.

2. 1) $\arccos \frac{\sqrt{15}}{5}$; 2) $\frac{\sqrt{5}}{4}$.

3. $A(0; 0; 2\sqrt{6})$ или $A(0; 0; -2\sqrt{6})$.

4*: $b\left\{\frac{8}{3}; -\frac{10}{3}; \frac{13}{3}\right\}$. Задача решается аналогично задаче 1 (4*).

4. 1. 1) $\arccos \frac{2\sqrt{22}}{11}$; 2) $\sqrt{5}$.

2. $\arccos \frac{\sqrt{2}}{4}$.

3. $M(\sqrt{2}+1; 0; \sqrt{2}+1)$ или $M(1-\sqrt{2}; 0; 1-\sqrt{2})$.

4*: Ось OX .

№ 2

1. 1. $4\pi(\sqrt{2}+4)$.

2. 1) $4\pi R^2 \sin^2 \varphi \cdot \cos \varphi$.

2) $\frac{R^2}{2}$. Указание: так как угол $\varphi = 30^\circ$, то наибольший угол между образующими тупой, а потому наибольшую площадь имеет сечение с взаимно перпендикулярными образующими. Площадь такого сечения равна $\frac{l^2}{2}$.

3*: Точки A , B и C имеют координаты $A(\sqrt{3}; 0; 0)$, $B(0; \sqrt{3}; 0)$, $C(0; 0; 3)$. Из точки O опустим перпендикуляр OK на AB и точку K соединим с точкой C . $\angle CKO = \varphi$ — искомый. $OK = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

$\operatorname{tg} \varphi = \frac{OC}{OK} = \frac{3 \cdot 2}{\sqrt{6}} = 6$. Ответ: $\varphi = \operatorname{arctg} \sqrt{6}$.

2. 1. $48\pi\sqrt{2}$.

2. 1) $18R^2\sqrt{3}$. 2) $\pi R\sqrt{3}$.

3*: Уравнение сферы имеет вид: $(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 32$. Центр сферы $O(1; 2; 0)$. Пусть T — точка касания. Тогда треугольник OTM — прямоугольный ($\angle OTM = 90^\circ$). $OM = \sqrt{64+1+16} = 9$. $MT = \sqrt{81-32} = 7$. Ответ: 7.

3. 1. $4\pi a^2 \sqrt{3}$.

2. 2) $\frac{4\pi a^2}{3\sin^2 2\alpha}$. 2) 30° .

3*: Находим координаты точек A и B . $A(0; -2; 0)$. Точка B , принадлежащая сфере, имеет координаты $(1; 1; z)$. Исходя из уравнения сферы, имеем: $0+1+z^2=5$; $z=\pm 2$. Так как $z>0$, то $B(1; 1; 2)$. $AB=$

$= \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14}$. Длина перпендикуляра, опущенного из точки B на плоскость XOZ , равна 2. Если φ — искомый угол, то $\sin \varphi = \frac{2}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{7}$; $\varphi = \arcsin \frac{\sqrt{14}}{7}$. Ответ: $\arcsin \frac{\sqrt{14}}{7}$.

4. 1. $\frac{3\pi\sqrt{5}}{2}$.

2. 1) $6a^2$. 2) $\frac{3\pi a^2}{16}$.

3*. Данная плоскость пересекает плоскость OXY по прямой, проходящей через точку $K(4; 2; 0)$ и пересекает ось OX в точке A , а ось OY — в точке B . Исходя из условия, треугольник AOB — равнобедренный прямоугольный, причем $OA = OB = 6$. Высота этого треугольника OP равна $3\sqrt{2}$. Это и есть расстояние от центра шара до данной плоскости. $d = 3\sqrt{2} < R$. Тогда радиус линии пересечения $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{25 - 18} = \sqrt{7}$. Отсюда длина искомой окружности равна $2\pi\sqrt{7}$. Ответ: $2\pi\sqrt{7}$.

№ 3

1. 1. 192.

2. $\frac{2\pi d^3 \operatorname{tg} \alpha}{\cos^2 \alpha \cdot \operatorname{tg} \varphi}$.

3*. На рис. 157 $\angle DEO = 60^\circ$ — линейный угол двугранного угла, образованного плоскостью боковой грани и плоскости основания. EO_1 — биссектриса этого угла, O_1 — центр вписанного шара. $O_1O = O_1K$ ($O_1K \perp DC$) — радиусы этого шара. MK — радиус окружности, по которой поверхность шара касается боковой поверхности пирамиды. $\angle MO_1K = \angle DEO = 60^\circ$. $MO_1 = \frac{1}{2}O_1K$ — расстояние от центра шара до плоскости сечения.

$R_{\text{ш}} = OE \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

$h_{\text{сегм}} = R_{\text{ш}} - MO_1 = \frac{4\sqrt{3}}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

$V_{\text{сегм}} = \pi \cdot \frac{4 \cdot 3}{9} \left(\frac{4\sqrt{3}}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{9} \right) = \frac{40\pi\sqrt{3}}{27}$.

Ответ: $\frac{40\pi\sqrt{3}}{27}$.

2. 1. 1024.

2. $\frac{\pi R^3 \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \varphi}{3}$.

3*. Диагональ призмы является диаметром описанного около нее шара и равна $8\sqrt{5}$. Так как плоскость, перпендикулярная к диагонали, делит ее в отношении 1 : 3, то высота меньшего сегмента, отсеченного

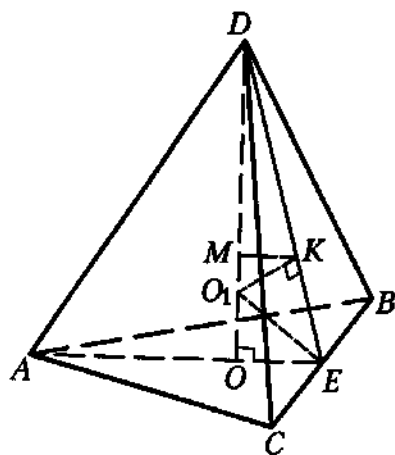


Рис. 157

этой плоскостью от шара, равна $2\sqrt{5}$. Радиус шара равен $4\sqrt{5}$.

$$V_{\text{сегм}} = \pi \cdot 20 \left(4\sqrt{5} - \frac{2\sqrt{5}}{3} \right) = \frac{200\pi\sqrt{5}}{3}. \text{ Ответ: } \frac{200\pi\sqrt{5}}{3}.$$

3. 1. $\frac{2048}{9}$.

2. $\frac{2\pi m^3 \sqrt{\cos \varphi}}{\cos^3 \frac{\varphi}{2}}$.

3*. $\frac{320\pi}{81}$. Указание: задача решается аналогично задаче 1 (3*).

4. 1. $\frac{16\sqrt{6}}{3}$.

2. $\frac{\pi h^3 \operatorname{ctg}^2 \varphi}{3 \cos^2 \frac{\varphi}{2}}$.

3*. Центр описанного шара лежит на середине высоты призмы, проведенной через центр описанной вокруг основания окружности. В таком случае $R_{\text{ш}} = \sqrt{\left(\frac{H}{2}\right)^2 + R^2}$, где H — высота призмы, а R — радиус описанной вокруг основания окружности. $H = 2\sqrt{2}$, а $R = \frac{4\sqrt{2}}{3}$; $R_{\text{ш}} = \sqrt{2 + \frac{32}{9}} = \frac{5\sqrt{2}}{3}$. Расстояние от центра шара до боковой грани равно радиусу вписанной в основание окружности, т.е. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. В таком случае высота сегмента $h = \frac{5\sqrt{2}}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}$. $V_{\text{сегм}} = 2\pi \left(\frac{5\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3} \right) = \frac{8\pi\sqrt{2}}{3}$.

Ответ: $\frac{8\pi\sqrt{2}}{3}$.

№ 4

1. 1. 48.

2. $12\sqrt{7}$.

3. $\arccos \frac{3}{4}$.

4. 36.

5. $\frac{625\pi}{7}$.

6*. На рис. 158 изображена правильная четырехугольная пирамида $DABC$. Плоскость EMF (ME и MF — апофемы пирамиды) перпендикулярна плоскости основания. $EK \perp MF$. Можно доказать, что $EK \perp DMC$. Через AB и EK проведена плоскость, которая пересекает плоскость DMC по прямой l , параллельной AB . В этой плоскости строим $BP \parallel EK$. Тогда $BP \perp DMC$ и $\angle BDP = \varphi$ — угол между BD и плоскостью DMC . Необходимо учесть, что $BP = EK$; $MF = 4$; $MO = \sqrt{7}$. $EK \cdot MF = MO \cdot EF$. Отсюда $EK = \frac{MO \cdot EF}{MF} = \frac{\sqrt{7} \cdot 6}{4} = \frac{3\sqrt{7}}{2}$. $\sin \varphi = \frac{BP}{BD} = \frac{3\sqrt{7}}{2 \cdot 6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{14}}{8}$; $\varphi = \arcsin \frac{\sqrt{14}}{8}$.

Ответ: $\arcsin \frac{\sqrt{14}}{8}$.

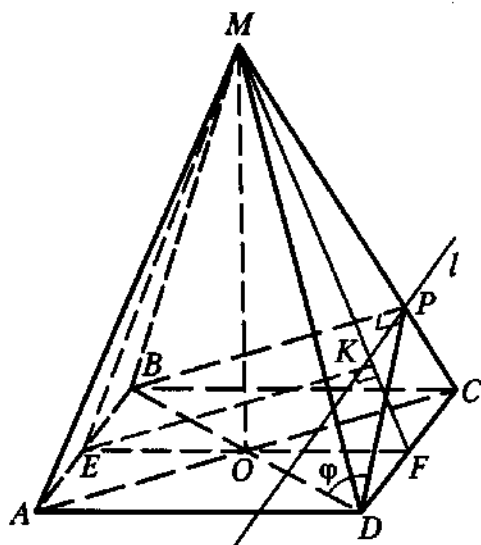


Рис. 158

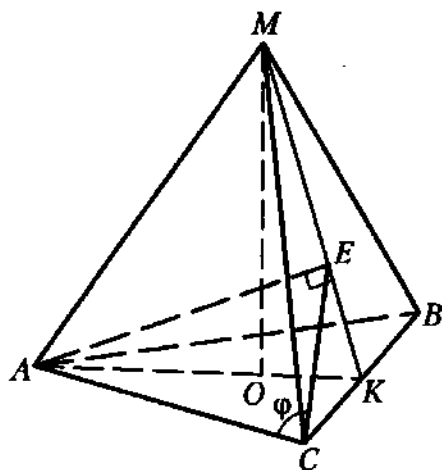


Рис. 159

2. 1. $6\sqrt{39}$.
2. $12\sqrt{3}$.
3. $\arccos \frac{4}{5}$.
4. -12 .
5. $\frac{32\pi}{81}(\sqrt{13} - 2)^3$.

6*. На рис. 159 изображена правильная треугольная пирамида $MABC$. MK — апофема пирамиды. В плоскости AMK проводим $AE \perp MK$. Можно доказать, что $AE \perp BMC$; $MK = \sqrt{13}$; $AO = 4$; $MO = 3$. $AK \cdot MO = AE \cdot MK$.
 $AE = \frac{AK \cdot MO}{MK} = \frac{6 \cdot 3}{\sqrt{13}} = \frac{18\sqrt{13}}{13}$. $\angle ACE = \varphi$ — угол между AC и плоскостью BMC . $\sin \varphi = \frac{AE}{AC} = \frac{18\sqrt{13}}{13 \cdot 4\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{39}}{26}$. $\varphi = \arcsin \frac{3\sqrt{39}}{26}$. Ответ: $\arcsin \frac{3\sqrt{39}}{26}$.

3. 1. $32\sqrt{7}$.
2. $\frac{128\sqrt{3}}{3}$.
3. $2\arctg \frac{\sqrt{6}}{6}$.
4. 48.
5. $\frac{2048\sqrt{3}}{27}$.

6*. На рис. 160 изображена правильная четырехугольная пирамида $MABCD$. $EK \perp DMC$. Плоскость, проходящая через AB и EK , пересекает плоскость DMC по прямой $l \parallel AB$. В этой плоскости строим $AP \parallel EK$. Тогда $AP \perp DMC$ и $\angle AMP = \varphi$ — угол между AM и плоскостью DMC . $OC = 4$; $MO = 4\sqrt{3}$; $AC = 8$; $EF = CD = 4\sqrt{2}$; $FC = 2\sqrt{2}$. $MF = \sqrt{64 - 8} = 2\sqrt{14}$;

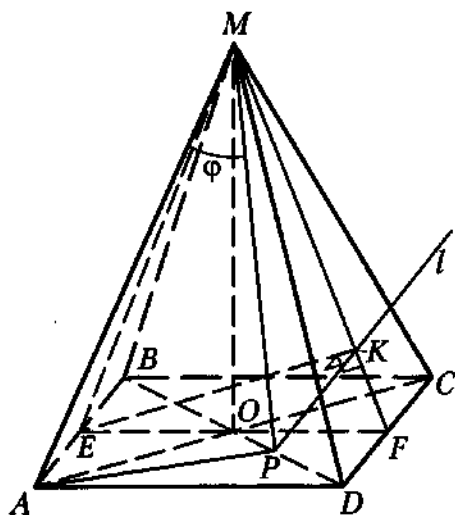


Рис. 160

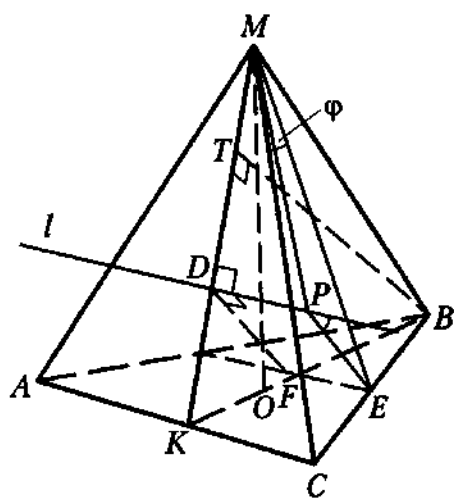


Рис. 161

$$EK \cdot MF = MO \cdot EF. \quad \text{Отсюда} \quad EK = \frac{MO \cdot EF}{MF} = \frac{4\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{2}}{2\sqrt{14}} = \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{7}}; \quad AP = EK;$$

$$\sin \varphi = \frac{AP}{AM} = \frac{\sqrt{21}}{7}; \quad \varphi = \arcsin \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

Ответ: $\arcsin \frac{\sqrt{21}}{7}$.

4. 1. $6\sqrt{3}$.

2. 3.

3. $\arctg \frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. -3.

5. $\frac{4}{3}\pi$.

6*. На рис. 161 изображена правильная треугольная пирамида $MABC$. $BT \perp AMC$. Через середину BC точку E строим прямую, параллельную AC . Она пересекает BK в точке F . В плоскости KMB строим $FD \parallel BT$. Тогда $FD \perp AMC$. Плоскость, проходящая через FE и FD , пересекает плоскость AMC по прямой $l \parallel EF$. В этой плоскости строим $EP \parallel FD$. Тогда $EP \perp AMC$, причем $EP = FD$. $\angle PME = \varphi$ — угол между ME и плоскостью AMC . $MO = \sqrt{3}$; $BK = 3$; $ME = MK = 2$; $BT \cdot KM = MO \cdot KB$; $BT = \frac{MO \cdot KB}{KM} = \frac{\sqrt{3} \cdot 3}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$; $PD = \frac{3\sqrt{3}}{4}$, а так как $EP = FD$, то $EP = \frac{3\sqrt{3}}{4}$. $\sin \varphi = \frac{PE}{ME} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$; $\varphi = \arcsin \frac{3\sqrt{3}}{8}$. Ответ: $\varphi = \arcsin \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

СОДЕРЖАНИЕ

Ответы

Класс 7

Задачи для урока	7 ...	446
Контрольные задания	77 ...	465
Математические диктанты	87	

Класс 8

Задачи для урока	101 ...	468
Контрольные задания	185 ...	495
Математические диктанты	199	

Класс 9

Задачи для урока	209 ...	498
Работы на повторение	259 ...	515
Контрольные задания	268 ...	517
Математические диктанты	280	

Класс 10

Задачи для урока	289 ...	520
Контрольные задания	355 ...	552
Математические диктанты	369	

Класс 11

Задачи для урока	379 ...	555
Работы на повторение	424 ...	595
Контрольные задания	432 ...	600
Математические диктанты	440	

СЕРИЯ «ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ»

Зив Борис Германович

**ЗАДАЧИ К УРОКАМ ГЕОМЕТРИИ
7-11 КЛАССЫ**

Редакторы:

Т. И. Клименко, завуч 196-й средней школы С.-Петербурга

А. С. Пивоварова, учитель математики 526-й школы С.-Петербурга

А. В. Сычев, учитель математики 196-й школы С.-Петербурга

Художник *Е. И. Герасимчук*

Верстка *С. П. Широкий, А. С. Широкий*

Корректор *Е. Г. Никитина*

Подписано к печати 11.08.2016 г. Формат 60×90/16. Бумага офсетная.

Печать офсетная. Объем 38 печ. л. Тираж 3000 экз. Заказ № 1118

Налоговая льгота — ОКП 005-93-95-3005

Отпечатано в типографии

ОАО «ИПП «Правда Севера»

163002, г. Архангельск, пр. Новгородский, 32

ПО ВОПРОСАМ ПРИОБРЕТЕНИЯ ПРОСЬБА ОБРАЩАТЬСЯ:

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВИКТОРИЯ ПЛЮС»

В Санкт-Петербурге: (812) 292-36-60, (812) 292-36-61

E-mail: victory@mailbox.alkor.ru; <http://viktoriya-plus.ru>

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ПЕТРОГЛИФ»

**С.-Петербург, пр. Обуховской обороны,
д.86, лит. «А», пом. № 204**

Тел.: (812) 943-8076

E-mail: spb@petroglyph.ru; www.petroglyph.ru

КНИГОТОРГОВАЯ ФИРМА «АБРИС Д»

(495) 615-29-01, 616-23-62, тел./факс: (495) 616-26-75

E-mail: abrisd@textbook.ru

МОСКОВСКИЙ ЦЕНТР НЕПРЕРЫВНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

119002, Москва, Б. Власьевский пер., 11

Тел.: (495) 241-7285; факс: (499) 795-1015

E-mail: biblio@mccme.ru; www.mccme.ru